FONTES

BNP
BIBLIOTECA
NACIONAL
DE PORTUGAL

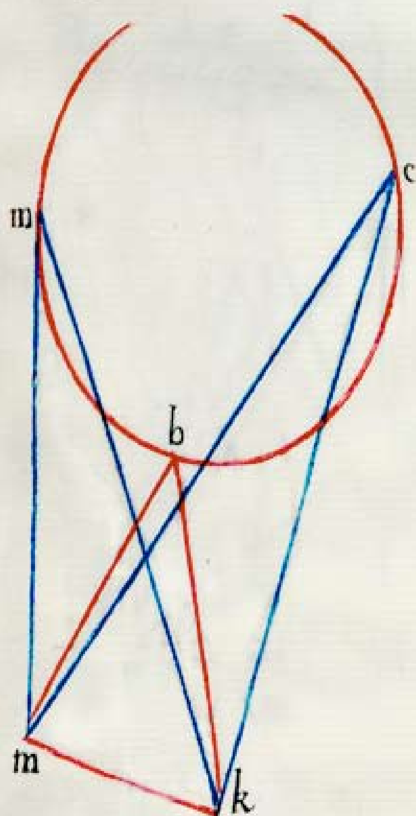
CEC
Centro de Estudos
Clássicos

Obras Matemáticas

Francisco de Melo

Vol. 1: Edição crítica e tradução

BERNARDO MOTA | HENRIQUE LEITÃO



Theorema. Quinquagesimum sextum.

Quadrato existente si a contactu dimetientium ad angulos rectos quædam excitata fuerit ad ipsius quadrati planum in ipsaqз positꝰ fuerit oculus. latera & dimetientes ipsius quadrati æquales apparebunt.

Sit quadratum dcbe. cuius dimetientes productæ sese secent in pc̃o. f. a quo pc̃o. f. per Duodecimã vndecimi erigatur perpendicularis ipsi quadrato q̃ sit f a. ponaturqз oculus in a. Dico æquales apparere dimetiẽtes. bd. ec. æqualia quoqз latera vt bd. ec.

Emittantur enim visus. a b. ac. ad. ae. af. & quoniam tria latera. eb. bc. ce. tribus lateribus. ed. dc. ce. sunt æqualia. erunt per octauam primi anguli. bce.

FONTES

BNP
BIBLIOTECA
NACIONAL
DE PORTUGAL

CEC
Centro de Estudos
Clássicos

Obras Matemáticas
Francisco de Melo

Obras Matemáticas
Francisco de Melo

Vol. 1: Edição crítica e tradução

BERNARDO MOTA | HENRIQUE LEITÃO

Biblioteca Nacional de Portugal
Centro de Estudos Clássicos
Lisboa 2014

Obras Matemáticas
Francisco de Melo
Vol. 1: Edição crítica e tradução
Bernardo Mota | Henrique Leitão

DESIGN
TVMDesigners

CAPA
Ms. Stralsund, f. 65v
[Arquivo Municipal de Stralsund, HS 767]

PRODUÇÃO GRÁFICA
Gráfica Ediliber, Lda

DEPÓSITO LEGAL
388260/15

ISBN
978-972-9376-31-3

TIRAGEM
500 exemplares

APOIOS

FCT
Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

FLUL
FACULDADE DE LETRAS
UNIVERSIDADE DE LISBOA

CIUHCT

Biblioteca Nacional de Portugal – Catalogação na Publicação

FRANCISCO DE MELO

Francisco de Melo : obras matemáticas. – Lisboa : Biblioteca
Nacional de Portugal : Centro de Estudos Clássicos, 2014. –
2 v.. –(Fontes)
V. 1 : Edição crítica e tradução / Bernardo Mota, Henrique Leitão
ISBN 978-972-9376-31-3 (ed. impressa)
ISBN 978-972-9376-32-0 (ed. eletrónica)

I – MOTA, Bernardo M., 1977-
II- LEITÃO, Henrique, 1964-

CDU 51

Vxori filiabusque
B. M.

Matri dilectissimae
In memoriam patris
H. L.

INTRODUÇÃO

Um dos matemáticos mais importantes do período anterior a Pedro Nunes é Francisco de Melo. Nascido por volta de 1490, tornou-se bolseiro de D. Manuel e completou os seus estudos de Teologia e Matemática na Universidade de Paris, onde também lecionou. Depois de regressar a Portugal, tornou-se Reitor da Universidade de Lisboa e desempenhou altos cargos diplomáticos e de consultoria científica. Foi nomeado Bispo de Goa, mas não chegou a exercer o cargo, por ter morrido de doença no ano de 1536.

Quando deixou a Universidade de Paris para regressar definitivamente ao seu país natal, trouxe consigo um manuscrito, profissionalmente executado, de caligrafia muito cuidada, e imponente na apresentação, onde se encontravam compiladas as suas obras matemáticas mais relevantes escritas até então: um conjunto de comentários escritos em latim a obras de Euclides (*Ótica* e *Catóptrica*, ou, respeitando a tradição latina, *Perspetiva* e *Especulária*), e de pseudo-Arquimedes (*Sobre os* [*corpos*] *incidentes em líquidos*), que dedicou como oferta ao então rei de Portugal, D. Manuel, em forma de agradecimento pelo apoio que lhe fora concedido pelo monarca. Diogo Barbosa Machado foi o primeiro a deixar notícia deste volume, especificando que incluía um «Commentario sobre a Perspectiva especulativa de Euclides. Dedicado a ElRey D. Manuel» e um «Comento a Arquimedes». A mesma notícia explicava as circunstâncias em que o exemplar acabou por sair de Portugal: «Este livro escrito em pergaminho, e illuminado excellentemente o conservava com grande estimação Luiz Serrão Pimentel Cosmografo mòr do Reyno, e Lente da Mathematica, do qual fez donativo ao Marquez de Liche na occasião, que este Cavalhero, que era muito applicado à Mathematica, foy ver à sua Livraria» (MACHADO 1965-1967: 2, 198). Como consequência deste gesto, perdeu-se o rasto desta magnífica cópia, que voltou a ser localizada apenas no ano de 2011. Hoje sabemos que, quando D. Gaspar de Haro y Guzmán, 7.º marquês de Carpio e marquês de Heliche (ou Liche) faleceu, muitos dos seus bens, entre os quais a sua enorme livraria, foram comprados em Madrid pelo diplomata e letrado sueco Johann Gabriel Sparwenfeld (1655-1727), que levou o manuscrito para a Suécia. Aí passou para as mãos do príncipe Axel von Löwen (1686-1772), conhecido pela riqueza das suas coleções científicas e livros, e acabou por ser integrado, após a morte deste, nos arquivos da cidade de Stralsund (Arquivo Municipal de Stralsund, (Hs 767)[1]. Aí permaneceu sem ser notado até 2011, altura em que Jürgen Geiss, o especialista que fora enviado da Staatsbibliothek de Berlim para catalogar os manuscritos da pequena localidade, se apercebeu da sua existência e o comunicou à Biblioteca Nacional de Portugal.

---

1 Homem político, homem de sociedade, colecionador e bibliófilo, o marquês de Heliche foi uma figura central na vida cultural espanhola do século XVII (veja-se, p. e., Gregorio de Andrés (1975)). A biografia de Sparwenfeld pode ser lida em Carl Vilhelm Jacobowsky (1932; o relato da estadia em Madrid encontra-se nas p. 123-152).

Ainda assim, os especialistas nunca perderam memória do texto de Francisco de Melo, uma vez que, em 1806, António Ribeiro dos Santos (1806: 237-249) chamou a atenção para a existência de uma segunda cópia nas coleções da Biblioteca Nacional de Portugal (BNP, COD. 2262). A história deste exemplar é mais difícil de esclarecer. Ribeiro dos Santos observou que ele «parece ser mais moderno, e dos fins do século XVI, princípios do XVII» (SANTOS 1806: 248) e revelou que fora doado à Real Biblioteca de Lisboa por frei Manuel do Cenáculo (1724-1814). Pode especular-se que essa cópia teria sido feita no período em que o manuscrito Real (a cópia de Stralsund) esteve na posse de Luis Serrão Pimentel, mas não há certeza disto.

Existiram seguramente mais cópias destes trabalhos matemáticos de Francisco de Melo. Com efeito, nenhum dos dois manuscritos mencionados é autógrafo e o facto de Pierre Forcadel ter publicado, em 1565, uma versão francesa dos comentários de Melo ao arquimediano *De incidentibus in humidis* parece indicar a existência de um manuscrito em Paris (ARQUIMEDES 1565). Além disso, é provável que Francisco de Melo tenha incorporado no texto conteúdos das suas aulas, e que estas tenham sido registadas por alunos. Seja como for, os trabalhos matemáticos constantes dos exemplares de Lisboa e Stralsund são os únicos textos de matemática da autoria de Francisco de Melo conhecidos hoje em dia[2]. O conteúdo dos dois manuscritos é essencialmente o mesmo e consiste num conjunto de textos dedicados à interpretação e explicação dos textos de ótica geométrica atribuídos a Euclides e de um texto incluído na tradição arquimediana; mais especificamente, os manuscritos incluem os seguintes textos:

1. Dedicatória, poema elegíaco, prefácio: na primeira dedicatória, em prosa, Francisco de Melo esclarece que compilou as suas obras matemáticas como oferta ao rei D. Manuel; esta dedicatória não está incluída no manuscrito da BNP (esta é a principal diferença textual entre as duas cópias); segue-se um poema em dísticos elegíacos que reproduz de forma abreviada o conteúdo da dedicatória; o prefácio que vem logo depois diz respeito apenas às obras óticas; de resto, pela dedicatória, podemos deduzir que a inclusão do tratado arquimediano é uma decisão de última hora;

2 Inocêncio Francisco da Silva sugere que teriam existido outras obras, perdidas aquando do terramoto de 1755 (SILVA 1858-1923: 3, 8-10). Das próprias palavras de Melo apenas se pode deduzir a existência de uns comentários a Euclides, mas é possível que tenham existido outros trabalhos já que se sabe que Melo se envolveu ainda no problema da demarcação das Molucas, uma questão de Estado que tem o cerne da sua dificuldade técnica no problema de determinar com precisão e de forma eficaz a longitude. Recentemente Suzanne Daveau (em: *Um Antigo Mapa Corográfico de Portugal (c.1525): Reconstituição a partir do Códice de Hamburgo*. Lisboa: Centro de Estudos Geográficos, 2010) e Rafael Moreira «Alberti et Francisco de Melo: Renaissance cartographique et architecturale au Portugal», *Albertiana,* 17 (2014) 23-51) propuseram a atribuição de outros trabalhos técnico-científicos a Francisco de Melo, mas uma discussão das razões invocadas não pode ser levada a cabo aqui.

2. *Francisci de Mello de videndi ratione atque oculorum forma*: trabalho introdutório sobre a natureza da visão e a forma do olho, em que Francisco de Melo recolhe e reorganiza argumentos geométricos sobre a anatomia do olho e sobre as condições de difusão de raios luminosos e visuais;
3. *Perspectiva Euclidis cum Francisci de Mello commentariis*: a *Ótica* de Euclides, com os comentários de Francisco de Melo, em que o autor cita a enunciação das sucessivas proposições a partir da tradução latina de Bartolomeu Zamberto, primeiro editada em 1505, mas substitui as demonstrações por outras da sua autoria.
4. *Francisci de Mello in Euclidis megarensis speculariam commentaria*: a *Catóptrica* de Euclides, com os comentários de Francisco de Melo, em que procede da mesma forma que no caso da *Ótica*.
5. *Archimedis de incidentibus in humidis cum Francisci de Mello commentariis*: trata-se do pseudo-arquimediano *Sobre os [corpos] incidentes em líquidos* na versão de Francisco de Melo, em que o autor reformula os argumentos e a estrutura proposicional do tratado medieval com o mesmo nome[3].

Estas obras constituem uma das primeiras tentativas de interpretação de textos ligados a Euclides e a Arquimedes do Renascimento europeu. Além disso, elas contribuíram para dar a Francisco de Melo a grande reputação de que gozou entre pares e entre o público geral, dentro e fora de Portugal, como confirmam as referências ao seu nome por parte dos portugueses Gil Vicente (prólogo do *Auto da Feira*) e André de Resende (*Oratio pro rostris*, de 1534), do espanhol Gaspar Lax (dedicatória da *Arithmetica Speculativa duodecim libris demonstrata*, de 1515), e do francês Pierre Forcadel (na sua versão francesa de 1565 dos comentários de Melo ao pseudo-arquimediano *De incidentibus in humidis*).

Por isso mesmo, desde muito cedo se constatou a necessidade de as estudar numa perspetiva portuguesa e europeia. No ano de 1892, Teófilo Braga, dando seguimento à notícia de António Ribeiro dos Santos publicada oitenta e seis anos antes, clarificou o projeto a prosseguir, afirmando: «é pena que estes trabalhos permaneçam inéditos; publicados com um estudo crítico-histórico, relacionariam Portugal de um modo digno com o movimento intelectual da Renascença» (BRAGA 1892: 324). Posteriormente, a necessidade de empreender este projeto foi reafirmada por vários outros estudiosos, mas ele nunca chegou a ser concretizado[4]. Coube a

3 O manuscrito da BNP, COD. 2262 apresenta no final, depois de um grupo de folhas em branco, um tratado de astronomia incompleto (*Elementa Geometrica ad Astronomiam necessaria*) que corresponde a uma tradução/adaptação do matemático árabe conhecido por Gebre, mas cuja autoria não deve ser de Francisco de Melo.

4 Assim o faz, por exemplo, uma autoridade como Luís de Albuquerque (1976-1977: 339-357). O estudo mais recente sobre Francisco de Melo (SANTOS 2007) volta a constatar a ausência de um estudo de conteúdo completo.

Marshall Clagett, um dos mais reconhecidos especialistas do século XX em tradição arquimediana, o mérito de incluir uma edição e tradução, acompanhadas de estudo, da parte das obras relacionada com Arquimedes (CLAGETT 1978: 146 ss). Clagett confirmou o valor das obras, sintetizando-o da seguinte forma: «Francisco's performance was quite impressive» (CLAGETT 1978: 1078). Quanto às obras relacionadas com a ótica, as que ocupam maior relevância nos manuscritos, elas permaneceram inéditas até hoje. Dois motivos fundamentais o justificam: a transcrição e a leitura do texto eram especialmente difíceis de executar, devido à caligrafia e ao mau estado do códice 2262 da BNP (hoje, com a descoberta do manuscrito de Stralsund, a tarefa ficou muito facilitada); a tradução e estudo complementares são tarefas complexas porque o texto está redigido num latim muito técnico e a interpretação do conteúdo requer competências muito específicas nos domínios da matemática, filologia, estudos clássicos e história da ciência. Por isso, os estudos produzidos até hoje acabaram por não acrescentar muito mais à descrição e breve paráfrase dos títulos de cada capítulo e de partes dos sucessivos prefácios realizada por Ribeiro dos Santos; o conteúdo científico propriamente dito permanece por avaliar.

Três razões, no entanto, tornaram este projeto premente e prioritário. Em primeiro lugar, nos últimos anos, os estudos relativos às atividades matemáticas de portugueses no período anterior a Pedro Nunes têm vindo a conhecer um avanço assinalável. O progressivo esclarecimento dos contributos devidos a matemáticos dessa época (Rolando de Lisboa, em meados do século XV, ou Álvaro Tomás, no início do século XVI, entre outros) obriga já a reavaliações significativas da imagem usual da história da matemática no nosso país: note-se, por exemplo, que os trabalhos desses matemáticos são de índole teórica ou abstrata, não se relacionando com as temáticas tradicionalmente associadas ao século dezasseis português, isto é, às aplicações náuticas e astronómicas, ou às comerciais e tecnológicas. Em segundo lugar, a ótica antiga e do período medieval tem recebido redobrada atenção por parte de estudiosos contemporâneos, que se têm dedicado a reinterpretar e reavaliar o contributo dos autores antigos e medievais, produzindo edições, traduções e comentários de textos de todas as tradições: grega, latina e árabe[5]. Assim sendo,

5 Entre os muitos trabalhos disponíveis, damos, a título de exemplo, os seguintes. Para a tradição árabe: Elahe Kheirandish – *The Arabic Version of Euclid's Optics*. New York: Springer-Verlag, 1999 (2 vol.); A. I. Sabra – *The Optics of Ibn Al-Haytham. Books I-III On Direct Vision*. London: The Warburg Institute, 1989 (2 vol.); Roshdi Rashed – *Oeuvres Philosophiques et Scientifiques d'Al-Kindi.* Leiden: Brill, 1997. Vol 1. *L'Optique et la catoptrique*. Para a tradição grega: A. Mark Smith – *Ptolemy's Theory of Visual Perception.* Philadelphia: The American Philosophical Society, 1996; Wilbur R. Knorr – «Archimedes and the Pseudo-Euclidean Catoptrics: early stages in the ancient theory of mirrors», *Archives internationales d'histoire des sciences,* 35:114-115 (1985) 28-105; Wilbur R. Knorr – «Pseudo-Euclidean Reflections in Ancient Optics», *Physis,* 31 (1994) 1-45; Roshdi Rashed – *Les Catoptriciens Grecs.* Paris: Les Belles Lettres. 2002. *Tome I: Les Miroirs Ardents*. Para a tradição latina medieval: Ken'ichi Takahashi – *The Medieval Latin Traditions of Euclid's Catoptrica*. Kyushu University Press, 1992.

o estudo dos comentários de Melo impõe-se, seja para se formar uma correta compreensão do processo de reinterpretação da ótica antiga ocorrido no período do Renascimento imediatamente antes da renovação galileana, seja para a reconstrução do percurso histórico de argumentos científicos que hoje ainda não são claramente entendidos. Além disso, o estudo destas obras ilumina o importante papel que os portugueses tiveram, no contexto das atividades desenvolvidas na Universidade de Paris, na renascença matemática do século XVI, e chama a atenção para a herança e lastro cultural que eles produziram e para o património português que permanece noutros países. A razão mais óbvia, no entanto, corresponde ao facto de que houve atenção redobrada dada ao manuscrito que Melo quis oferecer ao rei D. Manuel, depois da sua localização em Stralsund. Esta atenção internacional acresceu a pressão para completar uma tarefa há muito requisitada, e realçou a responsabilidade exigida da academia portuguesa em relação ao assunto.

É este o trabalho que nos propusemos levar a cabo: editar, traduzir e estudar o conjunto das obras matemáticas de Francisco de Melo incluídas nos dois manuscritos conhecidos, cumprindo assim um desiderato de mais de dois séculos. Uma vez que se trata de um processo demorado, decidimos, de imediato, disponibilizar o texto para que o seu conteúdo pudesse ser divulgado desde já. Esse trabalho corresponde a este primeiro volume, que inclui a edição crítica do texto latino e a tradução portuguesa, a que juntámos apenas as notas absolutamente necessárias para a compreensão do texto. No segundo volume do nosso trabalho, que, sublinhamos, será imprescindível para uma interpretação mais completa do texto, incluiremos o estudo pormenorizado destas obras. O nosso objetivo é mais amplo do que dar a conhecer este autor. Pretendemos também realçar a sua importância no âmbito da história da ciência e da cultura portuguesa.

Critérios de Edição

Para o estabelecimento do texto, utilizámos os dois manuscritos conhecidos:

S = *Stralsundensis*. Stralsund, Stadtarchiv Stralsund, HS 767. Séc. XVI.
O = *Olisiponensis*. Lisboa, Biblioteca Nacional de Portugal, COD 2262. Séc. XVII.

O manuscrito *S* serviu como ponto de partida para a edição, uma vez que é a cópia mais antiga (1521, de acordo com o final da dedicatória), e deve ter tido cuidada vigilância por parte de Francisco de Melo, tratando-se da versão final e cópia para o Rei. Além disso, é o manuscrito mais completo, uma vez que *O* não inclui a dedicatória inicial e omite cerca de vinte e três linhas de texto do corolário que se segue à proposição vigésima do comentário à *Especulária*. No resto, os textos

apresentam lições alternativas que, subtraindo as variações ortográficas, são em número muito reduzido. A colação não permite tirar conclusões definitivas sobre a relação entre as duas cópias, nenhuma delas autógrafa. *O* apresenta por vezes uma lição mais correta que *S*, mas é difícil saber se representa uma cópia feita a partir de um terceiro manuscrito ou se o seu autor está a corrigir *S*. Seja como for, é clara a preferência do autor por grafias de prestígio e formas gramaticalmente corretas (por exemplo: «collustrant» por «colustrant», «ratiocinatio» por «ratiotinatio»). Sendo esta uma edição de trabalho que pretende incluir todos os dados relevantes para investigação futura, apresentámos no aparato todas as variantes encontradas. A maior parte do aparato assinala correções da nossa autoria, sem as quais o texto deixa de fazer sentido. Para evitar a repetição cansativa de *corr.* («correximus»), decidimos não a indicar, exceto quando quisemos marcar as correções sugeridas por Marshall Clagett ao texto do *Sobre os [corpos] incidentes em líquidos*. Assim a nota do aparato «**quotlibet** *S*, quodlibet *O*» significa que o manuscrito *O* apresenta a lição «quodlibet», o que faz com que a lição escolhida «quotlibet» seja a de *S*; a nota do aparato «**qui** *O*, que *S*» significa, pelo contrário, que o manuscrito *S* apresenta a lição «que», o que faz com que a lição escolhida «qui» seja a de *O*; já uma nota do aparato como «**eisdem,** eosdem *SO*» significa que ambos os manuscritos apresentam a lição «eosdem», que corrigimos para «eisdem».

Quanto ao resto, procurámos intervir o menos possível, para que o investigador tivesse acesso a um texto mais próximo do original e sentisse as suas especificidades. Assim sendo, actualizámos a pontuação com o intuito de ajudar o leitor e por conveniência de transcrição, mas sem preocupação de eliminar todas as idiossincrasias do texto. Optámos por manter a grafia original, mesmo quando ela não era coerente, para o que serve de exemplo a escrita do ditongo «ae» (grafado geralmente «e», mas também «ae») e de «u/v» (nem sempre utilizados da mesma forma); não assinalámos variações consideradas irrelevantes (como, p. e., «&» e «et») e desdobrámos as abreviaturas sem indicação. Mantivémos ainda o uso do símbolo «□», que aparece no texto com o significado de «quadrado». Ao longo da edição utilizámos os símbolos e siglas habituais:

[ ] – para introduzir comentários nossos;
< > – para introduzir adições nossas ou indicar lacunas;
Add. = Addidit, etc.; Om. = Omisit, etc.; Rep. = Repetiuit, etc.

A tradução obedeceu ao princípio de respeitar o modo de expressão do texto original, mas permitir, ao mesmo tempo, uma leitura escorreita, como se exige num texto moderno. Evitámos, portanto, uma tradução demasiado literal mas procurámos não nos desviarmos do texto. A inclusão do texto latino permite tirar todas as dúvidas. Optámos por incluir todas as figuras apresentadas no manuscrito, pro-

cedendo a correções mínimas mas necessárias para evitar incompatibilidades e incoerências entre as figuras e o texto, devidas a erros e limitações (por exemplo, de espaço) do desenhador. Apenas as informações mais relevantes sobre as figuras foram incluídas em nota de rodapé, remetemos comentários adicionais para o segundo volume desta obra. É natural que o leitor sinta estranheza derivada da diferença dos códigos de representação visual do século XVI para hoje. Pensamos, no entanto, que, com a habituação, essa estranheza vai desaparendo, e que o segundo volume resolverá as dificuldades mais dramáticas.

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível devido ao apoio de diversas instituições e pessoas, a quem gostaríamos de deixar expresso o nosso reconhecimento. Em especial, temos de agradecer o financiamento concedido pela Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto FCT «Francisco de Melo e a Tradição Euclidiana em Portugal / Francisco de Melo and the Euclidean Tradition in Portugal» (EXPL/IVC-HFC/1290/2012) dirigido por Bernardo Mota, e que permitiu ter acesso e contacto com o manuscrito de Stralsund, reunir a necessária bibliografia, realizar as missões necessárias para investigação como para participação em colóquios e reuniões de peritos, e ainda reunir as condições para publicação deste volume. O agradecimento estende-se a todas as pessoas envolvidas na gestão do projeto. O Projeto foi acolhido pelo Centro de Estudos Clássicos da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa, que foi irrepreensível em todo o seu apoio. Agradecemos, portanto, à sua Diretora, Professora Doutora Cristina Pimentel, e a todas as pessoas que, na Faculdade, ajudaram o projeto a chegar a bom porto. Como entidade participante, merece agradecimento ainda o polo de Lisboa do Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia, em cujos gabinetes decorreu uma larga parte do trabalho de investigação realizado pela equipa, pelo que agradecemos à sua Diretora, Professora Doutora Ana Simões. O envolvimento da Biblioteca Nacional de Portugal foi excecional a vários níveis: não só nos concedeu condições de trabalho fundamentais, como nos pôs em comunicação com os colegas das bibliotecas de Berlim e Stralsund e procedeu à digitalização da sua cópia (disponível na Biblioteca Nacional Digital), um gesto fundamental para que a investigação pudesse ser levada a cabo; além disso, envolveu-se com imprescindível entusiasmo na publicação deste volume, integrando-o na sua coleção «Fontes». O agradecimento é dirigido em primeiro lugar à sua Diretora, Doutora Maria Inês Cordeiro, e estende-se à Diretora do Serviço de Reservados, Dr.ª Lígia de Azevedo Martins, a todas as pessoas da Divisão de Reservados da BNP, e, finalmente, ao Sr. Carlos Abreu, pelo seu contributo inestimável na fase de composição do volume. Como ficou explícito, foi igualmente funda-

mental o contributo de instituições e colegas alemães. A Staatsbibliothek zu Berlin, o Arquivo Municipal de Stralsund e a sua Câmara Municipal merecem referência, por terem permitido à equipa do Projeto MELO trabalhar em local que lhes foi especialmente alocado, e pelo acesso dado ao manuscrito e às digitalizações do mesmo. O agradecimento estende-se especialmente ao Dr. Jürgen Geiss, então especialista da Staatsbibliothek zu Berlin, e ao Dr. Burkhard Kunkel, responsável pelo Arquivo Municipal de Stralsund.

Este volume beneficiou de conversas que tivemos com diversos antigos professores e colegas, a quem queremos agradecer. Em primeiro lugar, agradecemos a Bruno Almeida o profissionalismo e a disponibilidade com que se acometeu à difícil tarefa de desenhar os diagramas geométricos (que foram mais de duzentos), e proceder aos inúmeros ajustes derivados da revisão constante que deles fomos fazendo; a Samuel Gessner, as inúmeras observações que melhoraram o texto e a construção do *site* do projeto; ao Professor Arnaldo do Espírito Santo, as observações valiosas que fez sobre alguns passos que quisemos que passassem sob os seus olhos. Aos colegas de Estudos Clássicos e História da Ciência que nos acompanharam agradecemos o constante apoio, a todos um bem haja.

Agradecemos, finalmente, às nossas famílias, que aprenderam a viver com a ausência e obsessão inexplicáveis de dois académicos que, nos tempos livres, também são pais, filhos, maridos. Estiveram sempre connosco na nossa mesa de trabalho.

Bernardo Mota | Henrique Leitão

Referências bibliográficas

*Albuquerque, Luís de (1976-1977) – «Pedro Nunes e Diogo de Sá», *Memórias da Academia de Ciências* – Classe de Ciências, 21 (1976-1977) 339-357.

Andrés, Gregorio de (1975) – *El Marqués de Liche, bibliófilo e coleccionista de arte*. Madrid: Artes Graficas Municipales.

Arquimedes (1565) – *Le livre d'Archimede des Poids, qui est aussi dict des choses tombantes en l'humide.* Traduict et commenté par Pierre Forcadel de Bezies, lecteur ordinaire du Roy es Matematiques en l'Université de Paris. A Paris: Chez Charles Perier.

*Braga, Teófilo (1892) – *História da Universidade de Coimbra nas suas relações com a Instrução Pública Portuguesa*. Lisboa: Tipografia da Academia Real das Ciências. Vol. 1: 1289 a 1555.

*Clagett, Marshall (1978) – *Archimedes in the Middle Ages.* Philadelphia: American Philosophical Society. Vol. 3: *The fate of the medieval Archimedes 1300-1565.*

DAVEAU, Suzanne (2010) – *Um Antigo Mapa Corográfico de Portugal (c.1525): Reconstituição a partir do Códice de Hamburgo*. Lisboa: Centro de Estudos Geográficos.

JACOBOWSKY, Carl Vilhelm (1932) – *J. G. Sparwenfeld. Bidrag till en Biografi*. Stockholm: Kurt Lindberg, Boktryckeriaktiebolag.

*MACHADO, Diogo Barbosa (1965-1967) – *Bibliotheca Lusitana*. 3.ª ed. Coimbra: Atlântida Editora. 2, 198. (1.ª ed. Lisboa, 1741-1759).

MOREIRA, Rafael (2014) – «Alberti et Francisco de Melo: Renaissance cartographique et architecturale au Portugal», *Albertiana,* Firenze, 17 (2014) 23-51.

*SANTOS, António Ribeiro dos (1806) – «Memória da Vida e Escritos de D. Francisco de Mello», *Memórias de Literatura Portuguesa.* Academia das Ciências de Lisboa, Lisboa, 7 (1806) 237-249.

*SANTOS, Luís Miguel Ferreira (2007) – *D. Francisco de Melo. Biografia e escritos,* Universidade de Coimbra. Tese de Mestrado.

SILVA, Inocêncio Francisco (1858-1923) – *Diccionário Bibliographico Portuguez,* Lisboa: Imprensa Nacional.

* Bibliografia fundamental

EDIÇÃO CRÍTICA E TRADUÇÃO

DEDICATÓRIA E PREFÁCIO

|Inuictissimo[1] atque Serenissimo Principi Emmanueli Lusitanorum Regi potentissimo Franciscus de Mello foelicitatem. [S1r]

Inter plurima quae sunt in tua ista foelicissima Lusitanorum Republica, Rex inuictissime, a tuis maioribus praeclare et sapienter instituta, nec minus sancte et religiose obseruata, illud imprimis summa laude admirationeque dignum prudentissime sancitum est, vt Lusitanorum procerum liberi, quum primum per aetatem a nutricis sinu auelli possunt, in tua hac regia alantur, in qua veluti in omnium virtutum schola ingenuorum puerorum greges labori assuescere, optimis atque vrbanis moribus imbui, militiae rudimenta discere, charitatem in patriam, in superos reuerentiam, in Regem obseruantiam immo potius pietatem excolere incipiunt. Atque, vt est illa aetas ad omnia sequax, mutuam erga alios nobiles beneuolentiam, tantum etiam in Regem amorem imbibunt, vt pro Regum Lusitanorum gloria et imperio non aliter quam pro vita parentum sint decertare parati, tanta omnium concordia, tanto ardore, tanta fide, tanta denique alacritate, vt fratres putes ad propulsandam communem parentis iniuriam aut ad patriam rem augendam in aciem descendisse. Quapropter his semper paratissimis fidissimisque, in bello non mercenariis (quae maxima est nobilium Lusitanorum gloria) non imperio coactis sed voluntariis vltro sese offerentibus atque ad sacramenta militiae certatim nomina dantibus priuatis | [S1v] nonnunquam impendiis, Lusitani reges vsi sunt, in pace vero tanta obedientia atque religione obsequentibus, vt nec contra Regium preceptum obmurmurare, immo ne hiscere quidem ausint. Tanta est communis educationis vis, tanta ad deuinciendos animos authoritas, qua tui maiores freti e regni finibus Christianae religionis hostes non solum pepulerunt sed in hostilem terram cum exigua manu collatis signis multa hostium milia fuderunt, multas vrbes atque oppida expugnarunt. Hac confidentia, tu ipse, Princeps foelicissime, regni tui fines per Mauritaniam, Aetiopiam, Arabiam, Persiam, atque Indiam in extremos vsque (si Ptolomeo credimus) Sinas non sine immortali gloria propagasti. Quod si tam longe a Patrie complexu, tam longe a tuo conspectu, tam exigua manu, tot tantaque bella confecisti, quid futurum existimas si pro aris et focis, te presente atque illos adhortante, omnibus tuis copiis, res ageretur? Sunt hec crede mihi ingentis spei gloriosa simulacra: Milciades vnus Athenensium Dux, exiguis copiis suorum conciuium (vt Author est Thucidides) infinitam Barbarorum multitudinem que duce Xerxe in Greciam irruperat fugauit; vna Fabiorum gens (authore Liuio) – tricentis et sex ex Fabiorum gente

1 **Inuictissimo... supra millesimum et quingentesimum** *S*, totam dedicatoriam om. *O*

**Ao Invictíssimo e Sereníssimo Príncipe
Manuel, Poderosíssimo Rei dos Lusitanos,
Francisco de Melo deseja prosperidade**

Entre as muitas coisas, Invictíssimo Rei, que nesta tua muito próspera República dos Lusitanos foram notável e sabiamente constituídas, e não menos pia e religiosamente cumpridas, pelos teus antepassados, esta, acima de todas, foi sancionada com grande visão e merece o maior louvor e admiração: que os filhos dos nobres Lusitanos, logo que atingem a idade em que podem ser retirados dos cuidados da ama, sejam alimentados nesta tua Corte, na qual, como numa escola de todas as virtudes, os bandos de jovens bem-nascidos começam a habituar-se ao esforço, a embeber-se em bons e civilizados costumes, a aprender os rudimentos da milícia, a cultivar a dedicação à pátria, a reverência para com os deuses, o respeito e, mais ainda, a devoção para com o Rei. E, como aquela idade está preparada para tudo, ganham uma estima para com os restantes nobres, e um tão grande amor ao Rei, que estão prontos a lutar pela glória e poder dos Reis Lusitanos não menos do que pela vida dos pais, com tão grande união entre eles, tão grande ardor, tão grande fidelidade e paixão que pensarás que partem para a guerra como irmãos para repelir uma afronta comum feita ao pai, ou para dilatar a pátria. Por esta razão os reis lusitanos fizeram bom uso destes [homens], sempre prontos e leais: na guerra, não sendo mercenários nem obrigados à força (o que constitui a maior glória dos nobres Lusitanos), mas oferecendo-se como voluntários por sua própria vontade e dando à porfia os seus nomes para o juramento de guerra, por vezes a expensas suas; e na paz, obedecendo com tão grande respeito e religião, que não ousam sussurrar nem sequer murmurar uma palavra contra uma ordem do Rei. Tamanha é a força da educação comum, tamanha é a autoridade para unir os espíritos: confiando nela, os teus antepassados não só afastaram os inimigos da religião Cristã das fronteiras do reino mas também desbarataram muitos milhares de inimigos em terra hostil, com pequena força militar, pelejando a bandeiras despregadas, e conquistaram muitas cidades e vilas. Com a mesma audácia, tu próprio, afortunadíssimo Príncipe, alargaste as fronteiras do teu reino pela Mauritânia, Etiópia, Arábia, Pérsia, e Índia, até ao extremo limite da China (a acreditarmos em Ptolemeu), com glória imortal. Ora, se levaste a cabo tantas e tão grandes guerras tão longe do alcance da Pátria, tão longe da tua presença, com tão escassos recursos [militares], o que pensas que haveria de acontecer, se isso se fizesse estando tu presente exortando-os pelos altares e pelos lares, com todos os teus exércitos? São estes, acredita em mim, os modelos gloriosos de uma grande esperança: Milcíades, General dos Atenienses, por si só, com exíguas tropas dos seus concidadãos (como afirma Tucídides), pôs em fuga uma multidão infinita de Bárbaros que invadira a Grécia, comandada por Xerxes; a família dos Fábios, sozinha (segundo Lívio) – trezentos e seis da família dos Fábios juntamente

cum clientum affiniumque manu – Veientis populi inter Etruscos opulentissimi arma diu sustinuit impetum atque superbiam fregit. Qua id tandem spe, quo consilio, nisi mutuo in Patrie fines augendos desiderio, vna scilicet | in patriam charitate, vno impetu, vna voluntate? Quid igitur ex tanta totius amplissimi regni tui concordia fraterno inter omnes amore maxima demum in te obseruantia (quam hec a teneris annis in tua regia aula consuetudo magnopere conciliat) sperandum erit? Nulla quippe mea sententia firmior est amicitia, quam que studiorum similitudine a pueris etate increscente paritur. Nulla obseruantior in parentem pietas, quam que in ipsis (vt ita dicam) vberibus fingitur[2]. Nulla erga dominos maior reuerentia, quam que in teneris infantie incunabulis[3] imbibitur vsque adeo que in teneris annis discuntur tenaciter herent. Quare nullo (vt mea est opinio) instituto melius potuit Lusitanorum Regum amplitudini atque securitati consuli, quam quod a teneriusculis pueritie annis Lusitani nobiles suum regem obseruare atque suspicere occipiunt parentumque[4] loco habere. Quamobrem Lusitani omnes nobiles nihil antiquius habent, quam suum regem vnice summo amore complecti summa veneratione colere, eiusque desideriis in omnibus morem gerere. Ob id ad te omnes quicquid tibi iocundum gratumque fore suspicantur magno studio deferunt. Hi uenaticos canes, alii accipitres, equos alii; nemo in summam ad te sine munere iuxta Persarum institutum venit. Ego igitur, Princeps humanissime, qui in tua ista Aula, abs te cum meis aequalibus indulgentissime educatus sum, tuis stipendiis munificentissimis beneficiisque auctus, qui nunc illam tuo iussu accitus repeto, nolui irreligiose te vacuus adire. Et quoniam mihi fortune opes non suppete|bant, malui aliquod[5] nostri ingenioli monumentum que literarie nostre militie gloria est, quo tibi meam erga te obseruantiam testatam haberem afferre, tibique dono dare. Euolui itaque nuperrime, dum itineri accingor, nostrum literarie supellectilis thesaurum atque tandem hoc literarium munusculum, quod nunc celsitudini tue dedico, depromere constitui; Commentaria scilicet in Euclidis Speculariam et Perspectiuam, que per hos dies succisiuis horis elucubraueram non satis propter nostri reditus festinationem exculta, quibus velut auctarium adieci Archimedis De Incidentibus in Humidis, aureum sane libellum nostris demonstrationibus illustratum, quem Hieroni Syracusanorum Principi scripserat, vt Victruuius prodidit, vt mea in illo elucidando opera tibi Principi omnium humanissimo dedita esset et omnium studiosorum amantissimo, sicut is olim libellus Principi inter omnes Syracusanos benignissimo elaboratus est. Exiguum certe munus, si pro tua magnitudine atque dignitate estimetur, sed magnum

[S2r] [S2v]

2 **fingitur**, fugitur *S*
3 **incunabulis**, incunabilis *S*
4 **parentum**, patentum *S*
5 **aliquod**, alioquod *S*

com a ajuda dos seus clientes e parentes – durante muito tempo susteve os exércitos do povo de Veios, o mais poderoso dos Etruscos, e desbaratou o seu ataque e a sua arrogância. E isto, [movidos] por que expectativa, por que desígnio, senão pelo desejo mútuo de aumentar as fronteiras da Pátria, ou seja, por um amor comum, um arrebatamento comum, uma vontade comum para com a Pátria? O que é que se poderia esperar de uma tão grande concórdia de todo o teu amplíssimo reino, do fraterno amor entre todos, de tão grande respeito, finalmente, para contigo (coisas que a frequência da tua Corte desde os verdes anos oferece em mais alto grau)? Na minha opinião, nenhuma amizade é mais firme do que a que nasce de uma educação partilhada desde rapazinhos e se desenvolve com o avançar da idade. Nenhuma devoção para com os pais é mais respeitosa do que a que se forma nos próprios seios, por assim dizer. Nenhuma reverência é maior para com os senhores do que a que é absorvida nos tenros berços da infância, até que fixem tenazmente o que aprendem nos tenros anos. Por esta razão, como é a minha opinião, por nenhum costume se podia melhor velar pela grandeza e segurança dos Reis Lusitanos do que pelo facto de os nobres lusitanos começarem a respeitar e admirar o seu Rei desde os mais verdes anos da juventude, e a considerá-lo no lugar dos seus pais. Por esta razão, todos os nobres lusitanos nada julgam mais venerável do que rodear especialmente o seu Rei da maior dedicação e respeitá-lo com grande veneração e fazer a sua vontade em todos os seus desejos. Por isso todos te levam com grande zelo o que quer que suspeitem que te será agradável e grato; uns, cães de caça; outros, falcões; outros, cavalos; em suma, ninguém vem ter contigo sem um presente, de acordo com o costume dos Persas. Portanto, eu, Príncipe Humaníssimo, que fui educado por ti neste teu Palácio, com os meus pares e com muita benevolência, que beneficiei dos teus estipêndios generosíssimos, que agora a ele retorno por tuas ordens, não quis chegar à tua presença impiamente e de mãos vazias. E como as sortes não me davam riquezas preferi trazer e oferecer-te de presente um testemunho do nosso talentozito que é a glória da nossa milícia literária, por meio do qual tivesse a minha deferência para contigo reconhecida. Assim sendo, ainda agora, ao preparar-me para a viagem, folheei o nosso tesouro de baixela literária, e finalmente decidi-me a extrair este pequeno presente, que agora dedico à Tua Eminência, a saber: os comentários à *Especulária* e *Perspetiva* de Euclides (a que, por estes dias, [trabalhando] horas a fio, dei uma última mão, uma vez que não tinham sido completamente revistos, devido à antecipação do nosso regresso), aos quais acrescentei, como contrapeso, o precioso libelo de Arquimedes *Sobre os Incidentes em Líquidos* (que ele escreveu para Hierão, Príncipe dos Siracusanos, como diz Vitrúvio), ilustrado com as nossas demonstrações, para que o meu esforço de o explicar pudesse ser-te oferecido, Príncipe mais cultivado de todos e de todos os estudiosos o mais apaixonado, tal como esse libelo foi outrora elaborado para o mais generoso Príncipe entre todos os Siracusanos. É, sem dúvida, parco presente, a julgar pela tua grandeza e dignidade, mas suficiente-

satis, si pro argumenti dignitate, demonstrationum certitudine, atque probatissimorum Authorum qui hec excuderunt et magnopere probant authoritate expendatur. Quod si tibi (vt spero) placuisse cognouero, me ad maiora audendum excitabis. Vale diu incolumis, foelicissime Rex, cuius desideriis superi pro voto annuant. Lutetie Parrhisiorum, tertio nonas Ianuarias, anno a partu virgineo vicesimo primo supra millesimum et quingentensimum.

| Eiusdem Elegum Carmen [S3r; O1v]

Maxima certatim, vastum quesita per orbem
Mittuntur dono, munera queque tibi
Mittitur ex Indis Elephas, gemmaeque nitentes,
Quasque ibi praecipuas terra profundit opes.
Mittit et Aeripedum palmam tibi Maurus equorum,
Vincere quos celeris non queat aura nothi.
Inque hominum votis primum dant Sole perusti
Aetiopes aurum, Cinnama mittit Arabs.
Ast ego non aurum, aut magno constantia sumptu
Munera (que tristi sors mihi fronte negat)
Affero. Sed longo dudum congesta labore
prima tibi ingenii do monumenta mei.
Parua quidem fateor nec tanto Principe digna
Et cui si dederis maxima, parua fient.
Hec tamen excipies Rex humanissime uultu
Candidiore, dein sors meliora dabo.
Iterum Vale.

mente grande se se julgar pela dignidade da argumentação, pela certeza das demonstrações e pela autoridade dos reconhecidíssimos autores que as produziram e comprovam eficazmente. Se eu vier a saber que ele te agradou (como espero), motivar-me-ás a ousar coisas maiores. Permanece incólume durante muito tempo, felicíssimo rei, e aos teus desejos sejam favoráveis os Deuses conforme o meu voto. Paris, terceiro dia das Nonas de Janeiro[1], ano do parto da Virgem milésimo quingentésimo vigésimo primeiro.

Poema Elegíaco do mesmo [Francisco de Melo]

As maiores riquezas, procuradas e disputadas pelo vasto orbe,
são-te enviadas como oferendas; como presentes,
são-te enviados das Índias o elefante e brilhantes gemas
e as principais riquezas que aí a terra produz;
o Mouro envia-te a palma de enípedes cavalos
que o sopro do veloz Noto não consegue vencer;
Como votos de homens, os Etíopes abrasados pelo sol dão-te
o mais precioso ouro; envia-te canela o Árabe.
Ora eu, nem ouro, nem presentes feitos
de grande despesa (que a mim, de triste rosto, me nega a sorte)
te trago, mas dou-te os primeiros registos do meu engenho
há muito congeminados em trabalho esforçado.
São minúsculos, sei-o bem, e indignos de tão grande Príncipe,
a quem tudo o que se der de grande, pequeno se tornará.
Contudo, se os acolheres, cultivadíssimo Rei, com favorável
assentimento, dar-te-ei melhor talvez, no futuro.
Novamente te saúdo.

1 Ou seja, 3 de janeiro.

| Francisci de Mello in Euclidis Megarensis Philosophi atque Mathematici Praestantissimi Perspectiue Commentaria, ad optimum quemque Prefatio [S3v]

In tanta humani ingenii caligine, sola nos diuinorum operum contemplatio huiusque in quo uersamur mundi pulchritudo ad diuini numinis uenerationem substollit. Inuisibilia namque Dei (vt diuus inquit Paulus) per ea que facta sunt intellecta conspiciuntur, sempiterna quoque virtus Eius, atque in tam concinno rerum perfectarum ordine per quosdam gradus sensilium nobisque affinium cognitio in mundi ipsius deuexa atque omnia occupantis numinis admirationem subuehit, in quo omnium bonorum in his sensibilibus rebus inuentorum complexio immensa absolutissimaque collucet, a quo omne donum optimum perfectumque (vt diuus Iacobus scripsit) defluxit deriuatumque est. Et in tam vario, tam vasti operis ornatu, singula suum opificem pro modo et mensura sue perfectionis testantur, perfectius quidem quecumque inter reliqua naturae opera absolutiora conspectioraque visuntur, perfectissime vero vnus homo, qui ad eius effigiem mira arte ingenioque est efformatus. Nam caelestes spiritus, corporeis omnino vinculis absoluti, spiritalisque hu|manae animae caelitibus cognatio non ita a nobis dum in his tenebris volutamur cognosci possunt, vt ex eorum cognitione ad incomprehensilem[1] dei immortalis naturam assurgamus. Sola restant in tanto opere princeps sentiendi facultas, nobilissimaque | ad eam vim deputata Sensoria, quibus omnium animantium vitae deus optimus maximus prouideri voluit. [S4r] [O3v]

Quibus (vt mea fert opinio) nihil potest et videri iocundius, plasmari vtilius et fieri compositius. Hec preter vnum tactum (qui vt est cunctis animantibus communis, ita omnibus eius pene partibus inest) in capite totius corporis arce locauit, inque eius suprema parte, binos oculorum orbes, omnis animantium uitae speculatores, constituit, quibus inter omnia Sensoria (Philosophorum omnium consensu) principem locum iure optimo dedit. Nam si quis eorum substantiam, figuram habitum, uitaeque munia pensiculatius examinet, nihil in his caducis flexisque rebus dicet sublimius aptius munitius animaliumque uitae commodius effingi posse.

Ex cerebri quippe fluore (si Aristoteli credimus) oculorum pupille (quibus praecipue data est videndi facultas) constant; humore scilicet aqueo in cristalli speciem modice glaciato, cui facile multiformes

---

1 **incomprehensilem** *S*, incomprehensibilem *O*

Comentários de Francisco de Melo à *Perspetiva*, do eminentíssimo Filósofo e Matemático Euclides de Mégara. Prefácio aos mais excelentes

Em tão grande escuridão do engenho humano, só a contemplação das obras divinas e a beleza deste mundo em que vivemos nos erguem para a veneração do divino Nume. Na verdade, como diz São Paulo[1], «as coisas invisíveis de Deus são contempladas depois de compreendidas por meio das coisas criadas, tal como a Sua eterna virtude», e em tão harmoniosa ordem das coisas perfeitas, por uma espécie de degraus, o conhecimento das realidades sensíveis e que nos são afins, transporta-nos às regiões inferiores do mundo e à admiração do Nume que abrange todas as coisas, no qual resplandece a totalidade, imensa e perfeitíssima, de todo o bem que se encontra nas coisas sensíveis; do qual emana e deriva toda a dádiva ótima e perfeita, como escreve São Tiago[2]. E em tão variado arranjo de obra tão vasta, cada coisa ilustra a justa medida e dimensão da Sua perfeição, e de forma mais perfeita, [fazem-no] algumas coisas que se veem, mais conseguidas e acabadas entre as restantes obras da natureza, mas de forma absoluta, apenas o homem, que foi criado à sua imagem com extraordinária arte e engenho. Com efeito, os espíritos celestes, desprovidos de quaisquer vínculos corpóreos, e o parentesco entre a espiritual alma humana e os [entes] celestiais, não podem ser conhecidos por nós enquanto estamos envolvidos por estas trevas, de maneira a podermos, pelo seu conhecimento, erguer-nos à incompreensível natureza de Deus imortal. Restam apenas, em tão grande obra, a importante capacidade de sentir e os notáveis órgãos dos sentidos assignados a esse poder, com os quais Deus Ótimo Máximo quis prover a vida de todos os seres.

Na minha opinião, não pode encontrar-se nada que seja mais agradável do que eles, nem dar-se forma a algo mais útil, nem fazer-se algo mais bem organizado. A todos eles, colocou-os na cabeça, socorro de todo o corpo (com exceção do tacto, que existe em todos os seres e está presente em praticamente todas as partes do seu corpo), e, na sua parte mais alta, colocou os dois orbes dos olhos, como sentinelas de toda a vida dos seres, e aos quais, entre todos os órgãos dos sentidos (por opinião unânime de todos os filósofos), atribuiu o lugar principal com toda a justiça. Com efeito, se alguém observar com mais atenção a sua substância, forma, aspeto e função vital, dirá que, no meio de todas estas coisas perecíveis e efémeras, nada pode constituir-se mais sublime, apropriado, guarnecido e útil para a vida dos animais.

As pupilas dos olhos (às quais foi atribuída principalmente a capacidade de ver) são constituídas por uma emanação do cérebro, a saber: por um humor aquoso, ligeiramente congelado à maneira de um cristal, ao qual as *espécies* multiformes da

---

1 *Carta aos Romanos*, 1.20.
2 *Carta de Tiago*, 1.17.

lucis colorumque[2] species tenaciter haerere possunt. splendido atque perlucenti solaris iubaris (vt Plato in Timeo probat) mulcebrisque lucis participe, quo cuncta extra se ignea vi temporis pene momento colustrant[3]. Quum enim duplex sit ignis celestis facultas, edax altera | nimioque ardore peremptoria, altera innoxii luminis [S4v] fusiua, huius tantum oculorum vim participem esse, tum multorum animantium lucentes pupillae probant, tum etiam in nostris videre oculis, promptum est si quispiam obductis palpebris indice oculum in superna pellat. Huius autem humoris copia aut inopia oculorum uarii colores proueniunt. (vt Aristoteles Author est). Ob id etiam, non nulli acrius, alii hebetius confusiusque cernunt. De quibus alio post loco a nobis | fortasse copiosius dicetur. [O4r]

Nec vero negarim Aristoteli olfaciendi uim igneam, audiendi aeream, uidendi aqueam, tangendi vtque gustandi terream videri. Inter reliqua tamen sentiendi instrumenta, visumque hoc interest, quod hic actu lucem participat, eandemque persentiscit, splendicat et splendorem percipit, translucet et transparentia discernit, illa vero propriis qualitatibus adfecta, nonnunquam sensilia propria interstinguere prorsus nequeunt, quod euidentissime probat in aegris male affectus gustus. Visus preterea quum lucidus sit, celestisque substantiae particeps, purus et aqueus, illa magis terrea sunt, impurique elementi illuuie compacta; huius e cerebro ortus, illorum magis distans a ratiocinandi vi seiunctaque natura, vt plane constet hoc videndi instrumentum Ratiocinatiue[4] virtutis principem vicarium a natura institutum fuisse. Cui preter ingentes reliquas dotes, formam, figuramque celestium orbium, caelestis suae naturae indicem, miro artificio effecit; orbiculatam scilicet et vndique turbinatam in sphere perfecte speciem. | Cui figure nihil potest (Mathematicorum omnium atque Philosophorum sententia) fieri absolutius, quippe que in se infinita, nullisque terminis inclusa, reliquas omnes figuras capaci ambitu claudat et finiat, diuini instar numinis, quod immensa sua perfectione rebus omnibus modum mensuramque prefiniuit. Quidquid hac figura ad propulsandas obuenientium iniurias excogitari nil munitius potest, sua enim leuitate nihil subsultans atque inequabile continet, in quo infigi immorarique occursantium offendicula possint, sed primo statim impetu collabantur necessum est. Ob eam quidem rem inimiciora[5] sunt castra, quae in circuli speciem posita sunt, quam que quadrata, aut | alia rectilinea figura muniuntur. Iam in hac ipsa figura, quis non miretur tantam orbium uarietatem, tam appositum illorum ordinem, tam concordem [S5r] [O4v]

2 **colorumque** *S*, oculorumque *O*
3 **colustrant** *S*, collustrant *O*
4 **ratiotinatiue** *S*, ratiocinatiue *O*
5 **inimiciora** *S*, munitiora *O*

luz e das cores podem facilmente fixar-se com firmeza, com a participação do brilho e do esplendor do astro solar (como prova Platão no *Timeo*) e da suave luz diurna, que fazem com que todas as coisas exteriores [ao olho] sejam banhadas numa força ígnea num momento apenas; com efeito, uma vez que o poder do fogo celeste é de dois tipos, um voraz e mortífero por causa do excesso de calor, o outro difusivo e de uma luz inofensiva, não só as pupilas luzentes de muitos seres provam que o poder dos olhos só partilha deste último, mas também é fácil verificar este facto nas nossas [pupilas], se se fecharem as pálpebras e pressionar o olho com o dedo. As diversas cores dos olhos resultam da abundância ou carência deste humor (como afirma Aristóteles). Também por isso alguns veem com maior precisão, outros de forma mais esbatida e confusa. Sobre isto falarei noutro lugar mais abaixo e por acaso com mais pormenores.

Não nego que Aristóteles pensou que o poder do olfacto é ígneo, que o da audição é aéreo, o de ver, aquoso, o de tocar e degustar, térreo. Contudo o que distingue os restantes órgãos dos sentidos do da visão é isto: é que este partilha a luz em ato ao mesmo tempo que a sente, brilha e persente o brilho, transparece e discerne a transparência, ao passo que aqueles, afetados pelas suas próprias qualidades, não conseguem distinguir completamente os seus próprios sensíveis, como comprova claramente o paladar alterado nos doentes. Além disso, conquanto o olhar seja luminoso, participante da substância celeste, puro e aquoso, aqueles [sentidos] são mais térreos e feitos por agregação de sujidade do elemento impuro; este tem origem no cérebro, [ao passo que] a natureza daqueles está mais afastada e separada da capacidade do raciocínio, para que fique claro que o órgão da visão foi escolhido pela natureza para ser o principal representante da capacidade de raciocinar. A ele, além dos enormes dotes restantes, [a natureza] deu-lhe, com admirável arte, a forma e a configuração dos orbes celestes, indício da sua natureza celeste, ou seja, uma figura circular e arredondada de todos os lados à maneira de uma esfera perfeita. Nada se consegue fazer mais perfeito do que esta figura (de acordo com a opinião de todos os matemáticos e filósofos) uma vez que, sendo infinita em si mesma, e não sendo delimitada por extremidades, encerra e dá a fronteira de todas as restantes figuras com a capacidade do seu arco, semelhante ao divino Nume, que, com a sua imensa perfeição, determinou o modo e a medida de todas as coisas. Seja o que for que tenha esta figura, não se pode imaginar nada mais preparado para repelir os golpes dos objetos exteriores, uma vez que, pela sua lisura, não contém nenhuma saliência ou protuberância a que possam prender-se ou enganchar-se as irregularidades das coisas que vão ao seu encontro, forçadas, pelo contrário, a deslizar ao primeiro embate. Por essa razão são mais hostis os castros dispostos em forma de círculo do que os que são quadrados ou são fortificados numa outra figura retilínea qualquer.

Ora, quem não ficará surpreendido com a tão grande variedade de orbes com esta figura, com a tão apropriada disposição destas, com o tão concordante consenso

in actione consensum? Panditur extra firmior tunica perlucens, quam tenuior altera puriorque sed orbiculato foramento excauata sequitur, quam circumfluus transparens humor irrigat, post quem Cristalloides in minorem sphaeram tenuatur, quam demum amplior sustinet sphaerula tenuissima a cristalloide membrana discreta. Quibus omnibus tam variis tantoque ordine dispositis, videndi facultas mirabili vi, miraque celeritate perficitur, ita vt discernere nequeas, num propiora an magis distantia visus celerius assequatur, quo quicquid terrarum, quicquid maris, quicquid denique stelliferi orbis nostris oculis obiicitur, temporis puncto, et multo quidem celerius, quam primi mobilis latio (quod omnium ocyssime fertur) percurrit, | vt vel [S5v] in hac re, supra celestium orbium naturam attollatur, quum interea reliqua sentiendi instrumenta, dum sensilia lento tardoque gradu admouentur, torpeant. Quo fit vt sola uidendi facultas eminus sibi aliisque inimica preuideat, priusquam iniuria afficiatur, reliqua tamen Sensoria non prius nocua sentiunt quam inimica qualitate inficiantur. Quapropter et in supremam corporis partem prope sibi cognatum coelum luciferi oculorum orbes in sublime euecti sunt, vt procul occursantia prospicere, sibi atque toti animantium corpori prouidere possint; nam et longius ea videri possunt, que ex edito loco intuentur.

Quum ergo hos natura speculatores animantium vitae constituerit, nil mirum si tanta diligentia eos ab occursantium iniuriis munierit. Palpebris primum carneis | ob [O5r] id mollioribus, ne conniuentes oculorum teneritudini officerent, vtque his obductis contra offendentium impetus oculos tueantur. Cilia vero in directum ex porrecta ne oculum subductis palpebris impeterent, vtque minora insecta apertis oculis occursantia arcerent. Nil mirum si tot tunicis pupillam, in qua tandem visum perfici oportet, vestiuit atque tam variis, vt vel in his solis contemplandis diuini numinis summa prouidentia eniteat. Ad hec quis non admiretur tam concordem oculorum motum? Cum enim seiuncti sint atque ipsius nasi vallo discreti, vnico tandem spiritu in eandem partem semper moueri videntur, nunquam in diuersas, nisi vi quispiam colluctantes oculos alio impellat, sed vtriusque consensu in vnam tandem imaginem vno | impetu concurritur, vno ordine vti se res habet unicum spectrum exprimitur, [S6r] nisi extraneum aliquod obtutum resecauerit. Quamobrem accidere interdum solet, vt

na sua ação? Do lado de fora, estende-se uma túnica transparente mais rija; a esta segue-se uma outra mais ténue e mais pura mas escavada por uma abertura circular; à sua volta, espalha-se um humor transparente que a irriga; depois deste, o Cristalino rarefaz-se no interior de uma esfera menor; esta, finalmente, é sustentada por uma esferazinha mais ampla separada do cristalino por uma finíssima membrana. Por meio de todas estas coisas, tão variadas e dispostas de forma tão organizada, o poder da visão realiza-se com admirável força e incrível velocidade, a ponto de não se conseguir perceber se o raio visual atinge mais rapidamente as coisas que estão mais perto, ou as que estão mais longe; com ele, todas as partes da terra do mar e do orbe das estrelas se mostram aos nossos olhos num instante e muito mais velozmente do que o movimento que faz o primeiro móvel (que é a coisa mais veloz de todas), de tal forma que, só por isto, o olho se eleva acima da natureza dos orbes celestes, ao passo que os restantes órgãos permanecem sensíveis, movendo-se com passo lento e demorado e caindo no imobilismo. Daqui decorre que só o poder da visão consegue antever ao longe coisas que são prejudiciais para si e para os restantes [órgãos dos sentidos], antes de ser atingida por algum golpe, enquanto os restantes órgãos sensoriais não pressentem as coisas que lhes são nocivas antes de serem afetados por uma qualidade danosa. Também por esta razão, os lucíferos orbes dos olhos foram levados para o alto, para a mais elevada parte do corpo, perto do céu que é aparentado a eles: para que possam ver ao longe as coisas que vêm ao seu encontro e proteger-se a si próprios e ao corpo todo dos seres vivos; com efeito, conseguem ver-se de mais longe as coisas que se veem de um lugar alto.

Portanto, uma vez que a natureza os fez sentinelas da vida dos seres vivos, não é de admirar que os tenha protegido com tão grande diligência contra os impactos das coisas externas. Primeiro, [preparou-os] com pálpebras carnosas, mais moles para que, ao fechar-se, não magoassem a delicadeza dos olhos, e, depois de fechadas, protegessem os olhos dos golpes das coisas que os atingissem. Em segundo lugar, os cílios encontram-se estendidos a direito para não magoarem os olhos quando as pálpebras estão fechadas e para afastarem os pedaços de coisas mais pequenas projetadas contra os olhos, quando estes estão abertos. Não é de admirar que [a natureza] tenha coberto a pupila, na qual a visão se realiza, com tantas e tão variadas túnicas, de tal forma que só isto torna evidente a enorme providência do divino Nume. Além disto, quem não ficará admirado com um tão consonante movimento dos olhos? Apesar de estarem separados e afastados um do outro pela saliência do nariz, ainda assim parecem mover-se com o mesmo estímulo sempre para o mesmo sítio, e nunca para sítios diferentes (a não ser que alguém obrigue os olhos a apontar à força para sítios diferentes); pelo contrário, com acordo de ambos, aponta-se para a mesma imagem com uma investida, constrói-se um único retrato fiel da maneira como o objeto [avistado] se encontra, exceto quando algo exterior interrompe o olhar, razão por que costuma acontecer de tempos a tempos que [os olhos]

falsa imaginum representatione fallantur. Occurrente namque uisui terso aliquo atque minime peruio corpore (qualia sunt omnia fere specula), visus ob nimiam densitatem fractus flexusque repellitur, et rursus ad easdem partes impulsus remeat. Quod si in medium densius meabile tamen inciderit, penitius means offendente densiore vi oblique laxatus pererrat.

Hinc fit triplex illa videndi ratio. Aut per rectum visum et nusquam flexum radium, quam tuitionem Calcidius Platonici Timaei luculentissimus interpres vocat. Aut per repulsum a speculis flexumque radium, quam intuitionem. Aut in densiore medio solutum atque fractum, quam idem author detuitionem apellat. De quibus multa preclare atque eleganter cum Philosophi, tum Mathematici scripta reliquerunt; que Perspectiua Mathematices pars haud contemnenda magno cum fenore pertractanda sus|cepit. In qua multi apud Grecos, pauci apud Latinos excelluerunt. [O5v] Nam preter vnum Vitellionem sinuosa prolixitate fastidiosum, qui decem libris omnem videndi rationem complexus est, nihil apud Latinos lectione dignum reperi. Dudum tamen inter absolutissima Euclidis Mathematicorum Principis opera eiusdem Specularia et Perspectiua mira breuitate summoque ordine conscripta leguntur a Bartholomeo Zamberto Veneto Latinitate donata cum Theonis Mathematici Excellentissimi demonstrationibus, | sed tam confusis atque mutilis vel librariorum [S6v] negligentia, aut Greci codicis deprauatione, vt illas putem Theonem ipsum si superuiueret, non recogniturum. Nihil deinde ad Mathematicorum theorematum cognitionem illustrandam conducunt, quin potius omnem prorsus eorum intelligentiam, si his innitaris, subuertunt, adeo prestat nouas omnino excogitare, quam misere in malifidis traditionibus ingenium diu torquere. Quapropter postquam sub eruditissimo Philosopho atque Mathematico Petro Brisoo, Artium et Medicinae professore, puriores literas atque Mathematices rudimenta subodoratus sum, nihil antiquius habui, quam huic desertae ab omnibus Euclidem profitentibus parti sucurrere. Nec tamen ignoro haec elegantissime nostrum Brisoum excoluisse, sed eius Commentaria, nescio quo consilio, ita ab his, quibus elaborata sunt, supprimuntur, vt pauca tantum fragmenta confusa admodum ad nos peruenerint, a quibus cum saepe adiutus sum, tum saepius consulto discessi[6].

Itaque post Elementorum Euclidis interpretationem, qua frequenti ac[7] publico auditorio functus sum, hos duos Euclidis libros interpretandos

6 **discessi**, dicessi *SO*
7 **ac** *S*, et *O*

se enganem com uma falsa representação de imagens. Com efeito, caso um corpo polido e intransponível (como são praticamente todos os espelhos) se oponha ao olhar, este, quebrado e refletido por causa da densidade excessiva [desse corpo], é repelido e volta novamente para o mesmo lado de onde foi impelido; caso este incida num meio mais denso mas transitável, penetra no seu interior e avança estendendo-se obliquamente, porque uma força mais densa se lhe opõe.

Daqui decorre que a maneira de ver é tripartida: ou [se realiza] por meio de um raio direito e não fletido para qualquer lado, à qual Calcídio, intérprete muito lúcido do *Timeu* de Platão, chama *tuitio*; ou por meio de um raio repelido em espelhos e fletido, à qual chama *intuitio*; ou [por meio de um raio] dissipado e quebrado num meio mais denso, à qual o mesmo autor chama *detuitio*. Sobre elas, tanto Filósofos, como Matemáticos, deixaram muita coisa escrita de forma admirável e distinta, e a Perspetiva, uma parte não desprezável da matemática, encarregou-se de as estudar com excelentes resultados. Nela, sobressaíram muitos entre os Gregos, mas poucos entre os Latinos, pois à exceção de Vitelo apenas, fatigante pela sinuosa prolixidade, e que abarcou toda a doutrina da visão em dez livros, nada encontrei digno de leitura[3] entre os autores latinos. No entanto, desde há já algum tempo, entre as obras completas de Euclides, Príncipe dos Matemáticos, lêem-se as suas *Especulária* e *Perspetiva*, redigidas com admirável concisão e magnífica disposição, traduzidas para Latim pelo veneziano Bartolomeo Zamberto, com as demonstrações do distinto matemático Teão. Estas, contudo, estão tão confusas e mutiladas, seja por descuido dos copistas, seja por corrupção do códice grego, que penso que o próprio Teão não as reconheceria, se fosse vivo. Além disso, em nada contribuem para clarificar o entendimento dos teoremas matemáticos; antes pelo contrário, impedem completamente a interpretação destes se as tomares por base; [por isso] mais vale excogitar provas completamente novas, a atormentar o engenho excessivamente e durante muito tempo em tradições não fidedignas. Por isso, depois de ter estudado as letras mais puras e os rudimentos de matemática com o eruditíssimo filósofo e matemático Pedro Brissot, professor de Artes e Medicina, decidi que nada era mais prioritário do que socorrer a esta parte negligenciada por todos os que fazem de Euclides a sua profissão. Não desconheço o facto de que o nosso Brissot trabalhou cuidadosamente estas matérias, mas os seus comentários, não sei com que intenção, a tal ponto foram truncados por aqueles que os elaboraram, que apenas uns escassos fragmentos confusos chegaram efetivamente às nossas mãos; baseei-me neles muitas vezes, mas muito mais vezes decidi distanciar-me deles.

Portanto, depois da explicação dos *Elementos* de Euclides, que completei perante um auditório vasto e público, decidi interpretar estes dois livros de Euclides

3 Entenda-se: em contexto de aula.

nouisque demonstrationibus augendos suscepi. Quod vtrum presti|terim eruditorum lectorum iudicio relinquo. Ego certe hoc ambitu laboraui: vt nihil in his libris esset, quod ad Euclidem intelligendum desideraretur. Nec enim per hunc late campum euagari collibuit, multa tamen adieci sequentibus admodum necessaria, ne quid esset quod legentem in ipso operis cursu moraretur, que a principio exponere atque | ab aliis seiungere placuit, ne diuina Euclidis scripta nostris additionibus contaminarentur. Addidi etiam nostrum interpretis in demonstrationibus nomen, vt facilius nostra ab alienis interstinguantur[8], nostrumque in literariam Rem Publicam studium agnoscatur. Sed iam rem aggrediamur. [O6r] [S7r]

8 **interstinguantur**, interstingantur *SO*

e ampliá-los com novas demonstrações. Se me distingui em qualquer destas tarefas, deixo-o ao juízo dos leitores instruídos. Quanto a mim, trabalhei pelo menos com esta ambição: de que nada faltasse nestes livros, de que se sentisse falta para a compreensão de Euclides. Tão pouco me agradou divagar por este campo excessivamente; contudo, acrescentei muitas coisas absolutamente necessárias para o que vinha a seguir, para que não houvesse nada que demorasse o leitor no decurso da própria obra, coisas que decidi expor ao início e separá-las das demais, para que os divinos escritos de Euclides não fossem contaminados pelos nossos aditamentos. Também acrescentei às demonstrações o nosso nome de intérprete, para que mais facilmente se distinga o que é nosso do que é de outros, e o nosso zelo seja reconhecido na República das Letras. Passemos ao assunto.

COROLÁRIO À *PERSPETIVA* DE EUCLIDES

| Francisci de Mello De Videndi Ratione atque Oculorum Forma in Euclidis Perspectiuam Corollarium[1] [S7r, O6r]

Luciferis quidem oculorum orbibus videndi facultatem tributam esse, nemo ambigit, sed qua ratione illa perficiatur, a multis cum recentioribus tum antiquioribus Philosophis dubitatum, sumaque contentione disputatum est. Quare nonnulla a nobis hoc in loco obiter et perfunctorie de hac re disserenda sunt, non vt hanc ipse controuersiam (velut arbiter honorarius) sopiam, quam certum est a multis eruditissimis viris fuisse diligentius examinatam et sublimius tractatam, sed vt facilius argumentorum vim Aeruditus Lector estimare possit et iudicium, si ingenio magis valeat, promptius censuramque adhibere. Vnum hoc benignum lectorem admonere uelim, ne cuncta illa, quae a Philosophis complurimis sunt libris de videndi ratione complexa, a me in presenti digressione postulet, sed ea solum que | ad suscepti [O6v] operis intelligentiam mihi conducere videbuntur, neue a nobis expetat florulente atque composite orationis cincinnos, sed concisum Methamatice[2] breuitatis ordinem, cui tamen, reficiendi animi gratia, habenas nonnunquam laxauimus. Audiet autem nudam veritatem nul|lis verborum lenociniis fucatam. Quapropter [S7v] nonnulla a nobis forsan altius repetenda erunt.

Postulata postulatumque primum. *Atque imprimis[3] receptum esse oportet, omne naturale agens celerius atque fortius in propinquum quam in distans agere.*

Postulatum secundum. *Deinde visum simul cum lumine protendi, siue is ab oculis desiliat, siue a re visili[4] in oculos iacularetur. Nam et in tenebris videri quippiam[5] nequit, quod tamen luce illustratum visitur.*

Propositio prima. *Lumen in rectas lineas protendi.*

Argumento illud imprimis[6] esse potest, vbi solis radiis porta obiicitur, subtili exiguaque rimula in rectas perfecte lineas excauata, cui deinde altera e regione eque distans erigatur, equali atque consimili rima constans, cuius latera alterius rimule lateribus in directum exporrecta planis vtrimque parallelis extendantur, vtramque enim rimam Solis radii peruadunt, lumine nusquam in intercepta mediaque intercapedine declinante, lumine inquam primario.

1 **corollarium**, corrolarium *S*, corrollarium *O*
2 **methamatice** *S*, mathematicae *O*
3 **imprimis** *S*, in primis *O*
4 **visili** *S*, visibili *O*
5 **quippiam** *S*, quidpiam *O*
6 **imprimis** *S*, in primis *O*

Corolário à *Perspetiva* de Euclides, de Francisco de Melo, sobre a maneira de ver e a forma dos olhos

Ninguém duvida de que a faculdade da visão foi atribuída aos lucíferos orbes dos olhos, mas a maneira como ela se concretiza provocou dúvidas e discussões muito acaloradas entre muitos filósofos, tanto mais recentes como mais antigos. Por esta razão, devemos aqui expor algumas ideias sobre o assunto, de passagem e superficialmente, não para ser eu (como juiz superior) a colocar um fim à controvérsia, que foi, é certo, mais diligentemente examinada e mais bem explicada por muitos e muito eruditos homens, mas para que o Erudito Leitor mais facilmente possa avaliar o valor dos argumentos e mais prontamente possa apresentar o seu juízo e crítica, caso seja mais eminente pelo seu engenho. Gostaria de sugerir ao Benevolente Leitor apenas isto: que não exija de mim, nesta digressão, tudo o que foi abordado por tantos Filósofos nos livros [que escreveram] sobre a maneira de ver, mas apenas aquilo que me parece haver de contribuir para a compreensão da obra que me propus levar a cabo, e que não nos peça os ornamentos próprios de um discurso floreado e composto, mas o arranjo conciso, próprio da brevidade matemática, ao qual, por vezes, aliviámos as correntes, para refazer o espírito [do cansaço]; no entanto, ouvirá a verdade nua e sem estar disfarçada por quaisquer enfeites retóricos. Para isso, talvez tenhamos de retomar algumas coisas mais de trás.

Postulados e postulado primeiro. *Em primeiro lugar, deve aceitar-se que todo o agente natural age mais rapida e vigorosamente para com o que está próximo do que para com o que está distante.*

Postulado segundo. *De seguida, que o raio visual se estende com a luz – quer ele proceda do olho [para os objetos], quer seja lançado do objeto visível para os olhos – pois não se consegue ver no escuro aquilo que se vê quando exposto à luz.*

Proposição primeira. *Que a luz se estende em linhas retas.*

Logo à partida, serve de argumento o seguinte: quando se põe uma porta diante dos raios do sol, estando escavada [nela] uma fenda estreita e fina com linhas perfeitamente retas, e, em seguida, do lado oposto, se puser outra [porta] paralela [à primeira] contendo uma fenda igual e semelhante, e se os lados desta [fenda] forem postos no prolongamento dos lados da primeira e forem estendidos para ambos os lados em planos paralelos, os raios do Sol atravessam ambas as fendas, e a luz não se desvia para nenhum lado no intervalo que se encontra entre as duas (refiro-me à luz primária).

Propositio secunda. *Visus in rectas porriguntur lineas.*
Nam ex secundo huius postulato, visus simul cum lumine permeat. Semper autem ex praemissa, in rectas lineas lumen profun|ditur, quare et visus in rectas lineas extendi necessum est. [O7r]

Visum autem tantisper, quum nondum de hac controuersia definitum fuerit, id voco, quod[7] inter oculum remque visilem intercidit, quod tum lucis, tum colorum imagines exprimit.

| **Propositio tertia.** *Visus recti et nusquam flexi quibus res aliqua cernitur ad oculum remque visam eodem ordine deferuntur.* [S8r]
Nam qui fieri possit, vt oculus partium situm ordinemque dignosceret, nisi idem in re visa atque oculo visuum positus seruaretur (nempe que oculi dextre parti occurrunt dextra: que vero sinistre sinistra videntur)? Quum ergo res non aliter recto visu, quam vti sita est videatur, necesse est, vt secundum eundem ordinem ad oculum remque uisam uisus incedant. Alioqui non video, cur in re uisa, atque in eius intuitione partium situs non permutetur.

Visum autem rectum in proposito appello, qui nusquam densiore medio offendente flectitur. Certam autem visionem, qua partium situs internoscuntur.

Propositio quarta. *Vnico visu signum vnum rei uisilis certa visione intuetur.*
Alioqui, si ex uno signo plures visus ad oculum mearentur quibus illud certa visione dignosceretur, idem dextrum leuumque videretur. Quum preterea ex qualibet vise rei particula in quamcumque oculi partem recta linea produci possit et per illam eiusdem imago profundi, atque ob id ex pluribus signis in eandem oculi partem complures visus diffundi, multa simul rei vise signa in eadem parte sentirentur, visilisque rei partes confuse simulque admixte cernerentur. Atqui suppositum est rem particu|tim et distincte videri. Vnico igitur visu. [O7v]

| **Propositionis quinte lemma primum.** *Si in spheram a signo extra ipsam dato plures lineae producantur, que per centrum acta est vna et sola in conuexam circunferentiam perpendicularis incidit minima.* [S8v]

---

7 **quod** *S*, rep. *O*

Proposição segunda. *Os raios visuais estendem-se em linhas retas.*
De acordo com o segundo postulado deste [tratado], o raio visual viaja com a luz. Mas, pela [proposição] anterior, a luz difunde-se sempre em linhas retas; por esta razão, é forçoso que o raio visual também se estenda em linhas retas.

Quanto ao raio visual (como ainda não foi definido no decurso desta discussão), designo assim aquilo que cai entre o olho e a coisa visível, e que reproduz as imagens, tanto da luz, como das cores.

Proposição terceira. *Os raios visuais retos e não fletidos por meio dos quais se vê alguma coisa estendem-se para o olho e para a coisa vista pela mesma ordem.*
Como poderia suceder que o olho distinguisse o sítio e a ordem das partes, se não se mantivesse a mesma posição dos raios visuais no objeto e no olho (a saber: as coisas que estão do lado direito do olho veem-se à direita e as que estão à esquerda, veem-se à esquerda)? Uma vez que o objeto não se vê por meio de um raio reto num sítio diferente daquele em que se encontra, então é necessário que os raios visuais caiam no olho e no objeto avistado pela mesma ordem, caso contrário, não percebo porque é que o sítio das partes [de um objeto avistado] não seria diferente no objeto visto e na visão [que dele formamos].

Aqui, chamo «raio visual reto» ao que não se flete por choque com um meio mais denso, e [chamo] «visão certa» àquela por meio da qual se distingue o sítio das partes.

Proposição quarta. *É com um único raio visual que se vê um ponto de um objeto visível com visão certa.*
Caso contrário, se de um ponto [do objeto] viessem para o olho vários raios visuais por meio dos quais ele se distinguisse com visão certa, o mesmo ver-se-ia à direita e à esquerda. Além disso, como se pode traçar uma linha reta de qualquer partícula do objeto visto para qualquer parte do olho, e a imagem daquela [parte] se difunde por meio desta [linha], e como, por esta mesma razão, vários raios visuais se difundem a partir de muitos pontos para a mesma parte do olho, então muitos pontos do objeto avistado seriam percecionados em simultâneo na mesma parte [do olho] e as partes do objeto visível seriam vistas ao mesmo tempo, confusas e misturadas. Mas admitiu-se que um objeto se vê por partes e distintamente. Logo, por meio de um único raio visual etc.

Lema primeiro da proposição quinta. *Se se traçarem várias linhas para uma esfera a partir de um ponto dado fora dela, a que se traça pelo centro é a única que cai perpendicular à circunferência convexa, e é a mais pequena.*

Esto enim sphera, cuius centrum .a. per secundam primi Theodosii, in sublime vero .b. signum, a quo plures recte linee producantur, .bag. per centrum, .bf. vero preter centrum .a., secet autem recta linea .bag. conuexam superficiem in signo .c. proposite sphere, cauam vero in .g. signo.

Dico imprimis[8] .bc. perpendicularem esse super datam spheram. Notentur enim semicirculi, in quos maior circulus per .adf.[9] signa transiens dispescitur. Cum enim .abf. triangulus in vno sit plano per secundam vndecimi, si illud extendatur. quousque spheram secet, communis sphere et plani .baf. sectio, per primam et sextam primi Theodosii, erit circulus maior. Sint ergo semicirculi duo .cdg. et .cfg. Erit igitur per plures diffinitiones tertii Elementorum angulus .dca. equalis angulo .fca. Quare reliqui .bcd. et .bcf. equales erunt. Eadem erit in quibuscumque aliis ostensio. Cum ergo .bc. recta linea vtrimque supra spheram equales angulos constituat, erit .bc. supra eandem perpendicularis.

Dico secundo .bc. minimam esse. Producatur enim quecunque preter centrum, vt .bf., atque connectantur .af. extendaturque .abf. planum. Erit eius cum sphera communis sectio circulus maior, vt prius demonstratum est, eiusque centrum per sextam

8 **imprimis** *S*, in primis *O*
9 **.adf.**, .abf. *SO*

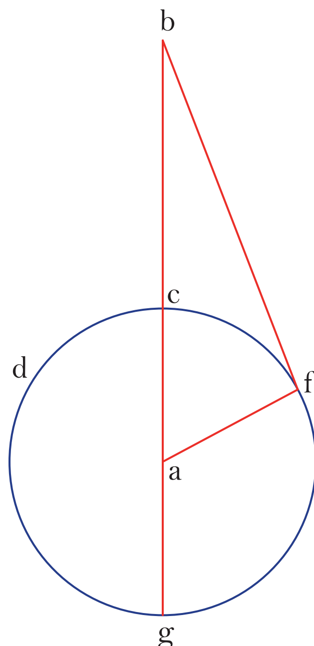


Fig. 1

[Fig. 1] | Seja uma esfera com centro A, pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio. Seja B um ponto no alto, a partir do qual se estendam várias linhas retas: BAG pelo centro e BF fora do centro A, e que a linha reta BAG corte a superfície convexa da esfera dada no ponto C, e a superfície côncava no ponto G.

Afirmo, em primeiro lugar, que BC é perpendicular à esfera dada. Assinalem-se os semicírculos em que se divide o círculo maior que passa pelos pontos ADF –pois, como o triângulo ABF se encontra num plano pela segunda [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], se ele se estender até cortar a esfera, a interseção da esfera e do plano BAF será um círculo maior, pela primeira e pela sexta [proposições] do primeiro livro de Teodósio. Sejam CDG e CFG os dois semicírculos. Então, por diversas definições do terceiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo [misto] DCA será igual ao ângulo [misto] FCA. Por isso, os restantes [ângulos mistos] BCD e BCF serão iguais. A prova será igual em qualquer outro caso. Logo, como a linha reta BC faz ângulos iguais na esfera para ambos os lados, BC será perpendicular à esfera.

Afirmo em segundo lugar, que BC é a [linha] mais pequena. Trace-se uma [linha reta] qualquer fora do centro, como BF; ligue-se A a F, e estenda-se o plano ABF. A sua interseção com a esfera será um círculo maior, como antes se demonstrou, e o seu centro será o mesmo que o da esfera, pela sexta [proposição] do

primi Theodosii idem quod et sphere. Quum ergo a signo extra circulum dato producantur in conuexam circunferentiam, .bc. quidem per centrum .bf. vero preter centrum, erit per nonam tertii | Elementorum .bc. minor ipsa .bf. Eadem prorsus est in omnibus ostensio. | Quare si in spheram. **[O8r]** **[S9r]**

Corollarium. *Hinc patet ex quolibet signo extra spheram vnicam tantum in sphere conuexam circunferentiam perpendicularem produci posse.*

Eiusdem lemma secundum. *A dato signo in sublime in subiectum planum plures produci recte linee possunt vnica tamen perpendicularis omnium minima.*
Esto enim subiectum planum .bcd. signum autem in sublime .a. a quo in subiectum .bcd. planum plures recte linee producantur, vt puta .ae. et .af.[10], estoque .ae. per vndecimam vndecimi Elementorum perpendicularis.

Dico primo ex .a. signo in subiectum .bcd. planum non posse aliam perpendicularem agi. Sin minus, sit vt .af. connectanturque .ef. signa. Erunt igitur per secundam deffinitionem vndecimi bis

10 **.af.,** .aef. *S*, .ef. *O*

primeiro [livro] de Teodósio. Como, de um ponto dado fora do círculo para a circunferência convexa, se traçam BC pelo centro, e BF fora do centro; [então,] pela nona [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*, BC será menor do que BF. A prova será a mesmíssima em todos os casos. Por esta razão, se, para uma esfera [etc.].

Corolário. *Daqui se segue que se pode traçar apenas uma perpendicular para a circunferência convexa de uma esfera a partir de um ponto qualquer fora da esfera.*

Lema segundo da mesma [proposição quinta]. *Podem traçar-se várias linhas retas de um ponto dado no alto para um plano subjacente, mas apenas uma perpendicular, que é a mais pequena de todas.*

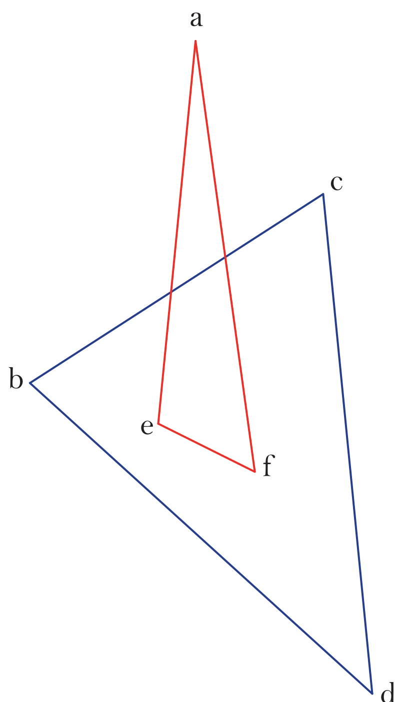


Fig. 2

[Fig. 2] | Seja BCD um plano subjacente e A um ponto no alto, a partir do qual se tracem, para o plano subjacente BCD, muitas linhas retas, como por exemplo AE e AF. Seja AE perpendicular, pela undécima [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*.

Afirmo, em primeiro lugar, que não se pode traçar outra perpendicular do ponto A para o plano subjacente BCD. Caso contrário, seja AF [outra perpendicular] e ligue-se os pontos E a F. Pela segunda definição do undécimo [livro dos *Elementos*] duas vezes

repetitam duo anguli qui ad .e. et .f. in triangulo recti, quod est impossibile per decimam sextam primi elementorum. Non est igitur .af. perpendicularis.

Dico secundo .ae. minimam esse. Producatur enim quecumque in subiectum planum. vt .af. Dico .af. longiorem esse ipsa .ae. In triangulo enim .aef. angulus qui ad .e. rectus est maior est. Igitur angulo qui ad .f.[11] per sextam decimam primi. Quare per decimam nonam eiusdem erit .af. maior quam .ae. Quod demonstrare oportuit.

Propositio quinta. *Certa atque distincta visio non nisi perpendiculariter incidentibus in oculum radiis perficitur.*

Quecunque de videndi ratione hoc in loco dixerimus, de illa | solum intelligi volo, [O8v] que per rectos visus atque nusquam re|flexos confit, quam Calcidius, vt antea [S9v] dictum est, tuitionem appellauit. Iam propositio probatur.

Ex quocumque enim signo, vt in premissa demonstratum est, vnus tantum visus oculo occurrit, quo certa atque distincta visione, id signum intuetur. Atque ex pluribus signis ad eandem oculi partem, plures visus deferuntur, vnus autem tantum ex premissis lemmatis perpendicularis atque breuissimus peruenit. Qui ex primo huius postulato ob id fortissimus est. Ille igitur tantum oculum permouet, maiore scilicet vi debiliorem vincente. Item tametsi ex eodem signo plures ad oculum radii deferantur, quia tamen, vt demonstratum est, perpendicularis fortissimus est, ille tantum eius signi imaginem exprimet, nam et omne naturale agens quam breuissima via potest in passum agit. Certa itaque atque distincta.

Propositionis sexte lemma. *Si plano alicui recta linea paralela fuerit et ab eius terminis in subiectum planum bine perpendiculares agantur equale vtrobique interuallum concludent.*

Paralelam rectam lineam plano alicui dicimus, per quam extensum planum atque in subiectum aliud planum procumbens communem vtriusque sectionem eidem paralelam efficit.

Esto igitur plano .cde. recta linea .ab. paralela atque ab eius terminis[12] .ab. in subiectum .cde. planum bine perpendiculares .af. et .bg. producantur per vndecimam vndecimi bis repetitam. Erit igitur per sextam eiusdem .af. et .gb. paralele, atque per deffinitionem in eodem plano, cuius communis sectio cum .cde. plano erit .fg. que paralela est ipsi .ba., per diffinitionem statim positam, et hypotesim. Paralelogramum igitur est .abgf. atque per trigesimam tertiam primi Elementorum .ab. ipsi .fg. equalis erit. Quod demon|strandum erat. [S10r]

11 **.adf.,** .abf. *SO*
12 **terminis,** terminus *SO*

tomada, os dois ângulos no triângulo, em E e em F, serão retos, o que é impossível, pela décima sexta do primeiro dos *Elementos*. Logo, AF não é perpendicular.

Afirmo, em segundo lugar que AE é a mais pequena de todas. Trace-se uma [reta] qualquer para o plano subjacente, seja AF. Afirmo que AF é mais comprida do que AE. No triângulo AEF, o ângulo em E é reto; portanto, é maior do que o ângulo em F, pela décima sexta do primeiro [livro dos *Elementos*]. Por esta razão, pela décima nona do mesmo, AF será maior do que AE. O que se quis demonstrar.

Proposição quinta. *A visão certa e distinta não se concretiza senão por meio de raios que incidem perpendicularmente no olho.*

Tudo o que dissermos neste lugar sobre a maneira de ver, quero que se entenda apenas daquela [visão] que se produz por meio de raios visuais retos e não fletidos, a que Calcídio chamou *tuitio*, como antes se disse. Prova-se a proposição de seguida.

Como se demonstrou na [proposição] anterior, a partir de um ponto qualquer, é apenas um o raio visual que avança para o olho e por meio do qual se vê esse ponto com visão certa e distinta. Mas, a partir de muitos pontos, chegam muitos raios visuais à mesma parte do olho; porém apenas um é perpendicular e mais pequeno, pelos lemas anteriores. Este é, por isso, o mais forte de todos, pelo primeiro postulado deste [tratado]. Portanto, apenas ele afecta o olho, a saber: porque uma força maior vence uma mais débil. Do mesmo modo, ainda que, do mesmo ponto, vários raios cheguem ao olho, contudo, uma vez que o perpendicular é o mais forte (como se demonstrou), [então], apenas esse reproduz a imagem desse ponto, pois todos os agentes naturais agem pela via mais curta para com o paciente. Então, com visão certa e distinta.

Lema da proposição sexta. *Se uma linha reta for paralela a um plano e se, das suas extremidades, se traçarem duas perpendiculares para o plano subjacente, [elas] encerrarão um intervalo igual dos dois lados.*

[**Fig. 3**] | Dizemos que uma linha reta é paralela a um plano, quando um plano que se estende por ela e cai noutro plano subjacente, faz uma interseção entre ambos que é paralela à primeira [linha reta].

Seja AB uma linha reta paralela ao plano CDE. Das suas extremidades A e B, tracem-se duas perpendiculares, AF e BG, para o plano subjacente CDE, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*] duas vezes tomada. Pela sexta do mesmo, AF e GB serão paralelas, e, por definição, estarão no mesmo plano, cuja interseção com o plano CDE será FG, que é paralela a BA, pela definição posta imediatamente acima e por hipótese. Portanto, ABGF é um paralelogramo e, pela trigésima terceira do primeiro dos *Elementos*, AB será igual a FG. O que se queria demonstrar.

| **Propositio sexta.** *Oculum orbicularis figure esse oportuit.* [O9r]
Sin minus, et figure alicuius plane formatum esset, non posset obliquam aliquam longitudinem ipso maiorem eique paralelam intueri, quod plane falsum esse constat. Quum enim per quintam huius radiis tantum perpendicularibus quecunque res cernantur, at ex premisso Lemmate huius in subiectum planum perpendiculares equale spacium intercipiant, non poterunt visus aliqui ipso oculo maiorem rem intercludere neque ob id cernere.

Obliquam longitudinem hoc in loco vocamus plano proposito paralelam.

Accedit quod ipsi oculo, qui reliquis Sensoriis multo plura (vt Author[13] est Aristoteles) sensilia discernit, figura omnium capacissima; orbiculata scilicet, debetur. Nam preter tactum huiusmodi, alia fere sentiendi[14] instrumenta visuntur: Gustui namque palatum affabre cameratum, Auditui cauas atque in orbem effigiatas aures, Olfactui binos, Nasi meatus, et quidem aliquantulum cauos, natura constituit.

---

13 **Author** *S*, autor *O*
14 **sentiendi** *S*, sensitiendi *O*

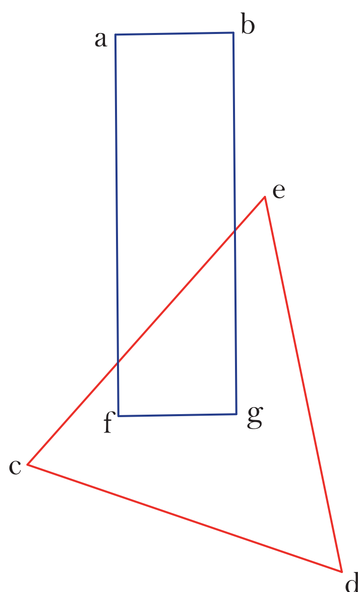


Fig. 3

Proposição sexta. *É forçoso que o olho tenha forma orbicular.*
Caso contrário, se tivesse a forma de uma figura plana qualquer, não seria possível ver-se um comprimento oblíquo maior do que ele e a si paralelo, o que se verifica ser completamente falso. Uma vez que qualquer objeto se vê apenas por meio de raios perpendiculares, pela quinta [proposição] deste [tratado], e as perpendiculares a um plano subjacente encerram um espaço igual, pelo lema desta [proposição] apresentado anteriormente, nenhuns raios poderão abarcar (nem, pela mesma razão, ver) um objeto maior do que o olho.

Neste passo, chamamos «comprimento oblíquo» à [reta] paralela a um plano dado.

A isto acresce o facto de que a figura mais capaz de todas – a saber: a [figura] orbicular – é apropriada para o olho, que discerne muito mais sensíveis do que os restantes [orgãos] sensoriais (como afirma Aristóteles). Com efeito, tirando o tacto, vê-se que os outros orgãos dos sentidos são assim: a natureza constituiu, para o gustativo, um palato artisticamente abobadado; para o auditivo, orelhas curvas e moldadas circularmente; para o olfativo, os dois canais do nariz, também eles um pouco arredondados.

Propositio septima. *Visus non continua serie sed discreta meant.*
Acum siquidem in pauimento prolapsam siquis accuratius inuestiget nullo prorsus intercedente offendiculo, quando plura alia citra vltraque, leua atque dextra, intuentur, non statim inueniet, quum tamen e re visili[15] quecunque inter ea que tunc videntur interciderint imagines ad oculum emittantur. Sed oculo singula percurrenti, dextra leuaque moto, quum primum uisus illam attigerit, ea protinus inuenitur. Constat ergo non prius visum ad eam peruenisse, quum tamen vtrimque visus alii nonnulla discernerent. Visus igitur interuallo dis|iuncti feruntur, quemadmodum [S10v] et pili ex vno capillorum equamento dispalati aut arboris propagines ex vna radice | [O9v] vnoque principio dependent.

Sed statim acrius Peripateticus aliquis obstrepet, quoniam si visus non essent continui, sed interuallo aliquo ab inuicem distarent, iam aliquid videretur, cuius nulla prorsus pars intima perspecta esset, id scilicet in cuius extimos terminos proximi visus procumberent, eius nanque interiectas partes nullus contingit visus. Quod si illi forsan benigne condonetur, rursus vrget sentiri aliquam magnitudinem, cuius nulla omnino interiecta pars sentiatur, quod denuo illi lubens annuo, nam et argile procul ageres[16] cernuntur, quum interea ex tanto interuallo nulla eius pars intuetur. Quippe quae ex tanto interuallo cerni nequeat.

Propositionis octaue lemma. *Si a rei cuiuspiam vise terminis duo visus equales perpendiculariter oculo occursant, quicunque[17] a signis intermediis perpendiculares ad eundem oculum deferuntur inter eos incidunt, illisque sunt breuiores.*
Esto enim vt est a nobis propositione sexta demonstratum oculus quispiam cuius centrum .a., res autem visa .bc. a cuius terminis bini perpendiculares visus agantur .bda. et .cea. per corollarium primi lemmatis quinte huius. Erit ergo triangulum .bac. quod oculi spheram secabit, eiusque communis sectio erit circulus, vt sepe a nobis prius demonstratum est. Sit ergo .fde. circulus recte autem linee .ba. et .ac. equales, interque .b. et .c. suscipiatur contingens signum .g. Connectanturque .ga. Manifestum est ex primo lemmate quinte huius .ga. perpendicularem esse supra oculum, nec posse aliam perpendicularem ex .g. signo in eundem oculum produci. Secet igitur utcunque circulum .fhe. ipsa autem .ba. circu|lum .fde. secet | in .d. ipsa autem .ac. [S11r] [O10r]
eundem secet in .e. signo.

---

15 **visili** *S*, visibili *O*
16 **ageres** *S*, aggeres *O*
17 **quicunque** *S*, quecunque *O*

Proposição sétima. *Os raios visuais não avançam numa série contínua, mas numa série discreta.*
Se alguém procurar uma agulha que caíu ao chão com mais atenção, não havendo qualquer obstáculo de permeio, mas vendo-se muitas outras coisas, umas mais para cá ou mais para lá, e outras mais para a esquerda e mais para a direita, não a encontrará imediatamente, apesar de serem emitidas imagens para o olho a partir da coisa visível, seja ela qual for de entre as que se veem naquele momento. Mas, se o olho se mover e percorrer cada uma das coisas [que se encontram] à direita e à esquerda, assim que o raio lhe toca, logo a encontramos. Portanto, é claro que o raio não chegou a ela antes, apesar de outros raios terem visto algumas coisas em seu redor. Portanto, os raios visuais avançam separados por um intervalo, tal como os cabelos se separam a partir de uma raíz capilar e os rebentos de uma árvore brotam de uma raíz e de uma origem [comum].

Mas já algum Peripatético protestará mais acérrimamente, porque, se os raios não fossem contínuos, mas estivessem separados por alguma distância entre si, seria possível ver-se um objeto, sem ser vista nenhuma das suas partes internas, ou seja, [não se veria] aquilo em cujos limites extremos caíssem os raios visuais vizinhos, pois [neste caso] nenhum raio visual chega[ria] às partes intermédias. No caso de benevolamente se lhe conceder este facto, imediatamente voltará a objetar que então se apreende uma dada grandeza sem que se apreenda absolutamente nenhuma das suas partes intermédias, o que lhe concedo mais uma vez, pois também vemos ao longe amontoados de terra, apesar de não discernirmos nenhuma das suas partes a uma tão grande distância, porque não a conseguimos ver a tão grande distância.

Lema da proposição oitava. *Se, das extremidades de um objeto avistado qualquer, dois raios visuais iguais avançarem perpendicularmente para o olho, os [raios] que se estendem perpendicularmente para o mesmo olho a partir dos pontos intermédios [do objeto] caem [no olho] entre os primeiros e são mais curtos do que eles.*

[Fig. 4] | Como demonstrámos na sexta proposição [deste tratado], seja um olho com centro A, e BC o objeto avistado, de cujas extremidades se tracem os dois raios visuais perpendiculares BDA e CEA, pelo corolário do primeiro lema da quinta [proposição] deste [tratado]. Então, BAC será um triângulo que corta a esfera do olho, e a interseção dele [com a esfera] será um círculo, como demonstrámos antes diversas vezes. Seja FDE o círculo. Sejam BA e AC linhas retas iguais. Entre B e C, tome-se o ponto contingente G. Ligue-se G a A. É evidente, pelo primeiro lema da quinta [proposição] deste [tratado], que GA é perpendicular ao olho, e que não pode traçar-se outra perpendicular para o mesmo olho a partir do ponto G; corte, portanto, o círculo FHE em algum sítio. BA corte o círculo FDE em D, e AC corte o mesmo círculo no ponto E.

Dico ergo in primis ipsam .ga. secare circulum .fde. inter .d. et .e. signa. Sin minus si secaret vt in .f. ipsa .ga. ipsi .ba. bis occurreret, atque ob id due recte linee .ba. et .ga. superficiem concluderent, quod est impossibile. Ipsa igitur .ga. inter .d. et .e. cadit atque oculum secat vt secet in .h. Dico ipsam .gh. minorem esse ipsa .bd. Quoniam enim triangulum est .bac. isosceles, igitur per quintam primi Elementorum anguli qui ad .b. et .c. equales sunt ad inuicem. Vterque igitur per decimam sextam eiusdem recto minor est. Rursus quoniam in triangulo .gac. producitur latus .cg. in .b. angulus ergo .bga. per eandem maior est angulo qui ad .c. Maior igitur etiam erit angulo qui ad .b. Quare per decimam octauam primi .ba. ipsa .ag. maior est quoniam in triangulo .bag. maiori angulo opponitur. A quibus demptis .da. et .ah. equalibus per quindecimam diffinitionem primi relinquitur .bd. maior ipsa .gh. Eadem est in aliis ostensio. Si ergo.

Propositio octaua. *Videndi ratio perficitur, quoties intimo oculorum effluuio prodeuntes radii agnato lumini coherent, inque rem visilem meantes, eius attactu repulsi coloratique, rursus ad oculos remeant.*

Hoc theorema huius contentionis cardinem uersat, quare a nobis hoc loco latius explicandum erit.

In oculos igitur rei visilis imaginem aut speciem (vt modo loquuntur) impingi Aristoteles cum presenti Philosophorum omnium schola asseuerat, et Mathematici non contemnendi affirmant inter quos Vitello et Halacem, hic experimentis, ille rationibus, hanc probare sententiam magnopere contendunt. Nec ratio prorsus refragatur. Nam et oculus | in re uisa nonnunquam | oblectatur interdum dolet et [S11v]
molestia afficitur. Nam viridi colori, [O10v]

Fig. 4

Afirmo, em primeiro lugar, que GA corta o círculo FDE entre os pontos D e E. Caso contrário, se o cortasse em F, a reta GA encontraria [a reta] BA duas vezes e, portanto, as duas linhas retas BA e GA encerrariam uma superfície, o que é impossível. Então, GA cai entre D e E e corta o olho, corte-o em H. Afirmo que GH é menor do que BD. Como BAC é um triângulo isósceles, então pela quinta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, os ângulos em B e em C são iguais entre si. Então, cada um deles é menor do que um reto, pela décima sexta do mesmo. Novamente, uma vez que no triângulo GAC se prolonga o lado CG para B, então, o ângulo BGA é maior do que o ângulo em C, pela mesma [proposição dos *Elementos*]. Portanto, também será maior do que o ângulo em B. Por esta razão, pela décima oitava do primeiro, BA é maior do que AG, porque, no triângulo BAG, ele se opõe ao ângulo maior. Subtraídos destes [lados] os segmentos DA e AH, iguais pela décima quinta definição do primeiro, resta BD maior do que GH. A prova será igual nos outros casos. Logo, se etc.

Proposição oitava. *A maneira de ver concretiza-se sempre que os raios, ao progredir por eflúvio interno dos olhos, formam uma unidade com a luz, que é aparentada com eles, avançam até ao objeto visível, e regressam aos olhos depois de terem recebido cor e terem sido repelidos pelo contato com ele.*
Este teorema trata de um ponto essencial desta discussão, razão por que teremos de o explicar aqui mais amplamente.

Que a imagem ou *espécie* (como se diz) do objeto visível atinge os olhos, assegura-o Aristóteles em conjunto com todos os filósofos da atualidade, e afirmam-no matemáticos não desprezáveis. Entre estes, Vitelo e Alhacen esforçam-se por provar esta ideia com grande insistência; este, por meio de experimentações; aquele, por meio de argumentos. O argumento não repugna totalmente. O olho sente por vezes prazer num objeto, outras vezes sente desconforto e experiencia dor. Sorri com

et cianneo molliter arridet, contra candicantem atque splendentem aspernatur et refugit. Dolet item nimia luce collustratus, cum tamen moderatam auidius prosequatur, que neutique acciderent, nisi oculorum acies pro modo et obiectorum qualitate inficerentur. Quam ob rem vbi quis diutius solis fulgorem aut colorem aliquem splendicantem sit intuitus, et subito oculos ad tenebras aut alborem aliquem conuertent, et lucem secernere arbitrabitur, et priorem quae viderat colorem intueri, nondum scilicet visi luminis atque coloris vestigio abeunte. Constat ergo et lucem ipsam atque colores in visum agere propriasque imagines exprimere.

Verum ex oculis luciformes radios effluere multorum animantium noctu collucentes oculi pupilleque probant. Cui sententiae omnium Platonicorum consessus, atque imprimis[18] ipsius diuini Platonis in Timeo, Euclidis quoque hoc in loco Authoritas, inuictaque rationis vis atque prerogatiua suffragatur, est enim in premissa ostensum visus non continua serie sed disiuncta interuallo quodam deferri, quod fieri non posset nisi ex oculis ordinati discriminatique visus prodirent. Esto enim vt ab oculo .a. In subiecto pauimento notentur, vt in praemissa demonstratum est, signa .bc. leua et dextra citra vero atque vltra .ed., demissa in pauimentum acus .fg. que conquirebatur atque nondum inuenta est, intercipitur enim inter .ba. et .ca. visus, perque ipsa .fg. signa, vt plerumque accidere solet, recta linea protendatur, quousque occurrat .ba. et .ca. visibus, sitque recta linea .bfgc., ipsique visus .ba. et .ac. equales.

18 **imprimis** *S*, in primis *O*

agrado às cores verde e azul; pelo contrário, rejeita e reage contra o que é branco e brilhante. Do mesmo modo, sente dor quando iluminado por luz excessiva, ao passo que procura mais avidamente a [luz] moderada, o que não aconteceria se a menina do olho não fosse afetada pelo modo e qualidade dos objetos. Por esta razão, quando alguém observa prolongadamente o fulgor do sol ou uma cor resplandecente e de repente vira os olhos para a escuridão ou para uma alvura, pensará que separou a luz e que vê a cor que vira anteriormente; ou seja, que a impressão da luz e da cor avistada ainda não desapareceu. Portanto, é evidente que a própria luz e cores agem para com o raio visual e exprimem as próprias imagens.

Por outro lado, que raios luciformes fluem dos olhos, provam-no os olhos e pupilas de muitos seres vivos que brilham no escuro. São a favor desta opinião o conjunto de todos os Platónicos e, em primeiro lugar, a autoridade do próprio divino Platão, no *Timeu*, e de Euclides, nesta obra, e a invicta força e prerrogativa da razão, pois na anterior [proposição] se mostrou que os raios visuais não se estendem numa série contínua mas numa série separada por um intervalo, o que não poderia suceder a não ser que os raios visuais avançassem a partir dos olhos, ordenada e discretamente. | Avancem, por exemplo, a partir do olho A. No pavimento subjacente, como se demonstrou na [proposição] anterior, assinalem-se os pontos B e C à esquerda e à direita, e os pontos E e D para cá e para lá, e a agulha FG, caída no pavimento, que se procura sem ser achada por se encontrar entre os raios visuais BA e CA. Pelos pontos F e G, como se faz sempre, estenda-se uma linha reta até encontrar os raios visuais BA e CA, e seja a linha reta BFGC; sejam os raios visuais BA e AC iguais.

[Fig. 5]

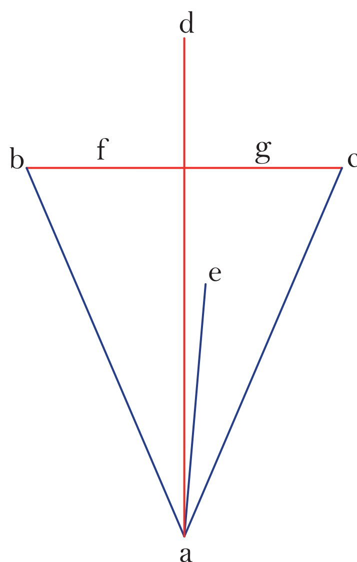


Fig. 5

Manifestum est ex premisso huius lemmate ex .f. et .g. signis perpendiculares productas ad oculum .a. | inter ipsas .ba. et .ac. extendi atque iis esse breuiores. [S12r, O11r] Quare per primum huius postulatum fortior erit actio a signis .fg. quam a signis .bc. in oculum. Igitur a signis .fg. imagines eiaculantur maioris uirtutis quam a signis .bc. Quod si visio tantum per has perficitur, cur .fg. non videtur quoties et .bc.? Quod si forsan ad ipsius .fg. paruitatem refugias nunquam ea ex tanto interuallo videretur: atqui inquirentis oculus vtrimque motus ex tanto aut etiam maiore nonnunquam interuallo .fg. magnitudinem discernit. Quum ergo .fg. prius inuenta non esset oculo tamen deinde moto perspecta habeatur, constat visionem non tantum per imagines oculo occursantes fieri sed etiam oculi vim nonnihil extra profundere, nisi forsitan ad superiores causas celestesque impulsus recurras, quod in Philosophia prorsus ridiculum est, vbi presertim promptum patensque discrimen agnoscitur.

Deinde, si visus a re tamen visili non etiam ab oculo emittantur, cur, rogo, longius (vt Aristoteli placuit), acutius autem, vt ipse cum plerisque aliis sum expertus, et exquisitius, ii cernunt, quibus sunt oculi conditi, aut qui adducta supra oculum manu aut fistula per canaliculum quippiam intueantur? An quia plures ex re visa imagines ad oculum perueniunt aut dissipate coguntur? At eedem omnino nec plures e re visa forme oculo occursant adducta super oculum fistula que prius late patentem, nullisque obseptum angustiis petebant, imo certe pauciores.

Sit enim oculi pupilla .ab., adducta vero fistula .acdb. Manifestum est, si a .cd. signis ad oculum perpendiculares ducantur .ce. et .df. per quas tantum ex quinta huius visio perficitur, protendanturque in rem quampiam visilem in .g. et .h. signa, .g. et .h. signa aliaque intersepta vi|deri per lemma primum eiusdem, nam ab iis [S12v] perpendicula|res producte inter .ge. et .hf. cadent, relique autem, que a signis [O11v] extra sumptis puta .k. et .l. producuntur, extra eas cadunt, atque ob id, offendente canalis densitudine, intra fistulam minime coguntur. Procedant ergo a .kl. perpendiculares ducte .ka. et .lb. per extremas pupille partes. Producta ergo super oculum fistula, ex .kl .gh. tantum atque intersepta signa videntur, et ab iis solum perpendiculares ad oculum meant. Quod si fistula deponatur, perpendiculares etiam a .k. et .l. signis ad oculum uenient. Plures ergo patenti oculo occurrunt perpendiculares e re visa forme, quam cum canalis oculo adducitur. Non igitur

É manifesto, pelo lema desta [proposição] apresentado anteriormente, que as perpendiculares traçadas dos pontos F e G para o olho A se estendem entre as [perpendiculares] BA e AC e são mais curtas do que elas. Por esta razão, pelo primeiro postulado deste [tratado], a ação sobre o olho será mais forte a partir dos pontos F e G do que a partir dos pontos B e C. Portanto, a partir dos pontos F e G, são projetadas imagens de maior intensidade do que a partir dos pontos B e C. Se a visão se concretiza somente por meio destas [imagens], por que razão não se vê FG sempre que se vê BC? E se porventura te desculpares com a pequenez de FG, [afirmando que] nunca ela se veria a tão grande distância, [dir-se-á que] o olho de quem procura, movido para um e para outro lado, discerne a grandeza FG a uma distância tão grande ou mesmo maior. Uma vez que FG não é encontrada antes mas é avistada depois de se mover o olho, é evidente que a visão não se faz apenas por meio de imagens que vão ao encontro do olho, mas que a força do olho também emana para fora um pouco, a não ser que recorras porventura a causas superiores e a impulsos celestes, o que em filosofia é totalmente ridículo, sobretudo quando se reconhece uma separação clara e evidente [entre os dois].

Além disso, se os raios são emitidos exclusivamente a partir do objeto visível mas não também a partir do olho, pergunto porque é que vê mais longe (como defendeu Aristóteles), e mais penetrantemente (como eu próprio experiencio com muitos outros), e mais apuradamente. quem tem os olhos semicerrados ou observa algo através de um canalzinho pondo a mão ou um tubo por cima do olho? Será porque chegam ao olho mais imagens a partir do objeto visto, ou, espalhadas, são forçadas a concentrar-se? Mas são no mesmíssimo número, e não mais, as formas [provenientes] do objeto avistado que chegam ao olho quando se põe um tubo no olho e as que o atingiam antes, quando estava completamente exposto e destapado; até serão menos.

[Fig. 6] | Seja AB a pupila de um olho e ACDB o tubo posto [nele]. Se se traçarem, a partir dos pontos C e D, as perpendiculares ao olho CE e DF – pelas quais, exclusivamente, se concretiza a visão, pela quinta [proposição] deste [tratado] – e se se prolongarem para um objeto visível, até aos pontos G e H, é evidente que os pontos G e H e os outros que estão no meio são vistos, pelo primeiro lema desta [proposição], pois as perpendiculares traçadas a partir deles cairão entre GE e HF; mas as restantes, que se traçam a partir de pontos tomados no exterior, por exemplo a partir de K e L, caem fora delas e, por isso, colidindo com a espessura do tubo, não são concentradas no interior do tubo. Avancem KA e LB, as perpendiculares traçadas a partir de K e L, pelas extremidades da pupila. Então, posto o tubo sobre o olho, de KL veem-se apenas os pontos G e H e os pontos que estão entre eles, e só as perpendiculares [traçadas] a partir destes avançam até ao olho. Se se puser o tubo de lado, também as perpendiculares [traçadas] a partir dos pontos K e L chegarão ao olho. Portanto, são mais as formas que atingem perpendicularmente o olho quando está destapado a partir do objeto avistado do que quando se põe um tubo no olho.

ob eas, que a re visili ad oculum imagines producuntur, perfectius per fistulam et exquisitius cernimus.

Eadem omnino est in reliquis, de quibus ambigebatur, ratio. Fatendum igitur erit, ratione presertim ad id cogente, radios ex oculis interuallo quodam effluere, quos, ne in vastum dissipentur, canalis angustia[19] cogit, densiores atque confertos in rem visilem effundi. Vnde fit vt exquisitius cernantur, quecumque per fistulam intuemur, pluribus scilicet in eam radiis incidentibus per fistule angustias, vt prius diximus, conglobatis, quod bine e regione figure subiecte indicant. Oculo enim .ab. visile .kl. obiiciatur atque ab oculo prodeant visus quattuor oculo perpendiculares per signa .aefb. in ipsius oculi pupilla adnotata, nullo igitur extrinsecus offendente in vastum laxentur qui ex .a. et .b. in .g. et .h. signa, medioque interuallo excipiant .kl. magnitudinem. Qui vero ex .ef. signis prodeunt .kl. magnitudini occurrant in signis .cd. Manifestum est in ipsam .kl. magnitudinem .ec. et .fd. visus tantum procumbere, quum enim ex premissa visus interuallo fe|rantur, supponimus .ag. et .ec. proximos esse, [S13r]

19 **angustia** *O*, augustia *S*

Logo, não é por causa das imagens que se estendem a partir do objeto visível para o olho que vemos mais perfeita e distintamente por meio de um tubo.

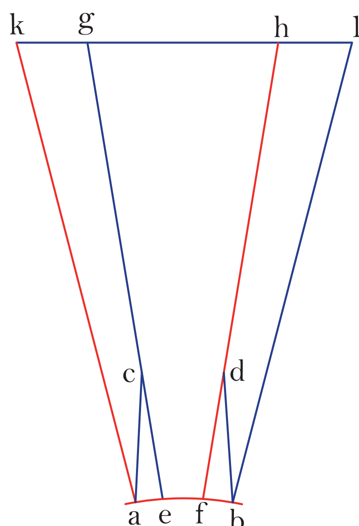


Fig. 6

O mesmo argumento aplica-se às restantes questões que colocámos. Portanto, terá de se reconhecer, sobretudo porque o argumento a isso obriga, que os raios efluem dos olhos com determinada distância [entre si], e que aqueles que a estreiteza do tubo impede de se dissiparem na vastidão se difundem na direção do objeto visível mais compactados e concentrados. Daqui decorre que as coisas que observamos por meio de um tubo se veem mais distintamente, a saber: porque são mais os raios que nelas incidem, concentrados por meio da estreiteza do tubo, como antes
[Fig. 7] dissemos, o que mostram as duas figuras apresentadas na margem. | Coloque-se diante do olho AB o visível KL e a partir do olho avancem quatro raios visuais perpendiculares ao olho nos pontos A, E, F e B, marcados na pupila do próprio olho, e difundam-se pelo espaço sem qualquer impedimento exterior: o raio que parte de A, para o ponto G, e o raio que parte de B, para o ponto H, e acolham a grandeza KL no espaço intermédio [que os separa][1]. Os [raios] que partem dos pontos E e F encontrem a grandeza KL nos pontos C e D. É manifesto que apenas os raios EC e FD caem na grandeza KL, pois, uma vez que os raios visuais avançam [separados] por um intervalo, pela [proposição] anterior, supomos que AG e EC são vizinhos,

1 Estes raios visuais não atingem o objeto, que, no entanto, está compreendido no seu ângulo.

similiter | .fd. et .bh. Preter ipsos autem .ec. et .fd., visus nulli alii in .kl. magnitudinem cadent per lemma octaue huius et quintam propositionem, nisi qui inter .ef. effluxerint. Rursus si fistula .amnb. adducatur, cogentur in arctum .ag. et .bh. visus, ut in secunda figura apparet, ne tam vastum angulum efficiant, simul et visus .ec. et .fd. simulque omnes[20] in .kl. visile procumbent. Quare tunc acutius .kl. intuebitur. [O12r]

Ad hec in rem uisam ex oculis nonnihil progredi argumento euidentissimo esse possunt mulieres que mensium fluxione laborant, que vbi ad speculum comuntur et ornantur, ipso male sani oculi contuitu speculum statim (vt Aristoteles Author est) inficiunt. His atque aliis complurimis argumentis visus ex oculis in visibilem rem procumbere suaderi potest.

Ast prius a nobis demonstratum est oculum rei visilis contagio infici colorarique. Visum igitur vtroque cum rei visilis, tum oculi effluuio perficitur. Nec video qua ratione id effici potest, nisi visus ex oculis prodeuntes per illustratum aerem in rem visam delabantur, vbi rei visilis colore infecti rursus ad oculos remeant, in quibus rei visilis imaginem exprimunt, vt a nobis propositum est.

Et ne huius quidem sententie temerarium me Authorem quispiam criminetur, preclara Calcidii in Timeum Platonis verba subiiciam. Quem huius sententie grauissimum Authorem sum sequutus. Trina (inquit) est videndi ratio, lumen caloris intimi

---

20 **omnes** *S*, in omnes *O*

assim como FD e BH. Além dos raios EC e FD, nenhuns outros cairão na grandeza KL a não ser os que efluem entre E e F, pelo lema da oitava [proposição] deste [Fig. 8] [tratado] e pela quinta proposição. | Novamente, se se puser o tubo AMNB, os raios AG e BH [da fig. 7] ficarão concentrados na estreiteza [do tubo], como se vê na segunda figura, de forma que não fazem um ângulo tão grande; ao mesmo tempo, tanto os raios visuais EC e FD, como todos [os outros], caem no visível KL. Por esta razão, KL ver-se-á mais penetrantemente.

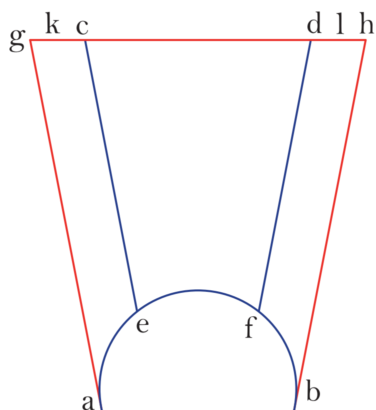


Fig. 7

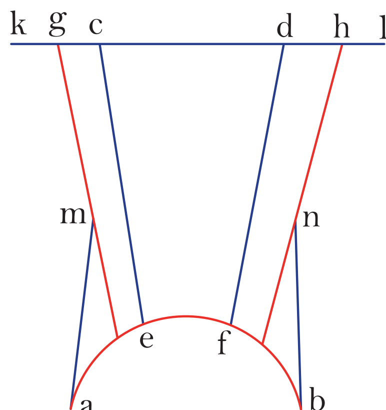


Fig. 8

Além disto, pode servir de evidentíssimo argumento de que algo avança dos olhos para o objeto avistado o facto de que as mulheres que sofrem da menstruação, quando se penteiam e se arranjam ao espelho, infetam imediatamente o espelho só por o olharem com os seus olhos malsãos (como afirma Aristóteles)[2]. Com estes e muitos outros argumentos se pode argumentar que o raio visual cai na coisa visível [vindo] a partir dos olhos.

Mas demonstrámos antes que o olho é tingido e impregnado por contágio da coisa visível. Portanto, o raio visual estabelece-se por eflúvio, tanto da coisa visível, como do olho. E não vejo como é que isto pode suceder, a não ser que os raios visuais saiam dos olhos e passem através do ar iluminado até à coisa vista, onde são impregnados pela cor da coisa visível, regressando aos olhos, nos quais produzem a imagem da coisa visível, como propusemos.

E para que ninguém me acuse de imprudente autor desta opinião, acrescento as ilustres palavras de Calcídio ao *Timeu* de Platão, a quem segui como autor desta opinião: É tríplice (diz ele) a maneira de ver; uma luz do fogo interior que

---

2 *Sobre os Sonhos*, 2.459b24-460a23.

per oculos means, lumen extra positum consaguineum lumini nostro, lumen quod ex corporibus visibilium specierum fluit. Que paulo post hisce Platonis in Timeo verbis confirmat: Itaque | quum diurnum iubar applicat | se visus fusioni tunc nimirum incurrentia semet inuicem duo similia in vnius corporis coherent speciem, quo concurrunt oculorum acies emicantes: quoque effluentis intimae fusionis acies contigue imaginis occursu repercutitur. Hec Plato. Quem locum Calcidius explicans subdit: Euidenter visum fieri dicit, quoties intimi caloris lumen, quod inoffense per oculos fluit, aliquam visilem materiam (quam contiguam imaginem appellat) incurrit, ibidemque iuxta materie qualitatem[21] formatum et coloratum, sensus uisusque confit ex lumine, qui contigue imaginis occursu, repercusso radio, reditu facto ad oculorum fores, vsque ad mentis secreta porrigitur. Huius etiam sententie (si Aristoteli credimus) Empedocles fuit, qui visionem nonnunquam perfici ait ignea ex oculis vi prodeunte. Interdum imaginis ad oculum delapse aduentu. Iam ergo constat quam grauissimos Authores sim sequutus. [S13v] [O12v]

Superest iam Aristotelis aliorumque contradicentium rationibus satisfacere; non omnibus quidem, nam et id super meas uires operosum esset et legentibus fastidiosum, sed his tamen modo que ab omnibus circunferuntur, et multorum iudicio acrius vrgere videntur. Atque imprimis[22] Aristoteles libro de sensu et sensili[23], Platonis verbis (vt assolet) mordicus herens, lumen ex oculis minime profundi contendit, quando si ex oculis lumen aut lux fusa progrederetur in tenebris cernere possint, nec agnato extrinseco lumine opus haberent, quo deficiente, fluens ex oculis lux extingueretur, nihil enim lumini in tenebris obesse, quo minus inoffense in rem visilem prosiliat. Nec meminit hoc in loco lumen ignemque a Pla|tone vocari, quecunque per trans|parens perspicuumque medium permeant, que ad videndi rationem facultatemque conducunt. Est enim lumen (vt ipse Aristoteles secundo de Anima probat) actus perspicui, non solum id quo cuncta illustrantur tenebrasque sua accessione repellit, sed quicquid perspicuum medium peruadit. Nam et imagines (quas modo species vocari dixi) ad oculum meantes Calcidius lumen appellat, quod, nec ipso repugnante Aristotele, externi luminis adminiculo, vt ad oculum deferatur, indiget. Qua igitur ratione Peripatetici omnes concedunt externo lumine formas aut imagines visibilium rerum egere, vt [S14r] [O13r]

21 **iuxta materie qualitatem** *S*, iuxta qualitatem materie *O*
22 **imprimis** *S*, in primis *O*
23 **Aristoteles libro de sensu et sensili** *S*, Arist. de sensu et sensili libro *O*

passa pelos olhos, uma luz existente no exterior aparentada à nossa luz, uma luz que emana dos corpos das *espécies* visíveis[3]. Isto, confirma pouco depois com estas palavras de Platão no *Timeu*: «Quando a luz do dia se junta ao fluxo do olhar, então, duas [luzes] semelhantes encontram-se e combinam-se na *espécie* de um só corpo onde convergem os raios projetados dos olhos e onde o fogo do fluxo interior que emana [dos olhos] se repercute por oposição da imagem sensível»[4]. Estas são as palavras de Platão. Calcídio explica e parafraseia este passo. Diz ele: «É evidente que a visão se faz sempre que a luz do calor interior que flui pelos olhos sem impedimentos atinge um objeto visível (a que chama imagem sensível) e que, aí ganhando forma e cor de acordo com a qualidade da matéria [em questão], se transforma, a partir da luz [que era], em sensação visual que, repercutida ao encontrar a imagem sensível, e tendo regressado até à entrada dos olhos, se estende para os meandros do espírito.» A crermos em Aristóteles, Empédocles foi desta opinião, ele que diz que a visão se concretiza, ora pelo avanço de uma força ígnea que procede dos olhos, ora por chegada de uma imagem ao olho. Portanto, é evidente quão seriíssimos autores eu segui.

Resta agora responder aos argumentos de Aristóteles e de outros que pensam de forma contrária; não a todos, pois isso seria trabalhoso, estaria acima das minhas forças e seria aborrecido para os leitores, mas apenas àqueles que são apresentados por toda a gente e parecem acorrer ao juízo de muitos de forma mais viva. Em primeiro lugar, Aristóteles, no livro *Sobre a Sensação*, discutindo as palavras de Platão, mordaz, como é seu costume, defende que a luz não procede dos olhos, pois se a luz ou a luz difusa proviesse dos olhos, estes poderiam ver no escuro e não precisariam de uma luz externa aparentada, em falhando a qual a luz que flui dos olhos se extinguiria, pois nada se opõe à luz [dos olhos] no escuro tal que a impeça de avançar até ao objeto visível. Nem sequer se lembra de que neste passo Platão chama luz e fogo àquilo que, ao passar através de um meio transparente e diáfano, conduz à maneira e capacidade de ver. Com efeito, a luz (como prova o próprio Aristóteles no segundo livro do *Sobre a Alma*) é uma atividade do diáfano, não só aquilo que banha todas as coisas e repele as trevas com a sua chegada, mas também tudo o que pervade um meio diáfano; com efeito, às imagens (que há pouco afirmei chamarem-se *espécies*) que avançam até ao olho, Calcídio chama-lhes «luz», porque (e a isto não se opõe o próprio Aristóteles) [esta] precisa da ajuda da luz exterior para ser levada até ao olho. Por esta razão, todos os Peripatéticos concedem que as formas, ou imagens, das coisas visíveis precisam de luz exterior para serem projeta-

---

3 Ou seja, dos corpos dos objetos visíveis. Melo baseia-se no *Comentário ao Timeu de Platão*, de Calcídio, que inclui um capítulo dedicado à visão, e que foi editado e traduzido para francês, por B. Bakhouche (veja-se Bakhouche 2011; os trechos citados por Melo encontram-se nas p. 475-479).

4 *Timeu*, 45b-46a.

ad oculos e visili eiaculentur. Patiantur equo animo hoc intimum lumen, quod ex oculis fluere diximus externe lucis accessione foueri, atque rursus vtriusque auxilio imagines e re visa fusas medio instertitio recipi atque ad oculum referri, externumque lumen efficere, vt radii ex oculis fusi in perspicuo recipiantur, qui rei visae colore infecti, oculum unde sunt progressi repetant. Quamobrem cessant obiecta alia, quum acrius instat et accuratius inquirit, quo contrario in tenebris lumen ex oculis fusum extingatur[24]. Non enim prius id effluit, quam externi luminis cognatione inuitetur, quemadmodum nec humanum corpus animatur, nisi prius conuenientibus id accidentibus disponatur.

Iam et illud aliud plane solutum est. Nam qui fieri potest, inquit, vt internum lumen externo iungatur in vnumque coalescat, impediente presertim predura oculi tunica. Neque[25] enim ex his duobus unum confici diximus, sed vtrunque per transparens perspicuumque spacium delabi, internumque lumen sine externo in aere recipi non posse, sicut nec ignis forma sine calore. Quemadmodum et imagines [S14v]
| e re visa | prodeuntes (quas lumen et ignem Platonici nonnunquam appellant) [O13v]
Aristotelis atque omnium consensu per idem perspicuum non nisi cum lumine ad oculos deferuntur, nec magis perlucida oculi tunica visuum fusioni repugnat, quam imaginum e re visa venientium lationi que per eam ad intimam pupillam progrediuntur. Quare facile posset reciprocum istud argumentum in eos retorqueri non minus quam illud cui maxime fidere videntur, non posse scilicet per tam vastum usque ad astra spacium lumen illud intimum vagari. Nam et plerique magni inter Peripateticos nominis a quacunque coloris obiecti particula formas ad oculum venire fatentur (sunt enim continue nec disiunctae imaginis partes), quibus simul totius rei vise imago confit, et tamen multe ex his sunt oculo minores, minorisque forsan ad agendum virtutis que per equalia spacia suas imagines ad oculum fundunt. Nec enim huius luciferi agentis vis tam cito intimi luminis fusione fatiscit.

Nec vero negarim res nonnullas tam procul sitas esse, vt uideri minime possint, paucis scilicet radiis in illas ex tanto interuallo procidentibus, quapropter discerni haud potest. Ad hec non sum nescius tantum posse spacium intercipi, vt ex tanto interuallo nullam magnitudinem quantumuis magnam cernere queat (fatiscente scilicet ipsius oculi acie). Nam et res procul sitae minus exacte videntur non solum quia pauciores in eas visus procumbunt, sed etiam si sub eodem angulo atque eisdem visibus suscipiantur quibus propius admote

---

24 **extingatur** *S*, extinguatur *O*
25 **neque** *S*, nec *O*

das do visível para os olhos. Aceitem da mesma forma que esta luz interior, que afirmámos emanar dos olhos, é apoiada pela adição da luz exterior e que, novamente por auxílio de ambas, as imagens difundidas a partir da coisa vista são acolhidas num meio intersticial e levadas até ao olho, e que a luz externa faz com que os raios difundidos a partir dos olhos sejam acolhidos no diáfano e, infectados pela cor da coisa vista, voltem ao olho de onde saíram. Esta é a razão por que os outros objetos deixam de se ver, já que [o Peripatético] pergunta com muita insistência, e inquire com muito rigor, por causa de que contrariedade é que a luz difundida a partir dos olhos se extingue no escuro: é que ela não emana antes de ser convidada pela semelhança da luz exterior, tal como o corpo humano não ganha vida antes de se dispor a isso, por acordo dos acidentes.

Assim se resolveu satisfatoriamente também esta outra questão: como pode suceder, afirma, que a luz interior se junte à exterior e [com ela] se funda numa só, ainda para mais quando a túnica dura do olho o impede. Não dissemos que se forma uma coisa só a partir destas duas, mas que cada uma passa pelo espaço transparente e diáfano, e que a luz interna não pode ser acolhida no ar sem a luz externa, da mesma maneira que a forma do fogo também não o pode sem o calor. Do mesmo modo, também as imagens que saem da coisa vista (a que os Platónicos chamam às vezes luz e fogo), por concordância de Aristóteles e de todos, não passam pelo mesmo diáfano até aos olhos a não ser com a luz, e a túnica transparente do olho não obsta ao fluxo dos raios visuais mais do que ao transporte das imagens provenientes da coisa vista que avançam até ao interior da pupila por meio dela. Por esta razão, facilmente se poderia lançar contra eles este argumento recíproco não menos do que aquele em que parecem confiar tanto, a saber: que aquela luz interna não pode passar por um tão vasto espaço até aos astros. Com efeito, também muitos de grande reputação entre os Peripatéticos admitem que as formas vêm para o olho a partir de toda e qualquer partícula de cor exposta (pois as partes da imagem são contínuas e não discretas), e é por elas que se produz a imagem da coisa vista no seu todo; no entanto, muitas destas (as quais concentram as suas imagens no olho [passando] por espaços iguais) são menores do que o olho, e, provavelmente, de menor virtude para agir. Portanto, é por causa da difusão do lume interior que a força deste agente lucífero não se esgota tão rapidamente.

Não nego que algumas coisas estão situadas tão longe que não conseguem ser vistas; a saber, não se conseguem ver por serem poucos os raios que as alcançam devido a tão grande distância. Não ignoro que pode encontrar-se de permeio tamanho espaço, que não se consegue ver qualquer grandeza, seja de que tamanho for, devido a tão distância (a saber, por quebra da força do próprio olho). Com efeito, as coisas que estão longe veem-se com menos exatidão, por um lado porque nelas caem menos raios visuais, por outro lado, não se veem perfeitamente, mesmo que se tomem sob o mesmo ângulo e sob os mesmos raios pelos quais se viam

visebantur non ita perfecte discernuntur, impediente scilicet intercepto spacio per quem oculorum vires lassantur. Quare minime inconuenit visus tandem infinito propemodum | spacio intercedente absumi. [S15r]

Sed tamen tanta | oculis data est videndi facultas, vt per vastam supremi orbis deuexitatem celerrime omnia contemplari possit, si modo ea inter visuum proximorum terminos non intercipiantur. Nec mirum quoniam hos rationis vicarios (vt antea diximus) deus optimus maximus esse voluit, vt superna intueremur ad ipsumque diuinum numen suprema incumbantem eiusque perfectissima opera flammantesque ignes assurgeremus, dicente lepidissimo Poeta. [O14r]

Pronaque cum spectent animalia caetera terram,
Os homini sublime dedit, celumque videre
Iussit, et erectos ad sydera tollere vultus.

Illud demum quod a Vitellione adducitur, non est magni faciendum. Aut enim, inquit, visus ex oculis fluens substantia est, aut accidens. Si primum, quum Celum et astra intuemur, celum ipsum visus excauaret atque perforarent. Si accidens, quum omne id subiectum in quo recipitur denominet, visus autem in re visili, si ex oculis emicarent, recipi oportet, non erit ergo oculus videndi instrumentum, neque oculus cernere dicetur, sed res visilis in quam visus educti procumbunt. Nam si ei primo condonemus visum accidens esse atque in re visa recipi, non statim conficit vt visio non sit oculi actio, et oculus non sit videndi instrumentum, ignis siquidem, quum non magis incalescat, circunstantia tamen corpora calefacere dicitur. Ad hec nondum receptum est sola interni luminis fusione videndi facultatem perfici, sed ipsius imaginis appulsu rursus ad oculum remeante radio visilisque rei colorem exprimente. Deinde non est concessum visus in re visa imbibi. Sed de his hactenus. Abunde enim me presentis[26] controuersie capita attigisse arbitror, atque iam propere alio se recipiet oratio.

| Sed quoniam in propositione sexta[27] huius nostri in Eu|clidis Perspectiuam Corollarii demonstratum est oculi figuram orbicularem esse, non vnico quidem orbe tantum (vt antea[28] dictum est, et dissectorum prodidit diligentia) sed multiplici concinnatam, constat autem nihil frustra aut ociose [O14v] [S15v]

26 **presentis**, presenti *SO*
27 **in propositione sexta**, propositionis sexte *SO*
28 **antea** *S*, ante *O*

[quando] movidas para mais perto, por isto: por causa do espaço intermédio ao longo do qual as forças dos olhos se atenuam. Esta é a razão por que não é absurdo que os raios visuais se esgotem: devido ao espaço praticamente infinito que se encontra de permeio.

Contudo, tão grande capacidade de ver foi dada aos olhos, que se consegue contemplar tudo através da vasta convexidade do orbe superior, desde que não caia entre os extremos de raios visuais vizinhos. E não admira [que assim seja], porque Deus Ótimo Máximo quis que estes fossem os representantes da razão (como acima dissemos), para que contemplássemos as coisas superiores e nos erguêssemos até ao ser divino que guarda as mais elevadas coisas e para as suas perfeitíssimas obras e chamejantes fogos, como afirma o graciosíssimo poeta:

> os demais animais, virados para o chão, observam a terra,
> ao homem deu um rosto elevado no ar, e mandou-o olhar para o céu,
> e erguer o seu corpo ereto para os astros[5].

Finalmente aquilo que é acrescentado por Vitelo não pode ser considerado de grande valor. Afirma ele que, ou o raio visual que emana dos olhos é uma substância, ou é um acidente; se é o primeiro, quando vemos os astros e o céu, os raios visuais escavariam o céu e perfurá-lo-iam; se é um acidente, uma vez que denomina todo o sujeito em que se encontra, e os raios visuais devem ser recebidos na coisa visível, se viessem dos olhos, então o olho não será um instrumento da visão, nem se dirá que é o olho que vê, mas sim a coisa visível, na qual caem os raios visuais estendidos. Ora, se lhe concedermos em primeiro lugar que o raio visual é um acidente e que é recebido na coisa vista, não sucede imediatamente que a visão não seja ação do olho, e que o olho não seja um instrumento de visão, pois o fogo, embora não se torne mais quente, contudo, diz-se que aquece os corpos em redor. Além disso, ainda não é unânime que a capacidade de ver se concretiza apenas por meio da difusão de uma luz interior, mas sim pela chegada da própria imagem, quando o raio volta para o olho e exprime a cor da coisa visível. Finalmente, não é admitido que o raio visual se embebe na coisa vista. Mas chega de tudo isto, pois penso que toquei abundantemente os pontos principais desta discussão e já rapidamente o discurso se virará para outro assunto.

Ainda assim, uma vez que se demonstrou na proposição sexta deste nosso *Corolário* à *Perspetiva* de Euclides que a forma do olho é orbicular mas ela não é composta apenas por um orbe (como antes se disse e confirma a execução das dissecações) e sim por múltiplos [orbes], e é evidente que a natureza nada faz em vão

---

5 Ovídio, *Metamorfoses*, I.85-86.

a natura effingi, non erit a nostro instituto alienum particulatim iam singulorum oculi partium figuram, ordinem vite munia exponere, repetito rursus principio e media philosophia et mathesi, quod non decreueramus, quando in eam nos necessitatem dictandi impetus et temporis importunitas compulit. Quare nonnulla hoc loco ad ea que a nobis dudum postulata sunt corrogabuntur.

Primum corrogatum. *Quemcunque radium perpendicularem siue in medium densius siue rarius perspicuum tamen incidentem nusquam refringi.*
Multa hoc experimenta confirmant, que ne sint legentibus fastidio consulto pretermittimus[29]. Vnum tamen hoc euidentissimo argumento esse potest. Nam si quis in meridie, quum sol super nostrum verticem nutauerit, peluim aqua vsque ad labra repletum solis radiis subiecerit, qui perpendiculares in subiectam aque superficiem decumbunt ex hypothesi, atque canalem ad perpendiculum erexerit, ita vt aque superficiem canalis terminus contingat, et per eundem calculum aliquem e regione in peluim demittat, qui cauo canalis meatui in directum iaceat, plane videbit solis fulgorem, qui per canalem meat, in subiectum calculum migrare, nusquam in intercepta intercapedine flexum. Est autem aere aqua densior, atque in eandem progrediens per canalem radius perpendicularis. Eadem prorsus vbi in medium rarius solis radius deciderit erit ratio, et de | quibuscunque radiis | visiuis ex secundo huius corollarii postulato, nam et ii cum lumine perferuntur. [O15r] [S16r]

Secundum corrogatum. *Si vero radius oblique desilit in meabile spacium, si quidem illud densius fuerit, ad perpendicularem, si rarius, a perpendiculari refringetur.*
Refringi radium ad perpendicularem, est oblique cadentem radium inter perpendicularem et eundem in directum productum cogi, quod exemplum subditum edocet. Esto .ab. radius oblique incidens in .cd. absimilis densitatis. Ab ipso .b. signo .ab. in directum producatur in .e. Perpendicularis vero erigatur a signo .b. communi procidentis radii et densioris medii, estoque .bf. Inter ipsas .be. et .bf. refringatur radius .abg. Tunc dicetur .ab. radius refringi ad perpendicularem.

29 **pretermittimus** *S*, praetermisimus *O*

ou supérfluo, não será alheio ao nosso propósito expor por partes a figura, disposição e função vital de cada parte do olho, evocando um ponto de partida proveniente da filosofia média e da matemática que não expusemos, dado que a falta de tempo e a rapidez do ditado nos obrigou levou a isso. Por essa razão, adicionaremos alguns corrogados neste sítio aos postulados que indicámos há pouco.

Primeiro corrogado. *Um raio incidente perpendicularmente num meio mais denso ou mais rarefeito mas transparente, não se refrata para parte alguma.*
Confirmam isto muitas experiências que deixamos de lado propositadamente para que não constituam aborrecimento para os leitores. Esta, no entanto, pode servir de argumento evidentíssimo: se alguém, ao meio dia, com o sol no nosso zénite, expuser uma bacia cheia de água até às bordas aos raios de sol, que caem perpendiculares na superfície subjacente da água por hipótese, e erguer um tubo perpendicularmente, de forma que a extremidade do tubo toque a superfície da água, e por ele baixar uma qualquer pedrinha a direito para a bacia, que jaz perpendicularmente ao percurso côncavo do tubo, verá claramente que o brilho do sol, que atravessa o tubo, passa para a pedrinha subjacente, sem se fletir para parte alguma no intervalo intercetado. Ora, a água é mais densa do que o ar; e o raio que avança pelo tubo até ela é perpendicular. O argumento será o mesmo quando um raio do sol cair num meio mais rarefeito, e o mesmo sucede com os demais raios visuais, pelo segundo postulado deste corolário, pois também estes andam com a luz.

Segundo corrogado. *Se o raio se precipita obliquamente para um espaço transitável, se este for mais denso, ele refrata-se para o lado da perpendicular, se for mais rarefeito, ele refrata-se divergindo da perpendicular.*
[**Fig. 9**] | Um raio refratar-se "para o lado da perpendicular" significa que o raio é obrigado a cair obliquamente entre a perpendicular e o prolongamento desse raio a direito, como mostra o exemplo posto em baixo. Seja AB um raio incidente obliquamente em CD, [meio] de densidade diferente. Prolongue-se AB para E, a direito, a partir do ponto B. Trace-se uma perpendicular a partir do ponto B, comum ao raio incidente e ao meio mais denso [CD]; seja BF. Refrate-se o raio ABG entre as [linhas] BE e BF. Então, dir-se-á que o raio AB se refrata para o lado da perpendicular.

Refringi vero a perpendiculari, est oblique cadentem radium longius a perpendiculari, quam si idem in directum produceretur, errare laxari. Vtsi in premissa hypotesi .ab. refringeretur in .g. ipsaque .bg. caderet vltra .eb. angulum .gbf. efficiens maiorem angulo .ebf.

Hoc ergo secundo corrogatum a plerisque multis aliis experimentis suadetur. Nec adductum in premisso experimentum, si paululum hypotesis tenorem inflectas, refragatur, vbi solem constitueris in ortu aut occasu, canalem vero oblique demissum atque e regione calculum vt prius suppositum. Nec enim tunc primarius solis fulgor in calculum prosiliet, sed in medio quidem densiore citra inter perpendicularem et subiectum calculum, in rariore vero vltra longius a perpendicularis termino. Alia etiam ad idem comprobandum ratio non minus contemnenda adduci potest. Quum enim radius oblique incidit in densius medium non potest irrefractus meare, | quod experientia | compertum habemus, nec perpendicularem labi, nam [O15v] [S16v] per eandem ex priore corrogato perpendicularis radius qui breuior et fortior est progreditur, nec densius medium illum sinit sua pertinaci densitate habenas laxare, sed eundem quanta vi potest cogit, et inter utranque eiaculat lineam. Vbi vero in medium rarius impegerit cedentis medii indulgentia effuse laxatur, non quidem

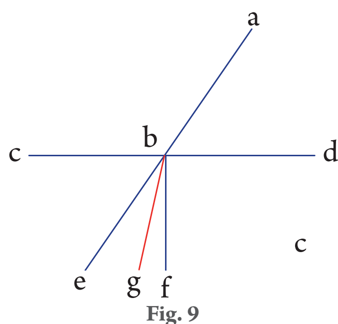


Fig. 9

[Fig. 10] | Um raio refratar-se «divergindo da perpendicular», significa que o raio que incide obliquamente é levado a passar mais longe da perpendicular do que o seu prolongamento a direito. Como se, na hipótese apresentada, AB se refratasse para G, mas BG caísse para lá de EB, fazendo o ângulo GBF maior do que o ângulo EBF.

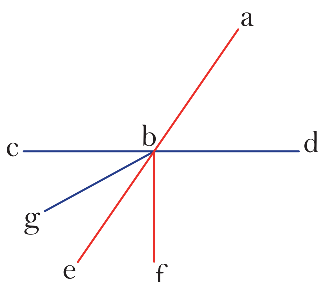


Fig. 10

Este segundo corrogado é confirmado por muitos por meio de muitas outras experiências. A experiência apresentada no [corrogado] anterior não o contradiz, se mudares um pouco o conteúdo da hipótese e puseres o sol no orto ou no ocaso, um tubo baixado obliquamente e uma pedrinha a direito, como se fez anteriormente. Com efeito, nessa altura, o brilho primário do sol não cairá sobre a pedrinha, mas, num meio mais denso, [cairá] entre a perpendicular e a pedrinha subjacente; num meio mais rarefeito, [cairá] para mais longe da extremidade da perpendicular. Um outro argumento, não desprezável, pode ser apresentado para provar o mesmo. Quando um raio incide obliquamente num meio mais denso não pode progredir sem se refratar, o que é claro por experiência, nem pode cair pela perpendicular, pois, pelo corrogado anterior, é por ela que cai o raio mais curto e mais forte e o meio mais denso não lhe permite, pela sua firme densidade, transitar livremente, antes forçando-o com toda a força que tem e projetando-o entre uma e outra linha. Quando cai num meio mais rarefeito, atenua-se porque o meio cede e o permite, mas não pela

per perpendicularem aut directum radium, vt ammodo nobis concludebatur, sed paulo a perpendiculari aberrans, longius quam directus radius, si vltra protenderetur. Quemadmodum ingruentibus pluuiis riuulus aliquis superbiens, magno impetu delapsus, sicubi offenderit aggerem aut cliuum impedientem quominus recta meet paululum flectitur, vbi vero patentem campum inuenit, latius spatiatur, ita radius quiuis (etiam quo videmus) si in medium densius decidit, a recta uia deuiat ab impendente[30] quasi onere ad perpendicularem coactus, si vero in rarius nemine prohibente a perpendiculari longius e rectaque via euagatur.

Sed de his hactenus, nec enim in proposito in iis que nos velut aliud agentes remorantur diu spaciari temporis importunitas sinit, quando et hec a plerisque aliis diligentius exculta sunt, et ita euidentissimis experimentis comprobata, vt nullam aliunde fidem exposcant.

Nonnunquam vero radii dicuntur refringi ad perpendicularem, quando producti in aliquo signo occurrerent, cogente vero medio propius occurrunt, a perpendiculari vero refringi etiam dicuntur, quoties vbi occurrere debent vel non occurrunt, aut longius saltem, aut cum in maiore angulo refringuntur, quam angulus sit maior, quem producti efficiunt, tunc a perpendiculari refringuntur, cum autem in minore, tunc ad perpendicularem, quod idem est. Et eandem est vbique probatio, eadem et | exempla. Hec propter contentiosos minusque eruditos adieci. | [S17r] [O16r]

Tertium corrogatum. *Si sphera spheram secet, communis sectio erit plana superficies.*
Hoc non solum in spheris, sed in quibusque etiam solidis paralelepipedis experientia compertum est et ad illud probandum prompta atque manifesta ratio suppetit: alioqui corpora non essent regularia et perfecta. Deinde in spheris et aliis solidis paralelepipedis, vbi quis intra spheram ceream ligneam spheram impegerit, atque in communi vtriusque superficie tria signa notauerit per que planum agatur, experietur idem planum per reliqua vtriusque spherae signa decurrere.

Corollarium. *Si igitur bine sphere sese secuerint, comunis sectio erit circulus.*
Nam per hoc tertium corrogatum erit vtriusque sphere sectio planum vtranque spheram secans, quod per primam primi Theodosii erit circulus. Sed iam redeamus vnde digressi sumus.

---

30 **impendente** *S*, impediente *O*

perpendicular ou pelo raio direto, como acabámos de concluir, antes divergindo um pouco para mais longe da perpendicular do que o raio direto, caso fosse prolongado em diante. Tal como algum rio tornado bravo pelo cair das chuvas, correndo com grande ímpeto, quando esbarra num monte de terra ou numa vertente que impedem o seu avanço em linha reta, se flete um pouco, mas quando encontra campo aberto, se espraia largamente; assim também, se um raio qualquer (incluindo aquele por meio do qual vemos) cair num meio mais denso, ele desvia-se do caminho reto, empurrado para a perpendicular como se um peso o prendesse, mas se cair num meio mais rarefeito, nada o impedindo, afasta-se do caminho reto para mais longe da perpendicular.

Sobre isto, basta, pois também no presente [assunto] a escassez de tempo não nos permite alongarmo-nos demasiado em coisas que nos atrasam por fazermos coisas diferentes [das que devíamos], uma vez que também estas foram trabalhadas com mais diligência por muitos outros, e comprovadas por experiências tão evidentes que não exigem persuasão de outra origem.

Por vezes, diz-se que os raios se refratam para o lado da perpendicular, no caso em que os raios prolongados iriam encontrá-la num ponto, mas fazem-no mais perto por coação de um meio; diz-se que se refratam divergindo da perpendicular, sempre que, onde devem encontrar-se, ou não se encontram, ou o fazem somente mais longe. Ou então, se se refratam num ângulo maior do que o ângulo que fazem [com a perpendicular] quando prolongados, então refratam-se divergindo da perpendicular; se [se refratem] num [ângulo] menor, então [refratam-se] para a perpendicular, o que significa o mesmo. E a prova é igual seja qual for o caso, e os exemplos são os mesmos. Acrescentei estas coisas por causa dos conflituosos e dos menos eruditos.

Terceiro corrogado. *Se uma esfera cortar uma esfera a interseção será uma superfície plana.*
Isto descobre-se por experiência não só em esferas, mas também em cada sólido paralelepípedo e para o provar basta um argumento fácil e claro: é que de outro modo não seriam corpos regulares e perfeitos. Além disso, em esferas e outros paralelepípedos sólidos, quando alguém espeta uma esfera de madeira dentro de uma esfera de cera e marcar três pontos na superfície comum de ambas e por eles traçar um plano, verá que o plano passa pelos restantes pontos de ambas as esferas.

Corolário. *Então, se duas esferas se cortarem, a interseção será um círculo.*
Com efeito, por este terceiro corrogado, a interseção de ambas as esferas será um plano secante a ambas as esferas, o qual, pela primeira [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio será um círculo. Mas voltemos ao ponto de onde começámos a divagar.

Propositio nona. *Oculum tribus tunicis tribusque humoribus constare.*

Consulto quidem natura oculo perfectissimo totius corporis instrumento tribuisse videtur perfectum senario partium numerum, qui primus perfectus est trinus, ex primo pari in primum imparem productus, primos tres numeros complexus, cuius laudes, Ausonii[31] poetae Gryphus personat. Nec tamen negarim Galenum (libro De Oculi Sectione) ad hunc numerum tunicarum quartam addidisse, quam nonnulli consolidatiuam, alii coniunctiuam appellant, | fundam alii, quoniam infundibili effigie formata sit. Que procul dubio oculum cum capitis osse (quod caluam appellant) iungit. Atque ab eius membrana enascitur, | queque velut totius oculi basis totam eiusdem mollem sustinet. Sed quoniam hec extrinseca est (si diuersa est ab aliis quod multi dubitant) et nihil videndi facultati prestat, de qua noster sermo institutus est, eam velut alienam pretermisimus, et sub compendio que ab insectoribus de multiplici oculorum compositione inuenta sunt percurremus, initium a partibus extrinsecis oculi sumentes, que aspicienti magis conspicue sunt. **[S17v] [O16v deest] [O17r]**

Panditur igitur exterius et in oculi anteriore parte cornea tunica que priori membrane (quam a calue subtegmine ortam diximus magis carnosam minimeque peruiam) in medio quasi ipsius oculi connectitur, vbi albus quidem circulus visitur, quem posthac commissure circulum ob id appellabimus quoniam cum eius superficie relique oculi tunice committuntur. Hec cornea tunica perlucida est, reliquis durior cornu specie (unde et nomen accepit) peruia et ipsa ne visus arceret, quominus oculi intima peruaderent, durior ad occursantium offendicula paratior, equali vndique densitudine, quemadmodum solerti dissectorum inquisitione, inuicteque rationis vi compertum habemus. Nam ut paulo post sumus dicturi, necessum erat vt caua conuexaque cornee superficies eundem centrum haberent, atque ob id equalis esset vndique cornea densitatis. Hec ab exteriore nerui optici tunica oritur quemadmodum ab interiore eiusdem tunica vuea nascitur, que corneam sequitur, et ipsa a commissure circulo expansa interius, opaca et multicolor, que quasi | racematim sub cornea complexa aspectui nostro varios colores obiicit (vueam putarim ob id a multis dictam) hec ad anteriorem oculi partem | prominens a cornea dissecatur, alioqui non video cur eadem per totam oculi anteriorem partem non protenderetur, communem autem sectionem circulum per corollarium tertii corrogati efficit. Per cuius circuli cauitatem et pupilla videri potest et visilium formarum ymaginibus infici, quem nos pupillarem circulum uocamus. Hanc autem vueam tunicam opacam et **[S18r] [O17v]**

31 **Ausonii** *O*, Ansonii *S*

Proposição nona. *O olho é constituído por três túnicas e três humores.*
A natureza parece ter atribuído propositadamente ao olho, o mais perfeito instrumento que se encontra no corpo, o número perfeito de seis partes; este primeiro número perfeito é tripartido, é o produto do primeiro [número] par pelo primeiro [número] ímpar, e abarca os três primeiros números[6]; os seus louvores, canta-os o poema *Grifo* do poeta Ausónio. Não nego que Galeno (no *Livro da secção do olho*) acrescentou a este número de túnicas uma quarta, a que alguns chamam «Consolidativa», outros «Conjuntiva»; outros «Funda», porque tem uma forma afunilada. Não há dúvida de que ela liga o olho ao osso da cabeça (a que se chama «calva»), e que nasce na membrana deste, sustendo toda a massa do olho, como suporte. No entanto, como ela é exterior (se é que é distinta das outras, facto de que muitos duvidam), e não é relevante para a capacidade de ver, assunto de que se ocupa o nosso discurso, deixamo-la de lado, por alheia [ao nosso objectivo], e percorreremos resumidamente as descobertas dos investigadores sobre a multíplice estrutura do olho, começando pelas partes de fora do olho, que são mais acessíveis para quem observa.

Do lado de fora, e na parte anterior do olho, estende-se a Túnica Córnea, que está ligada à membrana anterior (que afirmámos ter origem na pele da calva e ser mais carnosa e impossível de atravessar) praticamente no meio do próprio olho, onde se vê um círculo branco, a que daqui em diante chamaremos Círculo de Ligação, porque as restantes túnicas do olho se juntam na sua superfície. Esta Túnica Córnea é transparente, e mais dura do que as restantes pelo seu tipo córneo (daqui recebe o seu nome): transparente, para ela própria não impedir os raios visuais de passarem para o interior do olho, mais dura e preparada contra os ofendículos das coisas que a atingem, de igual espessura em toda a parte, como descobrimos por hábil pesquisa em dissecações e por força de argumento irrefutável. Com efeito, como já de seguida havemos de dizer, era forçoso que a superfície côncava e convexa da Córnea tivessem o mesmo centro, e que, por isso, a Córnea fosse de igual espessura em toda a parte. Esta Túnica nasce no exterior do nervo ótico, do mesmo modo que a Túnica Úvea nasce no interior do mesmo. Esta vem a seguir à Córnea, e também ela se estende para o interior a partir do Círculo de Ligação. É opaca e multicolor, está coberta sob a Córnea, como uma uva, e define as [diversas] cores dos nossos olhos (eu poderia pensar que muitos a designam «Úvea» por causa disto), ao projetar-se para a parte anterior do olho, é cortada pela Córnea (de outra forma, não vejo por que razão ela não se alargaria a toda a parte anterior do olho), e faz como interseção um círculo, pelo corolário do terceiro corrogado. Na concavidade deste círculo, a que chamamos Círculo Pupilar, a pupila pode ser vista e impregnada pelas imagens das formas visíveis. A natureza fez esta Túnica Úvea opaca e mul-

6 Isto é, 6=3+2+1=2*3 (é tripartido, abarca os primeiros três números e é o produto do primeiro número par pelo primeiro número ímpar).

multicolorem consulto natura effinxit, ne visus atque visiui spiritus diffusi laxentur, quos in arctum cogit, perque pupillarem circulum coactos emittit, quam affabre eadem natura modico foramine excauauit, in quo humor quidam tenuis aqueus albumini oui persimilis (albugmeus a multis ob eam rem dictus) circunfluus recipitur qui corneam ab aere extraneoque calore siccatam inrigat, ne nimia siccitate rugetur, vt in senibus et morituris egris accidere solet, in quibus deficiente eo humore, aut nimium exsiccato, cornea decidit frequentibusque rugis sulcatur, quamobrem minime expedite hi videre solent sed illis confusa omnia apparent, eorumque oculis nigricantes umbre obuersantur. Sequitur deinde guttula quedam concreti humoris perlucida (quam Cristalloidem vocant) in qua videndi precipua sedes existit (vt Aristoteli Galenoque placet), tametsi hic libro De Iuuamento Anhelitus, non in Cristalloide, sed in membranula quadam (que quantum coniicere potui non alia est a rectiformi) visionem, contra Aristotelis sententiam fieri, autumet, que nostro instituto controuersia parum conducit, constat enim inter omnes in Cristalloide, aut in eius con|finiis, videndi facultatem sitam esse, quoniam hic [S18v]
humor ceteris purior, lucidior atque compactior existit, | vt facilius visiles imagines [O18r]
recipere, receptas tenacius retinere possit. Cristalloidem sequitur in ipso quasi commissure circulo tenuissima quedam membranula et ipsa ex interiore[32] optici nerui tunica oborta, que exiguis ramulis expansa (vnde a quibusdam Arachnoides, ab aliis rectiformis nuncupatur) humorem vitreum continet, a quo Cristallois pascitur, qui modice glaciatus est, atque vitri minutatim concisi speciem refert, vnde et nomen sortitus est. Extenditur demum et opticus neruus, cauus amplusque per quem spiritus ad oculos meant, de quo plura alias.

Hic ergo partium oculi ordo: Cornea prior tunica, sub qua Vuea includitur, modice excauata[33] inque huius foramine, Albugineus Humor Corneam sequitur, atque oculi cauitatem replet, subinde Cristallois, quem sequitur Arachnoides, seu Retiformis Tunica, que Vitreum Humorem excipit. Tribus igitur tunicis tribusque humoribus oculus constat, quod et figura e regione subiecta explicat. Quod exponendum proposuimus.

Propositionis decimae lemma primum. *Si alicuius orbis caua conuexaque circunferentia idem centrum habuerint erit is vndique equalis densitudinis. Quodsi vndique eque densus orbis fuerit conuexa et caua eiusdem circunferentie idem centrum habebunt.*

---

32 **interiore** *S*, interiori *O*
33 **excauata** *S*, excauataque *O*

ticolor propositadamente, para que os raios visuais e espíritos visivos não se espalhassem difusamente; ela concentra-os numa passagem estreita e emite-os, compactados, pelo Círculo Pupilar; a mesma natureza esculpiu-a artisticamente com uma pequena abertura, na qual se encontra um humor ténue aquoso semelhante à clara de um ovo (por isso, é designado «Albugíneo» por muitos) que se espalha em redor e irriga a Córnea que se torna seca em contato com o ar e com o calor exterior, para que esta não se enrugue demasiado por causa da secura, como costuma acontecer em velhos e moribundos, nos quais, faltando esse humor, ou ficando excessivamente desidratado, a córnea se quebra e é sulcada por inúmeras rugas; razão pela qual estes costumam ver menos facilmente, e todas as coisas lhes aparecem turvas, e apenas enxergam sombras e silhuetas. Segue-se depois uma pequena gota de humor compacto transparente (a que chamam Cristalino) na qual se situa a principal sede da visão (como defendem Aristóteles e Galeno, apesar de este, no livro *Da assistência à Respiração*, afirmar, contra a opinião de Aristóteles, que a visão se faz, não no Cristalino, mas numa pequena membrana qualquer que, quanto pude perceber, não é outra senão a Retiforme, controvérsia que pouco interessa ao nosso propósito, pois todos aceitam que a faculdade de ver está situada no Cristalino ou em seu redor, porque este humor é mais puro, mais claro e mais espesso do que os outros para receber mais facilmente as imagens visíveis e retê-las mais firmemente). Depois do Cristalino vem, como que no próprio Círculo de Ligação, uma pequena membrana finíssima. Também ela surge da túnica interior do nervo ótico, estendendo-se em ramificações pequeníssimas (daqui é chamada Aracnoide por alguns e Retiforme por outros). Ela contém o Humor Vítreo, de que se nutre o Cristalino, e que é moderadamente glacial e oferece o aspeto de vidro cortado aos pedacinhos (de onde tirou o seu nome). Finalmente, estende-se o nervo ótico, redondo e amplo, através do qual os espíritos avançam para os olhos, sobre o qual [diremos] mais noutra ocasião.

É esta a ordem das partes do olho: a Córnea é a primeira túnica, na qual está encerrada a Úvea (ligeiramente côncava na sua abertura); o Humor Albugíneo segue a Córnea e preenche a cavidade do olho; vem de seguida, o Cristalino, a que se segue a Aracnoide ou Túnica Retiforme, que contém o Humor Vítreo. Portanto, o olho é constituído por três túnicas e três humores, o que mostra a figura posta à margem[7]. O que desejámos explicar.

Lema primeiro da proposição décima. *Se a circunferência côncava e [a] convexa de um orbe qualquer tiverem o mesmo centro, ele será de espessura igual por toda a parte, e se um orbe tiver a mesma espessura por toda a parte, as circunferências convexa e côncava da mesma circunferência terão o mesmo centro.*

7 Esta figura não está desenhada nos manuscritos que chegaram até nós.

Orbem equalis densitudinis voco, quando per vtriusque caue et conuexe circunferentie centra actarum linearum inter vtranque circunferentiam equales partes intercipiuntur.

Esto orbis cuius circunferentia conuexa .ed. caua | vero .bc. Sitque vtriusque [S19r] centrum idem .a. Dico eundem | orbem equalis esse densitudinis. Producantur [O18v] enim vtcumque[34] diametri .abd. et .ace. Et quoniam per diffinitionem sphere datam a Theodosio, recta linea .ad. equalis est rectae linee .ae., ob id etiam .ab. ipsi .ac. equalis est, ergo per communem sententiam .bd. et .ce. equales erunt. Eadem erit in quibusdam diametrorum partibus ostensio.

Sit rursus propositus orbis, de quo in premissa hypotesi agebatur. Sit autem caue circunferentie centrum .a. per secundam primi Theodosii. Producanturque recte linee vt prius .abd. .ace. Et quoniam per deffinitionem nunc positam et hypotesim .bd. equalis est ipsi .ce. Est autem .ab. ipsi .ac. equalis, ergo per communem sententiam erunt .ad. et .ae. equales. Eadem erit de quibuscumque aliis rectis lineis[35] a signo .a. ad circunferentiam .ed. productis ostensio quod sint aequales. Erit ergo per deffinitionem centri .a. ipsius .ed. et .cb. centrum, vtriusque scilicet circunferentiae caue et conuexe. Quod secundo loco demonstrandum erat.

Eiusdem lemma secundum. *Si sphera spheram aliam complectitur non fuerit autem vtriusque idem centrum, vnica tantum recta linea vtriusque centra peruadet, super vtriusque superficiem sola perpendicularis.*

Sint enim bine sphere .ef. et .cd. prioris quidem centrum .a. posterioris .b. Producaturque .abce. in continuum et directum. Erit ergo per primum lemma propositionis quinte huius nostri in Perspectiuam Corollarii .abce. perpendicularis super vtramque spheram propositam. Quod si alia

34 **vtcumque,** utrumque *SO*

35 **rectis lineis,** rectilineis *SO*

Chamo orbe de igual espessura, quando as partes das linhas traçadas pelos centros das duas circunferências (a côncava e a convexa) compreendidas entre as duas circunferências são iguais.

[Fig. 11] | Seja um orbe com circunferência convexa ED e com circunferência côncava BC. Seja A o centro de uma e outra. Afirmo que este orbe é de igual espessura. Tracem-se quaisquer [dois] diâmetros ABD e ACE. Uma vez que a linha reta AD é igual à linha reta AE, pela definição de esfera dada por Teodósio, e AB é igual a AC, pela mesma razão, então, por noção comum, BD e CE serão iguais. A prova será igual para quaisquer partes dos diâmetros.

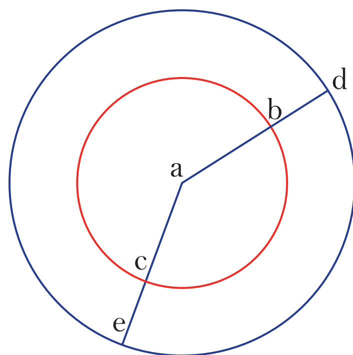


Fig. 11

Novamente, seja o orbe dado de que se falava na hipótese apresentada anteriormente. Seja A o centro da circunferência côncava, pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio. Tracem-se as linhas retas ABD e ACE, como anteriormente. Uma vez que BD é igual a CE, pela definição agora apresentada e por hipótese, e AB é igual a AC, então, por noção comum, AD e AE serão iguais. A prova de que quaisquer outras linhas retas traçadas do ponto A para a circunferência ED serão iguais é a mesma. Logo, por definição de centro, A será o centro de ED e de CB, ou seja, de ambas as circunferências, a côncava e a convexa. O que se queria demonstrar em segundo lugar.

Lema segundo da mesma [proposição]. *Se uma esfera compreende outra esfera, mas o centro de uma e outra não for o mesmo, só passa pelos centros de ambas uma única linha reta, e só essa é perpendicular à superfície de ambas [em simultâneo].*

[Fig. 12] | Sejam EF e CD duas esferas. [Seja] A o centro da primeira e B o centro da segunda. Trace-se ABCE continuamente a direito. Então, pelo primeiro lema da proposição quinta deste nosso *Corolário* à *Perspetiva* de Euclides, ABCE será perpendicular a ambas as esferas dadas. Se se desse o caso de uma outra [reta], por exemplo ABDF,

vt .abdf. super easdem spheras | perpendicularis esset, quum .ea. per .ab. centra meare debeat per idem Lemma, | esset ergo .ab. .abdf.[36] recte linee pars in plano .abce. pars in sublime .bdf. quod est impossibile per primam vndecimi Elementorum. Sola ergo .abce. super vtramque propositam spheram perpendicularis est et vtriusque centrum peruadit. Quod fuit demonstrandum. [S19v] [O19r]

Propositio decima. *Cornee et Albuginei Humoris tum caua tum conuexa circunferentia necnon et Cristalloidis conuexa idem habent centrum.*

Quum enim ex quinta propositione huius corollarii perpendicularibus tantum visibus cernamus, et per tertiam eiusdem, eundem ordinem in oculo seruent et in re visili, fit autem perfecta visio in Cristalloide (quemadmodum in octaua huius propositione admonuimus), necesse igitur est vt visus per Corneam, Albugineum Humorem et Cristalloidem perpendiculares ferantur. Quum autem hi duo humores et Cornea diuerse sint densitudinis, si non esset horum idem centrum, vnica tantum recta linea super easdem spheras perpendicularis esset ex secundo huius lemmate, atque ob id per quintam huius vnicum tantum signum rei visilis videretur, quod prorsus falsum esse experientia edocet. Erit ergo idem centrum conuexe circunferentie Cornee, Humoris Albuginei et Cristalloidis. Est autem conuexa Humoris Albuginei circunferentia et cornee caua eadem, Humoris etiam Albuginei caua et Cristalloidis conuexa, vt ex octaua huius manifestum euadit. Cornee igitur et Albuginei Humoris etc.

Corollarium. | *Cornea igitur versus oculi anteriorem partem equalis est densitudinis.* [S20r]
Est enim vtriusque caue et conuexe circunferentie | eiusdem idem centrum. Quare per primum lemma huius equalis est cornea densitatis. [O19v]

36 **.abdf.,** .ab. .df. *SO*

ser perpendicular às mesmas esferas, como [a reta] EA deve passar pelos centros A e B, pelo mesmo lema, então a parte AB da linha reta ABDF estaria no plano ABCE e a parte BDF estaria num [plano] mais elevado, o que é impossível, pela primeira [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*. Logo, apenas ABCE é perpendicular a cada uma das esferas dadas e passa pelos centros de uma e outra. O que se quis demonstrar.

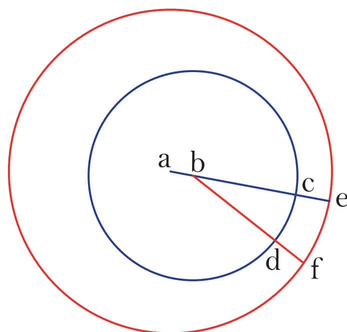


Fig. 12

Proposição décima. *Tanto a circunferência côncava como a [circunferência] convexa da Córnea e do Humor Albugíneo, assim como a [circunferência] convexa do Cristalino têm o mesmo centro.*
Como, pela quinta proposição deste *Corolário*, vemos apenas por meio de raios visuais perpendiculares, e, pela terceira do mesmo, [os raios visuais] conservam a mesma ordem no olho e na coisa visível, e a visão perfeita se dá no Cristalino (como adverti na oitava proposição deste [tratado]), então, é necessário que os raios visuais passem perpendiculares pela Córnea, pelo Humor Albugíneo e pelo Cristalino. Mas como estes dois Humores e a Córnea seriam de espessura diferente se o centro de todos três não fosse o mesmo, apenas uma única linha reta seria perpendicular a estas esferas, pelo segundo lema desta [proposição], e, por isso, pela quinta [proposição] deste [*Corolário*], só se veria um único ponto da coisa visível, o que a experiência ensina ser totalmente falso. Logo, o centro da circunferência convexa da Córnea, do Humor Albugíneo e do Cristalino será o mesmo. Mas a circunferência convexa do Humor Albugíneo e côncava da Córnea são a mesma; e a [circunferência] côncava do Humor Albugíneo e convexa do Cristalino também [são a mesma], como fica evidente pela oitava [proposição] deste [*Corolário*]. Portanto, da Córnea e do Humor Albugíneo etc.

Corolário. *Portanto, a Córnea é de igual espessura na parte anterior do olho.*
Com efeito, o centro das suas duas circunferências, a côncava e a convexa, é o mesmo. Por essa razão, pelo primeiro lema desta [proposição], a Córnea é de igual espessura.

Propositionis vndecimae lemma primum. *Si sphera spheram secat atque a communis sectionis centro ad angulos rectos perpendicularis erigatur, per vtriusque centrum transit.*
Nam quum vtriusque sphere sectio ex corollario tertii corrogati sit circulus communis vtriusque sphere, si ab eius centro perpendicularis erigatur in vtramque partem vsque ad vtriusque conuexam circumferentiam, per centra earundem transibit per corolarium secunde propositionis primi Theodosii bis repetitum.

Corollarium. *Si ergo sphera spheram secuerit applicata ad centra recta linea per centrum communis sectionis protenditur.*
Nam si bine proposite sphere idem centrum non habuerint (quod in sequenti lemmate demonstrabitur) applicata ad vtriusque centra recta linea vnica tantum inuenitur per secundum lemma premissae propositionis. At per presens lemma que a centro communis sectionis ad angulos rectos educitur, per vtriusque centrum meat. Applicata ergo ad centra recta linea (ad centra inquam propositarum spherarum) per centrum communis sectionis transit.

Eiusdem lemma secundum. *Si sphera spheram secuerit non erit earum | idem centrum sed eius quidem cuius pars prominet centrum sectionis circulo propinquius est.* [S20v]
Sint enim bine sphere .ab. et .cd. quarum communis | sectio esto circulus .ef. Dico in primis non esse earum idem centrum. Sin minus, sit illud .g. sphera autem prominens esto .ab. signumque extra .cd. spheram .a. Connectanturque .ag. Manifestum est ex hypotesi .ag. secare ipsam .dc. spheram, esto in .d. Connectantur autem .eg. Et quoniam .g. centrum est ipsius .ab. sphere, ab eo vero in eius circumferentiam producte sint recte linee .ga. et .ge., sunt ergo .ge. et .ga. equales. Ob id etiam, quoniam .g. centrum est sphere .cd., ergo erunt .ge. et .gd. equales, a centro enim ad circunferentiam .dc. producuntur. Est autem et eidem .ge. ipsa .ag. equalis. Ergo .dg. et .ag. equales erunt, pars et totum. Non est ergo .g. propositarum spherarum commune centrum. Quod primo assumebatur probandum. [O20r]

Lema primeiro da proposição undécima. *Se uma esfera cortar uma esfera e se se levantar uma perpendicular a partir do centro da interseção, ela passa pelo centro de ambas.*
Como a secção das duas esferas é um círculo comum a ambas as esferas, pelo corolário do terceiro corrogado [deste *Corolário*], se do seu centro se levantar uma perpendicular para ambos os lados até à circunferência convexa de ambas, ela passará pelos centros delas, pelo corolário da segunda proposição do primeiro [livro] de Teodósio duas vezes tomado.

Corolário. *Portanto, se uma esfera cortar uma esfera, a linha reta colocada nos centros passa pelo centro da interseção.*
Se duas esferas dadas não tiverem o mesmo centro (o que se demonstrará no lema seguinte) acha-se apenas uma única linha reta colocada nos centros de ambas, pelo segundo lema da proposição anterior. Mas, pelo presente lema, a [reta] que se traça perpendicularmente a partir do centro da interseção passa pelo centro das duas. Logo, a linha reta colocada nos centros (quero dizer nos centros das esferas dadas) passará pelo centro da interseção.

Lema segundo da mesma [proposição]. *Se uma esfera cortar uma esfera, o centro das duas não será o mesmo, mas o centro daquela cuja parte é proeminente fica mais próximo do [centro do] círculo da [inter]secção.*
[Fig. 13] | Sejam AB e CD duas esferas cuja interseção seja o círculo EF. Afirmo em primeiro lugar que o centro das duas não é o mesmo. Caso contrário, seja G esse [centro]; seja AB a esfera proeminente e A um ponto fora da esfera CD. Ligue-se A a G. É evidente, por hipótese, que AG corta a esfera DC, seja em D. Ligue-se E a G. Como G é o centro da esfera AB e dele foram traçadas as linhas retas GA e GE para a sua circunferência, então GE e GA são iguais. Também por isso, como G é o centro da esfera CD, então GE e GD são iguais, pois são traçadas do centro para a circunferência. Mas AG também é igual a GE. Logo, DG e AG serão iguais, a parte e o todo. Portanto, G não é o centro comum das esferas dadas. O que se queria provar primeiro.

Dico secundo quod si predictarum spherarum centra inueniantur per secundam primi Theodosii, que sint .gh., connectantur autem .hg. et in continuum producatur, et promineat sphera .ab., producta vero secet spheram .ab. in .a. et .dc. in .d., vt prius dico, inquam ipsius .ab. centrum esse .h. propinquius centro sectionis. Sin minus connectantur .eh. et .ge.[37] et quoniam .he. equalis est ipsi .hd. cum .hd. sit minor .ag. .ag. autem equalis .ge. Erit .he. minor ipsa .ge. Producatur ergo .hg. versus oppositam partem, secabit ergo prius .ab. sit in .b. ac demum .cd. vt in .c. Erit ergo .gb. minor ipsa .gc. multo igitur minor erit quam ipsa .hc. Est autem .gb. aequalis ipsi .ge. quia a centro ad circunferentiam eiusdem sphere. Et | ob id etiam .he. equalis ipsi .hc. Est [S21r] ergo .he. maior ipsa .ge. Sed et minor probata quod est impossibile. Non est ergo ipsius .ab. sphere centrum .g. sed .h. Quod secundo probandum erat.

Propositio vndecima. | *Centrum Vuee propinquius*[38] *est pupillari circulo, quam Cornee centrum que Vueam secat.* [O20v]

Nam vt expositum est a nobis propositione octaua huius secatur a Cornea Vuea Tunica versus anteriorem oculi partem, quarum communis sectio pupillaris circulus est. Non est igitur Cornee atque Vuee idem centrum per secundum lemma huius. Sed quum vuea promineat, vtpote a Cornea dissecta eius centrum per idem secundum lemma pupillari circulo propinquius erit in anteriore oculi parte. Quod est demonstrandum.

Propositio duodecima. *Per vtriusque oculi pupillam visilis rei imagines ad nerui optici commissuram eodem ordine proueniunt.*

---

37 **connectantur .eh. et .ge.,** rep. *SO*
38 **propinquius,** propinquus *SO*

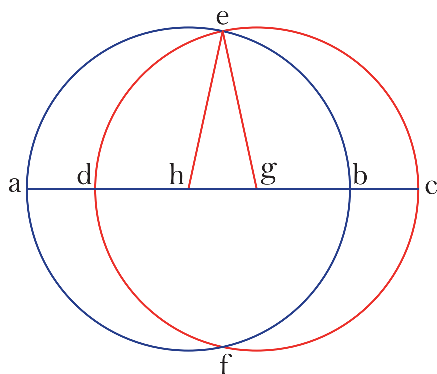


Fig. 13

Afirmo em segundo lugar que, se se encontrarem os centros das esferas referidas, pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, os quais sejam G e H, e se se ligar H a G e se esta [reta] se prolongar continuamente, e se a esfera AB for proeminente, e se, [a reta HG] prolongada, cortar a esfera AB em A e DC em D, como antes disse, afirmo que H é o centro de AB e está mais perto do centro da [inter]secção. Caso contrário, ligue-se E a H e G a E. Uma vez que HE é igual a HD, como HD é menor do que AG e AG [é] igual a GE; [então,] HE será menor do que GE. Prolongue-se HG para o lado contrário. Cortará primeiro AB em B e depois CD em C. Logo, GB será menor do que GC; portanto, será muito menor do que HC. Mas GB é igual a GE, porque [traçada] do centro para a circunferência da mesma esfera. Por isso, HE também será igual a HC. Logo, HE é maior do que GE. Mas também se provou ser menor, o que é impossível. Então, G não é o centro da esfera AB, mas sim H. O que se queria provar em segundo lugar.

Proposição undécima. *O centro da Úvea está mais próximo do Círculo Pupilar do que o centro da Córnea que corta a Úvea.*
Como expusemos na proposição oitava deste [*Corolário*] a Túnica Úvea é cortada pela Córnea na parte anterior do olho e a interseção das duas é o Círculo Pupilar. Portanto, o centro da Córnea e o da Úvea não é o mesmo, pelo segundo lema desta [proposição], e como a Úvea é proeminente, porque cortada pela Córnea, o seu centro estará mais próximo do Círculo Pupilar, na parte anterior do olho, pelo mesmo lema segundo. O que se quer provar.

Proposição duodécima. *As imagens da coisa visível chegam à ligação do nervo ótico na mesma ordem pela pupila de cada olho.*

Diximus in premissis vueam tunicam mire excauata ne visilium rerum imagines ab ingressu prohiberentur, inque Cristalloide aut eius confiniis precipuam videndi sedem constitutam esse. Quoniam tamen binos oculos, non vnicum tantum natura efformauit si ibidem rerum imagines sisterentur, nec vltra progredientes simul iungerentur, res vna duplex appareret, duplicata scilicet in binis oculorum orbibus imagine.

Prouida igitur nature sollertia opticum neruum ad vtrunque oculum exporrectum ex anteriore[39] cerebri parte bipertitum sub medio quasi frontis in vnum | [S21v] coniunxit, rursumque bipertitum vtrique oculo impertiit, vt per vtrumque neruum producte rerum imagines simul in vnam occurerent certamque visilis rei effigiem perferrent. Hinc fit vt morbo aliquo aut vi declinante altero oculorum optico | neruo [O21r] vno res duplex appareat geminata scilicet imagine atque nusquam in vnam coacta. Necesse igitur est vt si quidpiam certa visione dignoscatur eiusdem signi imagines ad binos oculos venientes tandem in nerui optici commissuram occurrant. Neque enim prius occurrere possunt, vtque ex omnibus signis duplices ad oculos imagines prouenientes eodem ordine iungantur, vt certa atque distincta visione res quecunque oculis obiecta cernatur. Quod demonstrasse oportuit.

Propositio tredecima. *Cristalloidis centrum intimius latet post Arachnoidem ad interiorem oculi partem repulsum.*

Quum enim ad Christalloidem ex decima huius visus perpendiculares veniant, sunt autem super[40] Cristalloidis conuexam circunferentiam per primum lemma quinte huius soli visus perpendiculares qui in continuum producti centro eiusdem occurrerent, si ergo cristalloidis centrum citra Arachnoidem existeret visus in centro concurrerent Cristalloidis, ibique situm permutarent. Quare ad commissuram nerui optici venientes, preposterum situm ad eum quem rei visilis partes seruant exprimerent resque inuerso ordine visiles apparerent, quod est contra pre|missam duodecimam propositionem. Cristalloidis igitur centrum post Arachnoidem latet. [S22r]

Propositionis decime quarte lemma. *Si in sphera duo circuli notentur, et per polos alterius producti maiores circuli fuerint, quorum equales partes inter vtrunque intercidant, erunt hi duo circuli eque | distantes.* [O21v]

Sint in sphera duo circuli .abcd. .efgh. sitque alterius eorum puta .efgh. polus .k. per tricesimam primi Theodosii inuentus per quem duo circuli maiores producantur .cgkhd.

---

39 **anteriore** *O*, antiore *S*
40 **autem** *S*, om. *O*

Nas [proposições] anteriores, dissemos que a Túnica Úvea foi admiravelmente escavada para que as imagens das coisas visíveis não fossem impedidas de entrar, e que a principal sede da visão reside no Cristalino ou em seu redor. No entanto, visto que a natureza formou dois olhos e não apenas um, se as imagens das coisas aí fossem colocadas e não avançassem mais fundindo-se numa só, uma coisa apareceria em dobro, isto é, a imagem seria duplicada pelos dois orbes dos olhos.

A prudente habilidade da natureza juntou num só, mais ou menos a meio da fronte, o nervo ótico que se estende em duas vias para cada um dos olhos a partir da parte anterior da cabeça, e novamente o separou em dois, um por cada olho, para que as imagens das coisas trazidas por cada nervo se juntassem numa só e transmitissem uma representação fiel da coisa visível. Daqui decorre que uma coisa apareça em dobro, ou seja, em imagem geminada e de modo algum fundida numa só, se um dos nervos óticos dos olhos se enfraquece, por doença ou violência. Portanto, é necessário que, se se reconhece algo com visão certa, as imagens do mesmo ponto que vêm para os dois olhos se encontrem na ligação do nervo ótico. Tão pouco podem encontrar-se antes para que as imagens duplas provindas para os olhos de todos os pontos se juntem na mesma ordem, para que a coisa e tudo o que é apresentado aos olhos seja visto com visão certa e distinta. O que convinha demonstrar.

Proposição décima terceira. *O centro do Cristalino jaz mais profundamente a seguir à Aracnoide, remetido para o lado de dentro do olho.*
Uma vez que os raios visuais chegam ao Cristalino perpendicularmente, pela décima [proposição] deste [*Corolário*], mas os únicos raios que são perpendiculares à circunferência convexa do Cristalino são os que, prolongados continuamente, encontram o centro deste, pelo primeiro lema da quinta [proposição] deste [*Corolário*], então, se o centro do Cristalino estivesse para cá da Aracnoide, os raios visuais seriam concorrentes no centro do Cristalino e aí mudariam de sítio. Por esta razão, ao chegarem à ligação do nervo ótico, estariam numa posição invertida relativamente àquela que têm as partes da coisa visível, e as coisas visíveis apareceriam com ordem invertida, o que é contra a anterior proposição décima segunda. Portanto, o centro do Cristalino jaz atrás da Aracnoide.

Lema da proposição décima quarta. *Se numa esfera se marcarem dois círculos, e, pelos polos de cada um se traçarem círculos maiores, se as partes que ficam entre cada um deles forem iguais, estes dois círculos serão paralelos.*
[Fig. 14] | Sejam ABCD e EFGH dois círculos numa esfera. Seja K o polo de um deles (por exemplo, de EFGH), determinado pela trigésima [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio. Por ele, tracem-se os dois círculos maiores CGKHD e AEKFB. Sejam

et .aekfb. Sint etiam .gc. .hd. .fb. et .ae equales ad inuicem. dico .abcd. et .efgh. circulos eque distantes esse. Quoniam enim .k. polus est circuli .efgh. ergo per diffinitionem poli erunt .kg. .kf. .kh. et .ke. recte linee equales ergo per vicesimam octauam tertii Elementorum erit .kg. equalis[41] .kh. circunferentie. Ob id etiam eisdem equales erunt .ke. et .kf. quoniam circuli, quorum partes sunt equales sunt, quia eiusdem sphere maiores circuli ex hypotesi. Si ergo adiungantur .gc. .fb. .hd. et .ea. equales eisdem erunt .kc. .kb. .kd. et .ka equales et recte linee ad eadem signa per vicesimam nonam tertii elementorum producte ad inuicem equales. Quum ergo a .k. signo plures quam due recte linee ad circuli .abcd. circunferentiam equales producantur .k. vero sit in sphere circunferentia erit .k. per tricesimam primam primi Theodosii polus circuli .abcd. Eadem ratione probabitur aut multo quidem facilius alterum polum circuli .efgh. polum esse circuli .abcd. Nam per corollarium tredecimum primi Theodosii producti circuli per .k. | per alterum polum .efgh. circuli [S22v] transeunt in quo sese per equalia secant, et demptis his equalibus sectionibus de quibus prius dictum est eodem modo demonstratio succedet, quam explicandam studioso lectori relinquo. Quum ergo hi duo circuli | eosdem polos habeant, erunt [O22r] per secundam secundi Theodosii eque distantes. Quod fuit probandum.

Propositio decima quarta. *Circulus commissure et pupillaris sunt equedistantes.*
Si enim pupillaris circuli polus per tregesima primi Theodosii inueniatur et per illum maiores circuli producantur, inuenientur equales maiorum circulorum sectiones inter Puppillarem Circulum et Circulum Commissure (quod etiam oculis quispiam lustrare potest[42]) planum equidem est

41 **equalis,** equales *SO*
42 **potest** *S,* possit *O*

também GC, HD, FB e AE iguais entre si. Afirmo que ABCD e EFGH são círculos paralelos. Uma vez que K é o polo do círculo EFGH, então, pela definição de polo, KG, KF, KH e KE serão linhas retas iguais. Então, pela vigésima oitava do terceiro [livro] dos *Elementos*, [o arco] KG será igual ao arco KH. Pela mesma razão, [os arcos] KE e KF também serão iguais àqueles, porque os círculos de que são parte são iguais, uma vez que são círculos maiores da mesma esfera, por hipótese. Logo, se se juntar àqueles os [arcos] iguais GC, FB, HD e EA; [então, os arcos] KC, KB, KD e KA serão iguais e as linhas retas traçadas nesses pontos são iguais entre si, pela vigésima nona do terceiro dos *Elementos*. Uma vez que do ponto K se traçam mais do que duas retas iguais para a circunferência do círculo ABCD e K está na circunferência da esfera, [então,] K será o polo do círculo ABCD, pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio. Pela mesma razão, ou de forma muito mais fácil, se provará que o outro polo do círculo EFGH é polo do círculo ABCD. Com efeito, pelo corolário décimo terceiro do primeiro [livro] de Teodósio, os círculos traçados por K passam pelo outro polo do círculo EFGH no qual se cortam em [partes] iguais e, subtraídos estes dos arcos iguais dos quais se falou anteriormente, ter-se-á do mesmo modo a demonstração, que deixo ao leitor estudioso para explicar. Uma vez que estes dois círculos têm os mesmos polos, então serão paralelos, pela segunda [proposição] do segundo [livro] de Teodósio. O que se quis provar.

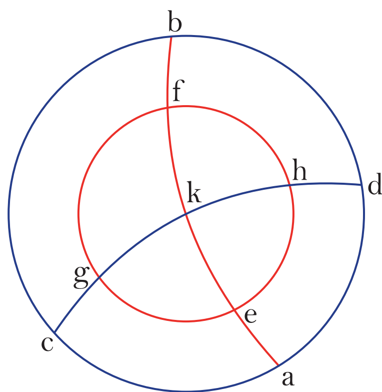


Fig. 14

Proposição décima quarta. *O Círculo de Ligação e o [Círculo] Pupilar são paralelos.* Se se encontrar o polo do Círculo Pupilar, pela trigésima [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, e se se traçarem círculos maiores por ele, descobrir-se-á que os arcos dos círculos maiores entre o Círculo Pupilar e o Círculo de Ligação são iguais (o que quem quiser pode verificar com os seus olhos), sendo claro que, por toda a

equalem vndique distantiam recipi inter Pupillarem Circulum et albicantem, quem Commissure Circulum appellauimus Per premissum ergo lemma, erunt Commissure Circulus et Pupillaris equedistantes.

Propositio decima quinta. *Eadem recta linea per pupillaris circuli centrum et per centrum Vuee Christalloidis, per centrum circuli commissure perque centrum Arachnoidis et vitrei humoris transit et in vtramque partem producta, per polos pupillaris et circuli commissure.*

Quoniam enim cornea atque vuea tunica sese secant, vt demonstratum est propositione vndecima huius, applicata ad centra recta linea per centrum communis sectionis transit, hoc est per pupillaris circuli centrum, per corollarium primi lemmatis vndecime propositionis huius | Corollarii. Que recta linea quoniam a centro sphere [S23r] in circuli minoris eiusdem sphere centrum deducitur perpendicularis erit super eundem per | septimam primi Theodosii, per octauam ergo eiusdem vtrimque [O22v] producta per polos eiusdem transit, hoc est per pupillaris circuli polos. Quum autem commissure circulus per decimam quartam huius pupillaris circulo eque distet, erunt per primam secundi Theodosii pupillaris atque commissure circulorum idem poli. Producta ergo recta linea per polos circuli commissure transit. Quare super eundem perpendicularis erit et per eius centrum meabit per duodecimam primi Theodosii. Quoniam vero Arachnoidis circulus in eodem est plano cum commissure circulo aequalem enim intercipit tunicarum cornee et vuee vndique densitudinem, quemadmodum dissectorum solertia prodidit, erit ergo per lemma primum decime propositionis huius idem vtriusque circuli centrum commissure scilicet et Arachnoidis. Quare quum idem sit centrum vtriusque circunferentie cornee et humoris albuginei atque Christalloidis per decimam propositionem huius, recta ergo linea per polum et centrum pupillaris circuli transiens per centra cornee vuee albuginei humoris et cristalloidis atque circuli Arachnoidis transit quod idem est et commissure circuli centrum, atque super eundem circulum scilicet Arachnoidis perpendicularis est. Est autem hic Arachnoidis circulus sphere vitrei humoris minor circulus preter centrum transiens, vt ex nona huius patet. Illa ergo vtrimque producta per centrum vitrei humoris transibit per corollarium secunde propositionis primi Theodosii siquidem vitreus humor in spheram circinatur, nam | et hoc [S23v] nondum determinatum est. | Eadem igitur recta linea etc. [O23r]

parte, é igual a distância entre o Círculo Pupilar e o [círculo] esbranquiçado a que chamámos Círculo de Ligação. Logo, pelo lema anterior, o Círculo de Ligação e o Pupilar serão paralelos.

Proposição décima quinta. *A mesma linha reta passa pelo centro do Círculo Pupilar e pelo centro da Úvea, do Cristalino, pelo centro do Círculo de Ligação e pelo centro da Aracnoide e do Humor Vítreo, e, prolongada para ambos os lados, [passa] pelos polos do Círculo Pupilar e do Círculo de Ligação.*

Uma vez que a Córnea e a Túnica Úvea se cortam, como se demonstrou na proposição undécima deste [*Corolário*], a linha reta posta nos [respectivos] centros passa pelo centro da interseção, isto é, pelo centro do Círculo Pupilar, pelo corolário do primeiro lema da proposição undécima deste *Corolário*. Esta linha reta, sendo traçada do centro da esfera para o centro de um círculo menor da mesma esfera, será perpendicular a ele, pela sétima [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio; logo, pela oitava do mesmo [livro de Teodósio], prolongada para ambos os lados, passa pelos polos do mesmo, isto é, pelos polos do Círculo Pupilar. Mas como o Círculo de Ligação é paralelo ao Círculo Pupilar, pela décima quarta [proposição] deste [*Corolário*], os polos dos círculos Pupilar e de Ligação serão os mesmos, pela primeira [proposição] do segundo [livro] de Teodósio. Portanto, a linha reta traçada passa pelos polos do Círculo de Ligação. Por esta razão, será perpendicular a ele e passará pelo seu centro, pela décima segunda do primeiro [livro] de Teodósio. Como o círculo da Aracnoide está no mesmo plano do Círculo de Ligação, pois delimita uma espessura igual das Túnicas Córnea e Úvea em toda a parte, como mostra uma hábil dissecação, então, pelo lema primeiro da décima proposição deste [*Corolário*], o centro do círculo de ambas, ou seja, [o centro] do [círculo] de Ligação e o do [círculo] da Aracnoide, será o mesmo. Por esta razão, como o centro de cada circunferência, da Córnea e do Humor Albugíneo e do Cristalino, é o mesmo, pela décima proposição deste [*Corolário*], então, a linha reta que passa pelo polo e pelo centro do Círculo Pupilar passa pelos centros da Córnea, da [Túnica] Úvea, do Humor Albugíneo, do Cristalino e do Círculo do Aracnoide (que também é o mesmo que o centro do Círculo de Ligação), e [essa mesma reta] é perpendicular a este; ou seja, é perpendicular ao círculo do Aracnoide. Mas este círculo do Aracnoide é um círculo menor da esfera do Humor Vítreo que passa fora do centro, como é evidente pela nona [proposição] deste [*Corolário*]. Portanto, aquela [reta], prolongada para ambos os lados, passará pelo centro do Humor Vítreo, pelo corolário da segunda proposição do primeiro [livro] de Teodósio, ou seja, o Humor Vítreo toma a forma de uma esfera, pois este ainda não se tinha definido. Portanto, a mesma linha reta, etc.

Corollarium.
Quum ergo per primum Lemma quinte propositionis huius perpendiculares supra spheram solum visus proueniant qui per eius centrum meant et vnica tantum per omnium orbium oculi centra recta linea producatur si quidem fuerit aliud vitrei humoris et cristalloidis centrum vnicus tantumn visus per primum huius corrogatum, per omnes oculi orbes irrefractus meabit. Reliqui usque ad Arachnoidem directi subinde refringentur.

Propositio decima sexta. *Non est idem Cristalloidis centrum et vitrei humoris.*
Tum primo, quia vt ex dissectione oculi patet, vitreus humor et cristallois sese secant, ergo per secundum lemma vndecime propositionis huius. non erit vtriusque idem centrum. Tum secundo, quia si vtriusque idem centrum existeret, quecunque perpendiculares super Cristalloidem inciderent perpendiculares essent super humoris vitrei circunferentiam. Quare in centro vitrei humoris concurrent et situm permutarent quum ad nerui optici commissuram peruenirent, quod est contra duodecimam propositionem huius. Non est igitur. etc.

Propositio decima septima. *Vitreus Humor Cristalloide rarior est eiusdemque raritatis cum spiritibus visiuis.*
Si quidem vitreus humor equalis esset densitu|dinis cum Cristalloide, producti visus [S24r]
qui super Cristalloidem perpendiculares incidunt non refringerentur in humore
vitreo sed directi in centro | Cristalloidis conuenirent situmque permutarent atque [O23v]
vt prius concluderetur contra duodecimam propositionem huius. Nec etiam Cristalloide densior est, alioqui cum densitas ex secundo Corrogato huius visus cogat ad perpendicularem, ad eam scilicet que per centrum vitrei humoris defertur, propius visus concurrerent priusquam ad centrum cornee deducantur situmque permutarent vt prius, quod maxime inconuenit (rarior igitur est vitreus humor Cristalloide).

Dico secundo illum non esse alterius raritatis quam visiuus spiritus. Sin minus quum vitreus humor ex premissa non sit concentricus Cristalloidi sitque rarius Cristalloide omnes visus preter vnum ex corollario, quindecime huius, in Cristalloide refringentur. Si ergo alterius raritatis essent visiui spiritus qui intra cauitatem optici nerui recipiuntur rursus ibidem refringerentur visus resque visilis

Corolário.
Como, pelo primeiro lema da quinta proposição deste [*Corolário*], só chegam perpendicularmente a uma esfera os raios visuais que passam pelo seu centro, e como é só uma a linha reta que passa pelos centros de todos os orbes do olho, se o centro do Humor Vítreo e o do Cristalino forem diferentes, apenas um único raio visual passará sem se refratar por todos os orbes do olho, pelo primeiro corrogado deste [*Corolário*]; os restantes raios vão direitos até ao Aracnoide e depois refratam-se.

Proposição décima sexta. *O centro do Cristalino e o do Humor Vítreo não são o mesmo.*
Em primeiro lugar, porque o Humor Vítreo e o Cristalino se cortam, como é claro por dissecação do olho; logo, pelo segundo lema da undécima proposição deste [*Corolário*], o centro de um e outro não será o mesmo. Em segundo lugar, porque se o centro de um e outro fosse o mesmo, todas as perpendiculares incidentes no Cristalino seriam perpendiculares à circunferência do Humor Vítreo, razão pela qual concorreriam no centro do Humor Vítreo e mudariam de sítio ao chegar à ligação do nervo ótico, o que é contra a duodécima proposição deste [*Corolário*]. Portanto, não é, etc.

Proposição décima sétima. *O Humor Vítreo é mais rarefeito do que o Cristalino e é da mesma rarefação que os espíritos visivos.*
Se o Humor Vítreo fosse da mesma densidade que o Cristalino, os raios visuais estendidos e incidentes perpendicularmente no Cristalino não se refratariam no Humor Vítreo, mas concorreriam em linha reta no centro do Cristalino mudando de posição, e, como anteriormente, concluir-se-ia contra a duodécima proposição deste [*Corolário*]. Também não é mais denso do que o Cristalino. Caso contrário, como, pelo segundo corrogado deste [*Corolário*], a densidade força os raios para o lado da perpendicular, isto é, para a [reta] que passa pelo centro do Humor Vítreo, os raios visuais concorreriam mais perto, antes de chegarem ao centro da Córnea, mudando de posição como antes, o que não convém de todo. Portanto, o Humor Vítreo é mais rarefeito do que o Cristalino.

Afirmo em segundo lugar que aquele [ou seja, o Humor Vítreo] não é de rarefação diferente da do espírito visivo. Caso contrário, como o Humor Vítreo não é concêntrico com o Cristalino, pela [proposição] anterior, e é mais mais rarefeito do que o Cristalino, todos os raios visuais refratar-se-iam no Cristalino excepto um, pelo corolário da décima quinta [proposição] deste [*Corolário*]. Logo, se os espíritos visivos que são recebidos no interior da concavidade do nervo ótico fossem de diferente rarefação, novamente aí se refratariam os raios visuais, e a coisa visível apa-

monstro similis appareret, imaginibus scilicet varium ordinem in Cristalloide et nerui optici commissura experimentibus. Sunt ergo visiui spiritus et vitreus humor eiusdem densitudinis et humor vitreus Cristalloide rarior.

Corollarium. *Omnes ergo visus in humore vitreo preter vnicum refringuntur a perpendiculari per secundum corrogatum huius.*

Lemma primum. *Si duo circuli inaequales sese secuerint, in inequales sectiones diuidentur, minorque ma|ioris circuli sectio intra minorem circulum complectitur. | Similiter et bine inequales sphere nec se per equalia secabunt, maiorisque minor sectio intra minorem clauditur.* [S24v] [O24r]

Sint primo duo circuli .abc. et .dbc. Sit autem circulus minor .dbc. secans circulum .abc. Dico sectiones dissectorum circulorum de quibus agimus inaequales esse. Sin minus connectantur .bc. signa communis sectionis. Quum ergo propositi circuli .abc. et .bcd. per .bc.[43] sese per equalia secent erit .bc. diameter vtriusque circuli. Quare erunt duo circuli .abc. et .bcd. equales quorum enim dimetientes equales sunt ipsi equales erunt. Sunt autem propositi circuli inequales ex hypotesi, quod est impossibile. Non ergo vterque ex propositis circulis per equalia secatur.

---

43 **per .bc.,** per re *SO*

receria semelhante a um monstro, ou seja, as imagens exprimiriam uma ordem diferente no Cristalino e na ligação do nervo ótico. Logo, os espíritos visivos e o Humor Vítreo são da mesma densidade e o Humor Vítreo é mais rarefeito do que o Cristalino.

Corolário. *Logo, todos os raios visuais excepto um se refratam no Humor Vítreo divergindo da perpendicular, pelo segundo corrogado deste [Corolário].*

Lema primeiro. *Se dois círculos desiguais se intersectarem, cada um ficará dividido em arcos desiguais, e o arco menor do círculo maior ficará contido no interior do círculo menor. Da mesma forma, duas esferas desiguais não ficarão cortadas em partes iguais, e a menor secção da maior fica contida no interior da menor.*

Fig. 15 | Em primeiro lugar, sejam ABC e DBC dois círculos. Seja DBC um círculo menor secante ao círculo [maior] ABC. Afirmo que os arcos dos círculos dissecados de que tratamos são desiguais. Caso contrário, ligue-se os pontos B e C da interseção. Então, como os círculos dados ABC e DBC ficam cortados em partes iguais em B e C, BC será o diâmetro de um e outro. Por esta razão, ABC e BCD serão dois círculos iguais; pois círculos com diâmetros iguais são iguais. Mas os círculos dados são desiguais por hipótese, o que é impossível. Logo, nenhum dos círculos dados é cortado em partes iguais.

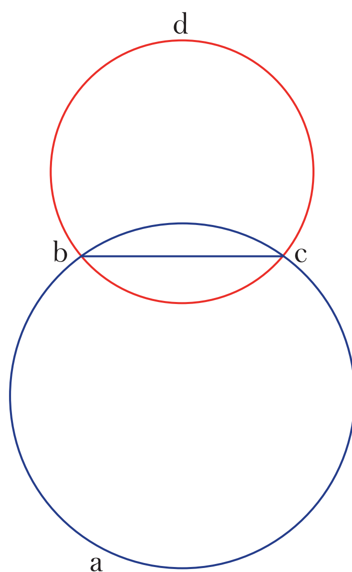


Fig. 15

Dico secundo quod nec maior circulus a minore per equalia disscindi[44] potest. Esto enim .abc. circulus maior. Si is per equalia disscinderetur[45] erit .bc. rursus vt prius producta diameter .abc. circuli maioris. Quare et omnium que in eodem circulo produci possunt per quindecimam tertii Elementorum omnium maxima. Quum autem diameter .abc. sit maior dimetiente .bcd. circuli maioris enim circuli longior est dimetiens, quare .bc. dimetiente circuli .bcd. maior est. Est autem per secundam tertii elementorum .bc. recta linea intra circulum .bcd. maior dimetiente eiusdem circuli, quod est impossibile ex quindecima tertii Elementorum .abc. Circulus ergo per inequalia dispertitur.

Eadem erit ostensio in spheris quoniam earum communis sectio circulus est per vltimum corrogatum huius qui erit vtriusque maximus aut maio|ris saltem sphere [S25r] maximus tunc ducta eius diametro qui | et maioris sphere diameter est repetenda [O24v] erit premissa ostensio, nam et in spheris dimetiens omnium maxima est. Quare ne lectoribus sim fastidio non magis huius demonstrationem in spheris explicabo.

Iam demum dico .bec. maioris circuli ex premissis sectionem minorem esse. Sin minus connectantur .bc. vt prius. bifariamque secetur in signo .f. ab eoque in continuum et directum ad angulos rectos producatur per vndecimam primi Elementorum .fd.

---

44 **disscindi** *S*, discindi *O*

45 **disscinderetur** *S*, discinderetur *O*

Em segundo lugar, afirmo que o círculo maior não pode ser dissecado em partes iguais pelo menor. Seja ABC um círculo maior. Se for dissecado em partes iguais, BC será novamente, como anteriormente, um diâmetro traçado do círculo maior ABC. Por esta razão, também será a maior de todas [as retas] que se podem traçar no mesmo círculo, pela décima quinta [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*. Mas, como o diâmetro do círculo ABC é maior do que o diâmetro do círculo BCD, pois o diâmetro do círculo maior é mais comprido, por esta razão, BC é maior do que o diâmetro do círculo BCD. Mas, pela segunda [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*, BC é uma linha reta no interior do círculo BCD maior do que o diâmetro do mesmo círculo, o que é impossível pela décima quinta [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*. Logo, o círculo ABC é dividido em partes desiguais.

A prova será igual em esferas, porque a sua interseção é um círculo, pelo último corrogado deste [*Corolário*], e este será um círculo máximo de ambas, ou pelo menos um círculo máximo da esfera maior, então, traçado o seu diâmetro, que também é o diâmetro da esfera maior, deve ser aplicada a prova anterior, pois também em esferas o diâmetro é a maior de todas [as retas] traçadas. Por esta razão, para não me tornar aborrecido para o leitor, não desenvolverei mais a demonstração disto em esferas.

Fig. 16 | Finalmente, afirmo que BEC é o arco menor do círculo maior, pelas anteriores. Caso contrário, ligue-se B a C, como anteriormente, e bissete-se [BC] no ponto F. Deste, trace-se continuamente a direito a perpendicular FD, pela [proposição] décima primeira do primeiro [livro] dos *Elementos*.

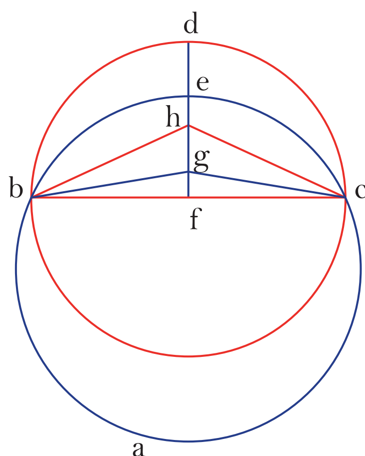


Fig. 16

In .fd. ergo vtrimque producta per corollarium prime propositionis tertii Elementorum erit vtriusque circuli .abc. et .bcd. centrum. Et quoniam concessum est .bc. maioris circuli sectionem maiorem esse in ea ergo erit eiusdem centrum, est autem et in recta linea .fd. centrum ergo circuli .abc. est in recta linea .fd. ad partes .d. sit vt in .g. Et quoniam circulus .bdc.[46] minor est circulo .abc. erit et semidiameter semidiametro minor. Quum autem .bcd. promineat erit centrum circuli .bcd. in recta linea .gd. ad partes .d. sit vt in .h. Connectantur autem .gbc. .bhc. erit ergo per vicesimam primam primi Elementorum angulus .bgc. maior angulo .bhc. Nam super eadem sunt basi .bc. suntque latera .bgc. intra triangulum .bhc. Recta ergo linea .bc. corda vtriusque circuli ad centrum maioris maiorem angulum complectitur quam ad centrum minoris circuli quod est impossibile vt statim ostendemus. Est ergo .bec. maioris circuli sectio minor. Quod erat probandum.

Iam opere precium erit demonstrare quod eadem recta linea ineaqualibus circulis aptata minorem angulum ad centrum maioris complectitur, quam ad cen|trum minoris. Sint enim duo circuli .cd. et .ef. inequales sit ipsius quidem .cd. [S25v] minoris centrum .a. | ipsius autem .ef. maioris centrum .b. connectantur autem .ca. [O25r] et .ad. .eb. et .bf. Dico angulum qui ad.a. maiorem esse angulo qui ad .b.

Quoniam enim circulus cuius centrum .b. maior est circulo cuius centrum .a. erit semidiameter .bf. maior semidiametro .ad. Fiat ergo per duodecimam sexti Elementorum sicut .bf. ad .ad. sic .ef. ad .dg.

46 **.bdc.** *O*, .bd. *S*

Então, o centro de ambos os círculos ABC e BCD estará em FD prolongada para ambos os lados, pelo corolário da primeira proposição do terceiro [livro] dos *Elementos*. Ora, uma vez que se admitiu que B[E]C é o arco maior do círculo maior, então nele estará o centro do mesmo [círculo]; mas também está na linha reta FD; logo, o centro do círculo ABC está na linha reta FD para o lado de D, seja em G. Uma vez que o círculo BDC é menor do que o círculo ABC, também o semidiâmetro será menor do que o semidiâmetro. Mas, como BCD é proeminente, o centro do círculo BCD estará na linha reta GD para o lado de D, seja em H. Ligue-se G a B e a C, e B a H e a C, então o ângulo BGC será maior do que o ângulo BHC, pela vigésima primeira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, pois BG e GC são lados sobre a mesma base BC e estão no interior do triângulo BHC. Logo, a linha reta BC, corda de um e outro círculo, subtende um ângulo ao centro maior do [círculo] maior do que [o ângulo] ao centro do círculo menor, o que é impossível, como demonstraremos já a seguir. Logo, BEC é o arco menor do círculo maior. O que se queria provar.

Figs. 17 e 18

| Agora, valerá a pena demonstrar que a mesma linha reta, posta em círculos desiguais, abarca um ângulo ao centro menor do [círculo] maior, do que o ângulo ao centro do menor. Sejam CD e EF dois círculos desiguais. Seja A o centro do círculo menor CD, e B o centro do círculo maior EF. Ligue-se C a A e A a D, E a B e B a F. Afirmo que o ângulo em A é maior do que o ângulo em B.

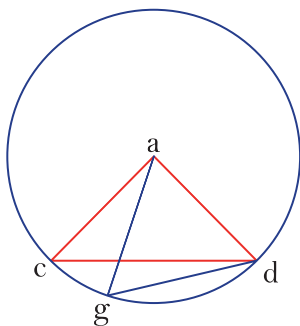


Fig. 17

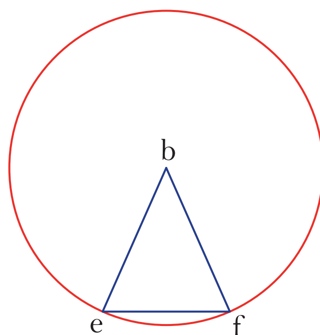


Fig. 18

Uma vez que o círculo com centro B é maior do que o círculo com centro A, o semidiâmetro BF será maior do que o semidiâmetro AD. Então, faça-se, pela décima segunda [proposição] do sexto [livro] dos *Elementos*, BF:AD=EF:DG[8]. Aplique-se

8 Usamos notação matemática moderna nos argumentos de proporção, para facilitar a leitura.

Circulo autem .cd. aptetur .dg. per primam quarti. Et erit ipsa .gd. minor .cd. que equalis est ipsi .ef. Quare per vicesimam octaua tertii .g. signum cadet inter .c. et .d. atque angulus .gad. minor erit angulo .cad. Et quoniam eadem est ratio .bf. ad .ad. que .ef. ad .dg., est autem .bf. ad .ad. sicut .be. ad .ag. sunt enim aequales .bf. et .be., similiter .ga. et .ad., quare duo triangula .gad. .ebf. habent latera proportionabilia, ergo sunt similia per quintam sexti. Ergo per diffinitionem angulus qui ad .b. equalis est angulo .gad. Est autem .gad. angulus minor angulo .cad. angulus ergo qui ad .b. minor est angulo .cad. Quod fuit demonstrandum.

Lemma secundum. *Oblique incidentes radii in medium rarius qui tandem producti occurrerent, si ad aequales angulos introrsum sumptos decumbunt. ad equales angulos refringuntur; qui autem propius producti occurrerent. ii in minori angulo refringuntur quam qui remotius.*

Nam procidentes oblique radii qui tandem producti[47] occurrerent semper ad idem signum con|cursus tendunt. Medii autem raritas nonnihil efficit ne occurrant [S26r] illosque relaxat. Tantum autem adiumenti vnus radius indipiscitur, | sicut quicun- [O25v] que alter, qui ergo propius occurrere debent, quum magis ad acutiem tendant atque fortius adunentur, minus laxari a rarioris medii indulgentia poterunt, qui vero equaliter eque etiam soluentur quod fuit probandum.

Propositio decima octaua. *Non in minorem vitreus humor spheram tenuatur quam ea esset que per eosdem terminos oculo concentrica sinuaretur, sed aut in planam superficiem dilatatur, aut in maiusculam spheram excrescit.*

Demonstratum enim est propositione decima sexta huius non esse idem centrum Cristalloidis et vitrei humoris alioqui visus super vitreum humorem non refringerentur et in centro oculi concurrerent. Quod si in circulo commissure qui vitreo humori communis est vitreus humor in minorem spheram quam esset oculi concentrica laxaretur eius centrum ad anteriorem oculi partem procederet quum enim commissure circulus ad anteriorem oculi partem vt experimento compertum habetur procedat minor sphere concentrice oculo sectio ad anteriorem oculi partem producitur que per primum lemma huius a minore sphera complectitur. Quare sicut de vuea probatum est, si in minorem spheram vitreus humor turgesceret eius centrum in anteriore oculi parte complecteretur. Ergo visus ad vitreum humorem | prouenientes, quum ad [S26v] centrum tendant propius niterentur, quam si in concentricam spheram inciderent. Ast in hanc incidentes in centro oculi concurrunt ex propositione decima sexta huius

47 **producti,** obliqui *SO*

DG ao círculo CD, pela primeira do quarto. GD será menor do que CD, que é igual a EF. Por esta razão, pela vigésima oitava do terceiro, o ponto G cairá entre C e D, e o ângulo GAD será menor do que o ângulo CAD. Como BF:AD=EF:DG, mas BF:AD=BE:AG, pois BF e BE são iguais, tal como GA e AD, razão pela qual os dois triângulos GAD e EBF têm lados proporcionais, então são semelhantes, pela quinta do sexto. Portanto, por definição, o ângulo em B é igual ao ângulo GAD. Mas o ângulo GAD é menor do que o ângulo CAD; logo, o ângulo em B é menor do que o ângulo CAD. O que se quis demonstrar.

Lema segundo. *Os raios incidentes obliquamente num meio mais rarefeito que, prolongados, acabariam por se encontrar, se caírem em ângulos iguais tomados para o lado de dentro, refratam-se em ângulos iguais; os que, prolongados, acabariam por se encontrar mais perto, refratam-se num ângulo menor do que os que se encontram mais longe.*
Os raios incidentes obliquamente que, prolongados, acabariam por se encontrar, tendem sempre para o mesmo ponto de concorrência. Contudo a rarefação do meio contribui para fazer com que não se encontrem e deixa-os livres de constrangimentos. Um raio recebe tanta influência como qualquer outro, logo, os que devem encontrar-se mais perto, como tendem para a agudeza e se reúnem com mais força, poderão estar menos livres de constrangimentos por indulgência do meio mais rarefeito, mas os que incidem igualmente, também se quebram em ângulos iguais. O que se quis provar.

Proposição décima oitava. *O humor vítreo não está contido numa esfera menor do que seria aquela que se encurvasse concêntrica ao olho passando pelos mesmos pólos, pelo contrário, ou se dilata até uma superfície plana ou se expande até uma esfera bem maior.*
Demonstrou-se na proposição décima sexta deste [*Corolário*] que o centro do Cristalino e o do Humor Vítreo não são o mesmo; caso contrário os raios visuais não se refratariam no Humor Vítreo e seriam concorrentes no centro do olho. Ora, se, no Círculo de Ligação, que é comum ao Humor Vítreo, o Humor Vítreo se espalhasse numa esfera menor do que seria uma [esfera] concêntrica ao olho, o seu centro avançaria para a parte anterior do olho, pois, uma vez que o Círculo de Ligação avança para a parte anterior do olho (como se comprova por experiência), uma secção menor da esfera concêntrica ao olho prolonga-se para a parte anterior do olho, e essa, pelo primeiro lema desta [proposição], está contida na esfera menor. Por esta razão, como se provou a respeito da Úvea, se o Humor Vítreo se arredondasse numa esfera menor, o seu centro ficaria contido na parte anterior do olho. Logo, os raios visuais, ao chegarem ao Humor Vítreo, como tendem para o centro, procurariam concorrer mais perto do que se incidissem na esfera concêntrica. Mas, ao incidir nesta, concorrem no centro do olho, pela proposição décima sexta deste

ac eius demonstratione, ergo per secundum lemma huius propositionis radii incidentes in minorem spheram in minori angulo refringerentur quam si in concentricam inciderent. | Quare simul concurrerent antequam ad centrum totius oculi [O26r] peruentum esset. quod est contra duodecimam huius. Vitreus ergo humor aut constat plana superficie in qua visus ita confringantur, vt axis totius visionis per centrum circuli nerui optici transeat, aut in maioris sphere superficiem circinatur, in qua ad hunc modum visus refringantur, ita vt eundem ordinem per nerui optici cauitatem seruent quem in re visa et cristalloide optinent[48]. Quod fuerat probandum.

Propositio decima nona. *Si vnico oculo res quepiam videatur, visiue piramidis axis irrefractus ad nerui optici commissuram meare poterit, ob id forsan expeditius partim vnico oculo cernimus.*

Nam ex corollario decime septime huius vnicus tantum visus irrefractus per oculum ad nerui optici commissuram meat reliqui autem in vitreo humore refringuntur. Est autem irrefractus visus, vt ex demonstratione eiusdem patuit, qui per centra omnium particularium orbium oculi transit, qui per quindecimam huius per medium pupillaris circuli atque per eius polum transit. Quum autem visus ad oculum venientes eundem ordinem seruant sicut est in re visa vt in demonstratione | decime huius explicitum est, visus ergo qui ad medium oculi (hoc est ad polum [S27r] pupillaris circuli) venit a signo medio rei vise ducitur. Quum autem res visa sit basis piramidis visiue que ad oculum cogitur erit eius axis visus ille refractus per omnia centra means. Quare tunc euidentius medium signum rei vise videbitur, visu quippe nusquam refracto et ob id breuissimo, tam et si multa alia adminiculentur puta plures visiui spiritus qui ad vtrumque oculum dimittebantur. Quapropter cum vnico oculo quippiam | intuemur eius pupilla plus solito tenditur. Si ergo vnico oculo etc. [O26v]

Propositio vicesima. *Si vero res quepiam vtroque oculo cernitur, quum visus reliqui tum et axes visilium piramidum refringuntur.*

Nam vt experientia constat bini oculi in fronte contrarium situm obtinent, nerui autem optici sub medio frontis iunguntur, quem locum nerui optici commissuram appellauimus, quum ergo res quepiam vtroque oculo cernitur, necessum est vt rei visilis imagines in vtroque oculo eundem situm seruent, quem et in re visa. Quare et a signo medio rei visilis axes

48 **optinent** *S*, obtinent *O*

[*Corolário*] e pela sua demonstração; logo, pelo segundo lema desta proposição, os raios incidentes na esfera menor refratar-se-iam num ângulo menor do que se incidissem na concêntrica. Por esta razão, concorreriam antes de chegar ao centro do olho todo, o que é contra a décima segunda deste [*Corolário*]. Logo, o Humor Vítreo, ou é constituído por uma superfície plana na qual os raios visuais se refratam de tal forma que o eixo da visão toda passa pelo centro do círculo do nervo ótico, ou toma a forma da superfície de uma esfera maior na qual se refratam deste modo, de tal forma que conservam a mesma ordem ao longo da concavidade do nervo ótico que recebem da coisa vista e do Cristalino. O que se queria provar.

Proposição décima nona. *Se uma coisa qualquer se vê com um olho apenas, o eixo da pirâmide visiva conseguirá passar não refratado para a ligação do nervo ótico; provavelmente é esta a razão por que vemos mais facilmente com um só olho.*
Pelo corolário da décima sétima [proposição] deste [*Corolário*] é só um o raio visual que passa não refratado pelo olho para a ligação do nervo ótico, ao passo que os restantes se refratam no Humor Vítreo. Mas um raio não refratado, como ficou claro pela demonstração da mesma [proposição], é o que passa pelos centros de todos os orbes individuais do olho, e passa, pela décima quinta deste [*Corolário*], pelo meio do Círculo Pupilar e pelo seu polo. Como os raios que chegam ao olho conservam a mesma ordem que existe na coisa vista, como se explicou na demonstração da décima [proposição] deste [*Corolário*]; então o raio que chega ao meio do olho (isto é, ao polo do Círculo Pupilar) é traçado a partir do ponto médio da coisa vista. Mas como a coisa vista é a base da pirâmide visiva que se vai estreitando na direção do olho, o seu eixo será aquele raio irrefratado que passa por todos os centros. Por esta razão, o ponto médio da coisa vista ver-se-á então com mais clareza, a saber, por meio do raio não refratado para nenhum lado e por isso mais curto, ainda que muitas outras coisas possam contribuir para isso, por exemplo, o facto de serem enviados mais espíritos visivos para cada olho. Por esta razão, quando vemos algo com um só olho, a sua pupila alarga-se mais do que habitualmente. Logo, se com um único olho, etc.

Proposição vigésima. *Mas se uma coisa se vê com ambos os olhos, tanto os demais raios visuais como os eixos das pirâmides visíveis são refratados.*
Como é claro por experiência, os dois olhos na fronte ocupam um lugar oposto, e os nervos óticos juntam-se no meio da fronte, no lugar a que chamámos ligação do nervo ótico, então, quando uma coisa se vê com ambos os olhos, é necessário que as imagens da coisa visível conservem em cada olho a mesma posição que também têm na coisa vista. Por esta razão, também os eixos da coisa visível avançam a partir

ad vtrumque oculum producuntur. Quod si hi non reflecterentur cum in nerui optici commissura concurrant, vt propositione duodecima huius demonstratum est, et in medio rei visilis etiam iungantur, vt in premissa demonstratione expositum est, bis duo hi axes occurrerent atque od id due recte linee superficiem concluderent, quod est impossibile ex vltima communi sententia. Quare visiui axes refringuntur, quum vtroque oculo quippiam intuemur. Sed et reliqui visus | per corollarium decime septime huius. Si ergo res quepiam. etc. [S27v]

Corollarium. *Ob id fieri arbitror vt vterque oculus ad vnum signum moueatur vbi quicquam intueri volumus nempe vt eundem ordinem in vtroque oculo imagines venientes seruent.*

Hec habui que de videndi ratione atque oculi forma quam breuissime potui tumultuaria editione conscriberem. In quibus si quid minus apposite elimateque dictum est temporis importunitati asscribatis velim. Si quid vero minus Romane dictum, id Barbarice institutioni in qua sum educatus, condonetis oro quoniam mecum satis feliciter actum erit, si mihi liceat et moribus antiquis viuere atque antiquorum doctrina imbui verbis autem recentioribus loqui. Iam dein Euclides audiendus est ex interpretatione Zamberti nostris nouiter demonstrationibus illustratus. Explicit Francisci de Mello In Perspectivam Euclidis Corollarium.

do ponto médio até cada um dos olhos. Caso estes não se refratassem, como concorrem na ligação do nervo ótico, como se demonstrou na proposição décima segunda deste [*Corolário*], e, além disso, se juntam no meio da coisa visível, como se explicou na demonstração anterior, estes dois eixos encontrar-se-iam duas vezes e, por isso, duas linhas retas encerrariam uma superfície, o que é impossível, pela última noção comum. Por esta razão, os eixos visivos refratam-se quando vemos algo com ambos os olhos. Mas [o mesmo sucede] também [com] os restantes raios visuais, pelo corolário da décima sétima [proposição] deste [*Corolário*]. Logo, se uma coisa, etc.

Corolário. *Penso que é por isso que sucede que cada um dos olhos se move para um ponto onde queremos ver algo, a saber, para que as imagens que chegam mantenham a mesma ordem em cada olho.*

Considerei que devia escrever estas coisas sobre a maneira de ver e sobre a estrutura do olho tão sucintamente quanto pude numa edição feita precipitadamente. Nelas, se algo se disse menos apropriado ou menos polido, peço que o atribuas à escassez de tempo; se algo se disse de forma menos romana, peço que o atribuas à bárbara instituição em que fui educado, porque da minha parte, fico plenamente satisfeito se me for permitido viver de acordo com os costumes antigos e ser instruído na doutrina dos antigos mas falar com termos modernos. De seguida, passemos a ouvir Euclides a partir da interpretação de Zamberto e ilustrado com as nossas inéditas demonstrações. Terminou o *Corolário* de Francisco de Melo à *Perspetiva* de Euclides.

COMENTÁRIOS À *PERSPETIVA* DE EUCLIDES

Perspectiua Euclidis cum Francisci de Mello commentariis [S28r, O27r]

Suppositiones

Supponatur ab oculo visus emissos in rectas lineas ferri interualumque quoddam inuicem efficientes. et sub visibus figuram comprehensam esse conum verticem habentem ad oculum basim vero ad fines rerum visarum.
Ea videntur ad quae visus perueniunt.
Ad quae visus non perueniunt ea non spectantur.
Sub maiori angulo spectata maiora apparent.
Sub minori angulo minora.
Aequalia vero videntur quae aequalibus angulis spectantur.
Quae sub sublimioribus radiis spectantur sublimiora apparent.
Sublimiorem radium vocat eum qui cum demissa ab oculo in subiectum planum perpendiculari maiorem angulum ad oculum constituit contra vero humiliorem qui minorem angulum cum eadem efficit dextrum vero aut sinistrum secundum aspicientis positum exempla facile aduertenti succurrent.
Quae vero sub humilioribus radiis videntur humiliora apparent.
Et similiter quae sub dexterioribus spectantur radiis dexteriora apparent.
| Quae uero sub sinisterioribus radiis spectantur, sinisteriora apparent. [S28v]
Quae sub pluribus angulis spectantur expeditius apparent.

Theorema primum. *Eorum quae sub aspectum cadunt, quicquam simul totum aspici minime potest.*
| Sub aspectum oculi .a. cadat visibile .bc. in quod procidant radii .ab. .ac. .ad. [O27v]

Dico .bc. totum simul ab oculo .a. aspici minime posse.

Quoniam enim per primam suppositionem visus ab oculo in rectas lineas feruntur interuallum quoddam efficientes sub quibus visibile comprehenditur. Sint .ba. .ad. proximi uisus consequenter se habentes sub quibus visibile spectetur angulum efficientes[1] .bad. minimum sub quo .a. oculus possit quidam spectare. Et in linea .bd. suscipiatur ex arbitrio signum .e.

---

1 **efficientes** *O*, effecientes *S*

Perspetiva de Euclides com os comentários de Francisco de Melo

Suposições

[1] Suponhamos que os raios visuais emitidos do olho se estendem em linha reta, estabelecendo uma certa distância entre si, e que a figura compreendida sob os raios visuais é um cone que tem o vértice no olho e a base nos extremos das coisas vistas.
[2] Coisas a que chegam raios visuais vêem-se.
[3] Coisas a que não chegam raios visuais não se veem.
[4] Coisas vistas sob um ângulo maior aparecem maiores;
[5] [coisas vistas] sob um ângulo menor, [aparecem] menores;
[6] e as [coisas] que se veem sob ângulos iguais vêem-se iguais.
[7] Coisas que se veem sob raios mais elevados aparecem mais elevadas.
Chama «raio mais elevado» àquele que constitui, com a perpendicular baixada do olho para o plano subjacente, um ângulo maior no olho; «raio mais baixo», àquele que faz, com ela, um ângulo menor; «raio à direita» e «raio à esquerda», de acordo com a posição do observador; os exemplos facilmente virão à cabeça de quem está a acompanhar [o raciocínio].
[8] Coisas que se veem sob raios mais baixos aparecem mais baixas.
[9] Da mesma maneira, coisas que se veem sob raios mais à direita, aparecem mais à direita;
[10] e coisas que se veem sob raios mais à esquerda, aparecem mais à esquerda.
[11] Coisas que se veem sob maior número de ângulos aparecem mais nitidamente.

Teorema primeiro. *De coisas que caem no olhar, não conseguimos ver nenhuma no seu todo ao mesmo tempo.*

[Fig. 19] | No olhar do olho A, caia o visível BC, e nele incidam os raios AB, AC e AD.

Afirmo que não se consegue ver BC na sua totalidade e ao mesmo tempo a partir do olho A.

Como, pela primeira suposição, os raios visuais sob os quais o visível está compreendido, se estendem a partir do olho em linha reta estabelecendo entre si uma certa distância, sejam BA e AD raios visuais vizinhos[1] e sucessivos, sob os quais se vê o visível, fazendo o ângulo BAD o mais pequeno ângulo sob o qual o olho A consegue ver algo. Na linha BD, tome-se, arbitrariamente, o ponto E.

1 Ou seja, sem nenhum de permeio.

Dico itaque .eb. minime spectari ab oculo .a.

Quoniam enim proximi visus consequenter se habentes sub quibus visibile spectatur sunt .ba. .ad. angulum efficientes .bad. minimum sub quo fit visio ab oculo .a. Minor <vero> est angulus .bae. angulo .bad. igitur .ab. .ad. visus consequenter se habentes non perueniunt ad .be. Quare per tertiam suppositionem .be. non spectatur. Eadem ratione neque .de. Itaque ipsum .bc. quod sub aspectum .a. cadit totum simul non potest videri. Vniuersa enim spectantur immutantque visum, sed non singula nisi ex accidenti.

Theorema secundum. *Equalibus interuallo magnitudinibus positis propius positae euidentius spectantur.*

Sint enim aequales magnitudines .gf. .cd. interuallo | positae ad lineam .dbe. sintque [S29r] parallele. Oculus autem .e. a quo procidant visus .eb. .ea. .ec. .ed. productis .eac. .ebd. Sitque .ab. propinquior connectanturque .ef. .eg.

Dico quod .gf.[2] euidentius spectatur.

2 **.gf.**, .af. *SO*

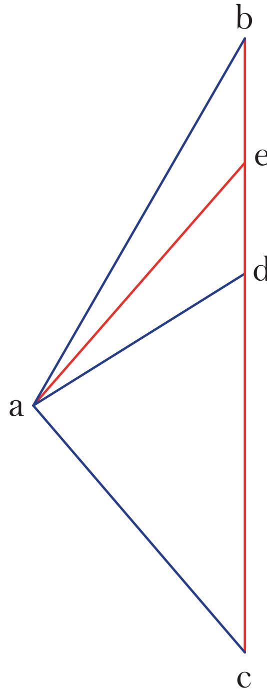


Fig. 19

Afirmo que EB não se vê do olho A.

Como os raios visuais vizinhos e sucessivos sob os quais se vê o visível são BA e AD, que fazem o ângulo BAD, o menor sob o qual se vê a partir do olho A, [e] o ângulo BAE é menor do que o ângulo BAD, então os raios visuais sucessivos AB e AD não chegam a BE. Por isso, pela terceira suposição, não se vê BE. Pela mesma razão, também não se vê DE. Em consequência, não se consegue ver o próprio BC, que cai sob o olhar de A, na sua totalidade ao mesmo tempo. A verdade é que o conjunto de todas estas coisas se vê e altera o que se vê, mas não cada uma delas em separado, a não ser acidentalmente.

Teorema segundo. *Se grandezas iguais forem colocadas à distância, as [grandezas] colocadas mais próximo vêem-se mais nitidamente.*

[Fig. 20] | Sejam GF e CD grandezas iguais, colocadas à distância na linha DBE e sejam paralelas. Seja E o olho, e dele procedam os raios visuais EB, EA, EC e ED, estendidos [como] EAC e EBD. Esteja AB mais próximo e ligue-se E a F e E a G.

Afirmo que GF se vê com mais nitidez.

Quoniam enim in parallelas rectas lineas .ab. .cd. cadit recta linea .ed. est per 29am primi elementorum | angulus .eba. aequalis angulo .edc. Rursus quoniam in easdem rectas[3] cadit linea .ec. erit per eandem angulus .ecd. aequalis angulo .eab. estque et angulus qui ad .e. duobus triangulis .cde. .abe. communis. Aequianguli ergo erunt .cde. .abe. trianguli. Per 4am igitur 6ti elementorum sicut .de. ad .eb. ita .cd. ad. .ab. Est autem .de. maior .eb. .dc. igitur .ab. maior est. Estque .fg. ipsi .cd. aequalis .fg. igitur ipsa .ab. maior est .ce. igitur linea diuidit lineam .gf.[4] Quare per 4m nostrum corrogatum in Elementa Euclidis .ce. diuidit angulum .gef. Quicunque igitur visus perueniunt ad .cd. perueniunt et ad .fg.[5] Perueniunt tamen nonnulli ad .gf. qui non ad .ab. vel .cd. puta qui ad .g. et .f.[6] feruntur .gf.[7] igitur pluribus visibus spectatur quam .cd. et concisius et per minores partes videtur pluribusque angulis. Quare per 11am suppositionem euidentius videtur .ab. quam .cd. Quod fuit probandum. [O28r]

Theorema tertium. *Eorum quae spectantur vnumquodque longitudinem interualli habet aliquam qua aduentante non amplius spectatur.*

Ab oculo .a. spectatur .bc.

Dico esse quandam longitudinem interualli qua aduentante non amplius spectabitur[8] .bc. ab oculo .a.

---

3 **in easdem rectas,** in eadem recta *SO*
4 **.gf.**, .af. *SO*
5 **ad .fg.**, ad .fb. *SO*
6 **.f.,** .b. *SO*
7 **.gf.,** .gb. *SO*
8 **spectabitur,** spectabatur *SO*

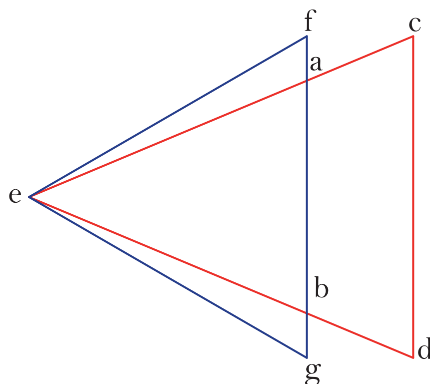


Fig. 20

Como a linha reta ED cai nas linhas retas paralelas AB e CD, [então,] pela vigésima nona [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo EBA é igual ao ângulo EDC. Novamente, como a linha [reta] EC cai nas mesmas retas, [então,] pela mesma [proposição dos *Elementos*], o ângulo ECD será igual ao ângulo EAB. Além disso, o ângulo em E também é comum aos dois triângulos CDE e ABE. Então, os triângulos CDE e ABE serão equiângulos. Assim, pela quarta do sexto dos *Elementos*, DE:EB=CD:AB. Mas DE é maior do que EB; logo, CD é maior do que AB. Mas FG é igual a CD; logo, FG é maior do que AB. Então, a linha CE divide a linha GF. Por esta razão, pelo nosso quarto corrogado dos *Elementos* de Euclides, CE divide o ângulo GEF. Portanto, quaisquer raios que cheguem a CD, também chegam a FG. No entanto, alguns raios chegam a GF, mas não a AB (ou a CD), como, por exemplo, os que chegam a G ou a F. Portanto, GF vê-se por meio de um maior número de raios visuais do que CD. Vê-se também dividido em mais partes e em partes mais pequenas por meio de um maior número de ângulos. Por isso, pela suposição undécima, AB vê-se mais nitidamente do que CD. O que se queria provar.

Teorema terceiro. *Para cada objeto avistado há um certo comprimento da distância*[2]*, atingido o qual, [o objeto] deixa de se ver.*

[Fig. 21] | Do olho A, veja-se BC.

Afirmo que há um certo comprimento da distância, atingido o qual, se deixará de ver BC a partir do olho A.

2 Trata-se aqui da distância entre observador e objeto.

Procidant enim visus .ac. .ab. qui quoniam non sunt continui per primam suppositionem | consequenter proximi se habeant .ac. .ad. vt sit .cad. minimus angulus [S29v] sub quo .a. oculus potest spectare et in linea .dc. suscipiatur pro libito signum .e. et ducatur .ae. per primum postulatum. Et sicut se habet .ce. ad .bc. sic se habeat .ac. ad .af. per 11^{am} 6^{ti} elementorum.

Dico quod in .f. .cb. posita non spectatur.

Excitetur enim | .fg. parallela ipsi .cb. per 31^{am} primi elementorum et quoniam [O28v] .ae. .fg. non sunt parallelae (quia alias .ce. .ae. essent parallelae per 30. primi elementorum) productae tandem concurrent per diffinitionem sit concursus in .g. Quoniam igitur in .fg. .ce. parallelas recta cadit linea .ag. per 29^{am} primi elementorum .fga. .cea. anguli aequales sunt. Et per eandem .gfa. .eca. aequales sunt et .eac. communis .ace. .agf. ergo triangula aequiangula sunt, et per 4^{am} 6^{ti} elementorum sicut .ac. ad .af. sic .ce. ad .fg. posita est autem .ce. ad .cb. vt .ac. ad .af. per 11^{am} ergo quinti elementorum sicut .ec. ad .cb. ita .ec. ad .fg. et per 9^{am} quinti .fg. .cb. aequales sunt. Posita igitur .bc. in .fg. conuenient per 8^{am} communem sententiam .bc. .fg. Et quoniam minor est angulus .fag. angulo .cad. per 9^{am} communem sententiam qui tamen angulus .cad. minimus est sub quo videt oculus .a. Igitur consequenter se habentes visus .af. .ad. non perueniunt vsque ad .fg. quare per 3^{am} suppositionem .fg. siue .bc. posita in .f. non amplius spectabitur. Quod erat probandum.

Visus autem consequenter se habentes voco proximos quibus propositus oculus cernere quidquam potest.

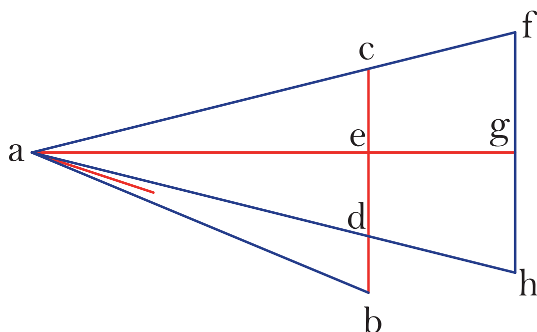


Fig. 21

Estendam-se os raios visuais AC e AB. Como não são contínuos[3], pela primeira suposição, sejam AC e AD, os [raios visuais] vizinhos e sucessivos, de tal forma que CAD seja o menor ângulo sob o qual o olho A consegue ver. Na linha DC, tome-se um qualquer ponto E e trace-se AE, pelo primeiro postulado. Ponha-se CE:BC=AC:AF, pela décima primeira [proposição] do sexto [livro] dos *Elementos*.

Afirmo que não se vê a [linha] CB colocada em F.

Trace-se FG, paralela a CB, pela trigésima primeira do primeiro dos *Elementos*. Como AE e FG não são paralelas (porque, de outra maneira, CE e AE seriam paralelas pela trigésima do primeiro dos *Elementos*), mas, por definição, serão concorrentes quando prolongadas, seja G o ponto de concorrência. Como a linha reta AG cai nas paralelas FG e CE; [então], pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*, os ângulos FGA e CEA são iguais. Pela mesma [proposição dos *Elementos*], GFA e ECA são iguais. Mas EAC é comum. Então, os triângulos ACE e AGF são equiângulos. Pela quarta do sexto dos *Elementos*, AC:AF=CE:FG. Mas pôs-se CE:CB=AC:AF; logo, pela décima primeira do quinto dos *Elementos*, EC:CB=EC:FG, e, pela nona do quinto, FG e CB são iguais. Então, se se colocar BC em FG, BC e FG sobrepõem-se, pela oitava noção comum [do primeiro livro dos *Elementos*]. Como o ângulo FAG é menor do que o ângulo CAD, pela nona noção comum [do primeiro livro dos *Elementos*], e o ângulo CAD é o menor ângulo sob o qual o olho A vê, então os raios visuais sucessivos AF e AD não chegam a FG. Por isso, pela terceira suposição, FG (ou BC colocada em F) deixará de se ver. O que se queria provar.

Chamo «raios sucessivos» aos [raios mais] próximos [um do outro] por meio dos quais o olho proposto consegue discernir alguma coisa.

---

3 Aqui, «continui» refere-se, portanto, à distribuição.

Theorema quartum. *Equalibus interuallis in eadem recta linea existentibus, quae ex pluri distantia spectantur minora apparent.*

| In eadem recta linea .ab. sint aequalia interualla .ac. .cd. que spectentur ab oculo .e. ex maiori autem distantia spectetur .cd. [S30r]

Dico .cd. minus apparere quam .ac.

Angulo enim .ced. ponatur aequalis angulus .cef. per 23.am primi Elementorum. Et quoniam .ae. .ce. in oculo .e. faciunt | angulum non erunt in directo .ae. .ec. quare [O29r] signum .e. erit extra lineam .ab. infinite productam. Excitetur itaque .eg. perpendicularis ipsi .ab. per 12.am primi Elementorum. Quoniam itaque rectus est .egb. angulus per 10.am definitionem eiusdem, et per 16.am eiusdem .efc. angulus maior est angulo .ega. maiore angulo .ecf. per 32.am eiusdem primi, acutus est ergo .ecg. obtusus vero .ecd. Sed angulus .ecg. duobus .cde. .ced. aequalis est per eandem 32.am ergo minores recto sunt anguli .cde. .ced. pariter accepti. Et quoniam aequales sunt .ced. .cef. minor erit recto .cef. duobus ob id rectis minores erunt .fed. .edc. Lineae igitur .ef. .cd. concurrunt per 29.am eiusdem vt in signo .f. Et quoniam maior est .ecb. angulus angulo .ecf. ponatur aequalis per 23.am primi.eck. Secabit igitur latus .ed. linea .ck.

Teorema quarto. *De comprimentos iguais que se encontram na mesma linha reta, os que se veem de uma distância maior aparecem menores.*

[Fig. 22] | Estejam os comprimentos iguais AC e CD na mesma linha reta AB. Sejam vistos a partir do olho E, e veja-se CD de mais longe.

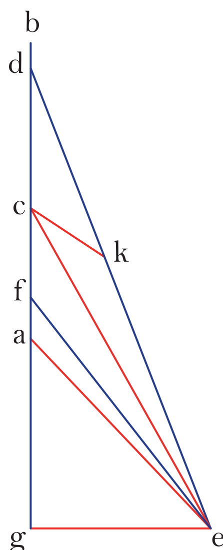


Fig. 22

Afirmo que CD aparece menor do que AC.

Ponha-se o ângulo CEF igual ao ângulo CED, pela vigésima terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Como AE e CE fazem um ângulo no olho E, então AE e EC não estarão a direito; por isso, o ponto E estará fora da linha AB, prolongada infinitamente. Assim sendo, trace-se EG perpendicular a AB [prolongada infinitamente], pela décima segunda do primeiro dos *Elementos*. Uma vez que o ângulo EGB é reto, pela décima definição do mesmo [livro], e [uma vez que], pela décima sexta do mesmo [livro], o ângulo EFC é maior do que o ângulo EGA, maior [por sua vez] do que o ângulo ECF, pela trigésima segunda do mesmo primeiro, então ECG é agudo e ECD obtuso. Mas o ângulo ECG é igual aos dois [ângulos] CDE e CED [somados], pela mesma trigésima segunda [proposição do primeiro livro dos *Elementos*]; logo, os ângulos CDE e CED somados são menores do que um reto. Como CED e CEF são iguais, CEF será menor do que um reto. Por isso, FED e EDC [somados] serão menores do que dois retos. Então, as linhas EF e CD são concorrentes, pela vigésima nona do mesmo [livro dos *Elementos*]; seja no ponto F. Como o ângulo ECB é maior do que o ângulo ECF, ponha-se ECK igual [ao ângulo menor ECF], pela vigésima terceira do primeiro. Então, a linha CK cortará o lado

sit in signo .k. At quoniam angulus .cef. angulo .cek. aequalis est et angulus .ecf. angulo .eck. et latus .ec. commune, ergo per 26.am primi elementorum latus .ek. lateri .ef. aequum est. Maior est autem .ed. quam .ek. per nonam communem sententiam, maior igitur erit .ed. quam .ef. Est autem .de. ad .ef. sicut .dc. ad .cf. per 3.am 6.ti elementorum et per 14.am 5.ti eiusdem maior ergo erit .dc. quam .cf. Aequales autem sunt .dc. .ca, maior igitur est .ca. quam .cf. Quare per nonam communem sententiam maior erit angulus .cea. quam .cef. et perinde | quam .ced. Et quoniam .ac. spectatur sub visibus .ea. .ec. .ed. vero sub .ec. .ed. ergo spectatur .ac. sub maiori angulo quam .cd. et per 4.am et 5.am suppositiones maius videbitur .ac. quam .cd. Ergo datis interuallis etc. [S30v]

Vel breuius.
Probatur imprimis .de. maior esse quam .ef. Quoniam enim .ega. angulus rectus est. ergo omni angulo in triangulo | maior, maior ergo angulo .edg. Sed per 16.am primi Elementorum angulus .efd. angulo .egf. maior est .efd. igitur maior est angulo .edf. Quoniam igitur in triangulo .edf. angulus .efd. angulo .edf. maior est sequitur. per 18.am primi elementorum quod .de. maior est quam .ef. quod voluimus probare. Est autem .de. ad .ef. sicut .dc. ad .cf. et reliqua vt in calce premisse[9] demonstrationis. [O29v]

Theorema quintum. *Equales magnitudines inaequaliter expositae inaequales apparent, et maior semper ea que propius oculo[10] adiacet.*
Sint aequales magnitudines .ab. .cd. inaequaliter expositae vt vel ambae parallelae sint in linea .ebd. uel ambae eidem plano perpendiculares in quo sit .e. oculus.

---

9 **premisse** [=praemissae], primisse *SO*
10 **oculus,** oculo *SO*

ED no ponto K. Ora, como o ângulo CEF é igual ao ângulo CEK, e o ângulo ECF é igual ao ângulo ECK, e o lado EC é comum, então, pela vigésima sexta do primeiro dos *Elementos*, o lado EK é igual ao lado EF. Mas ED é maior do que EK, pela nona noção comum; logo, ED é maior do que EF. Mas DE:EF=DC:CF, pela terceira do sexto dos *Elementos*, então, pela décima quarta do quinto do mesmo DC será maior do que CF. Mas DC e CA são iguais; logo, CA é maior do que CF. Por isso, pela nona noção comum, o ângulo CEA será maior do que [o ângulo] CEF e, em consequência, do que CED. Uma vez que AC se vê sob os raios visuais EA e EC; e CD, sob EC e ED, então AC vê-se sob um ângulo maior do que CD e, pelas suposições quarta e quinta, AC ver-se-á maior do que CD. Logo, de comprimentos, etc.

Ou, de forma mais breve.
Prova-se primeiro que DE é maior do que EF, porque o ângulo EGA é reto e, portanto, maior do que qualquer ângulo no triângulo e, portanto, maior do que o ângulo EDG. Mas, pela décima sexta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo EFD é maior do que o ângulo EGF; logo, EFD é maior do que o ângulo EDF. Então, uma vez que no triângulo EDF, o ângulo EFD é maior do que o ângulo EDF, segue-se, pela décima oitava do primeiro dos *Elementos*, que DE é maior do que EF, o que quisemos provar. Mas DE:EF=DC:CF, e por aí afora como no final da demonstração apresentada anteriormente.

Teorema quinto. *Grandezas iguais desigualmente expostas*[4] *aparecem desiguais, e a que está mais perto do olho [aparece] sempre maior.*

[Fig. 23] | Sejam AB e CD grandezas iguais desigualmente expostas, de tal forma que ambas sejam, ou paralelas na linha EBD, ou perpendiculares ao mesmo plano em que se encontra o olho E.

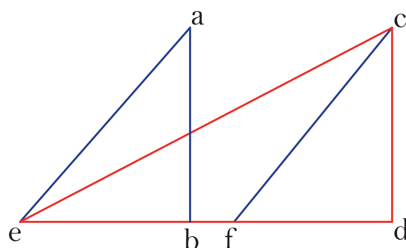


Fig. 23

4 As grandezas estão a diferentes distâncias do olho.

Dico eas inaequales apparere et maiorem videri .ab. quam .cd. (intelligo enim .ab. propinquiorem oculo .e.).

A linea enim .de. maiore abscindatur .df. aequalis[11] ipsi .eb. per 3.am primi Elementorum connectanturque .fc. Siue igitur lineae illae sint parallelae siue eidem plano perpendiculares aequalis erit angulus .eba. angulo .fdc. Si enim parallelae per 29.am primi. Si perpendiculares. per 4.m postulatum primi elementorum. Aequalia etiam sunt latera .cd. .df. lateribus .ab. .be. ergo per 4.am primi angulus .cfd. aequalis est angulo .aeb. Maior est autem angulus .cfd. | angulo .ced. per 16.am primi. Igitur [S31r] angulo .ced. maior erit angulus .bea. (probati enim sunt .bea. .cfd. equales[12]) et proinde maius spectatur .ab. quam .cd. per quartam et quintam suppositionem.

Si vero radii procidentes ab oculo .e. ad .b. et .d. | signa non sint eadem recta [O30r] linea, connexis .ac. signis et .bd. sequitur quod postquam .ab. .cd. parallelae sunt et aequales per 33.am primi Elementorum, quod .ac. .bd. etiam aequales et parallelae sunt. Ducatur ergo per 31.am eiusdem ab .e. signo parallela ipsis. .ac. .bd. .ef. secans lineam .cd. in .k. et abscissa a linea .ef. ipsi .ke. aequali que sit .fg. connexis .gb. .ga. probabitur de singulis partibus quod .ck. maior spectatur quam .af. et .kd. maior quam .fb. et redibit demonstratio.

Idem patet si oculus sit in sublimi vt in .h. et sint .ab. .cd. in diuersis planis, et magis distet .ab. Procidant radii .ha. .hb. .hc. .hd. et quoniam .ab. magis distat ab oculo .h. quam .cd. erit .hb. maior quam .hd. Abscindatur ergo ei aequalis .bg. et connectantur .ag. signa. Tunc quoniam .abg. .cdh. anguli aequales sunt, supponimus enim illud et latera aequalia per 4.am primi elementorum .bga. angulus (maior angulo .bha.) aequalis erit angulo .chd. et proinde .chd. maior est angulo .ahb. et ob hoc .cd. videtur maior quam .ab. etc.

11 **aequalis,** aequales *SO*
12 **equales,** equalis *SO*

Afirmo que elas aparecem desiguais e que AB se vê maior do que CD (entendo que AB está mais próxima do olho E).

Da linha maior DE, corte-se DF igual a EB, pela terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, e ligue-se F a C. Então, quer aquelas linhas sejam paralelas, quer sejam perpendiculares ao mesmo plano, o ângulo EBA será igual ao ângulo FDC; se forem paralelas, pela vigésima nona do primeiro; se [forem] perpendiculares, pelo quarto postulado do primeiro dos *Elementos*. [Mas] os lados CD e DF também são iguais aos lados AB e BE; logo, pela quarta do primeiro, o ângulo CFD é igual ao ângulo AEB. Mas o ângulo CFD é maior do que o ângulo CED, pela décima sexta do primeiro. Então, o ângulo BEA será maior do que o ângulo CED (pois se provou serem BEA e CFD iguais). Em consequência, vê-se AB maior do que CD, pela quarta e pela quinta suposição.

[Fig. 24] | No caso de os raios que se estendem do olho E para os pontos B e D não estarem na mesma linha reta [que o olho]: ligados os pontos A a C e B a D, como AB e CD são paralelas e iguais; [então,] pela trigésima terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, segue-se que AC e BD também são paralelas e iguais. Então, pela trigésima primeira do mesmo [livro], a partir do ponto E, trace-se EF, paralela às referidas AC e BD, e secante à linha CD em K. Corte-se, da linha EF, uma [linha] igual a KE, a qual seja FG. Ligue-se G a B e G a A. Provar-se-á, para cada lado [de EF], que CK se vê maior do que AF, e KD, maior do que FB. E a demonstração aplicar-se-á de novo.

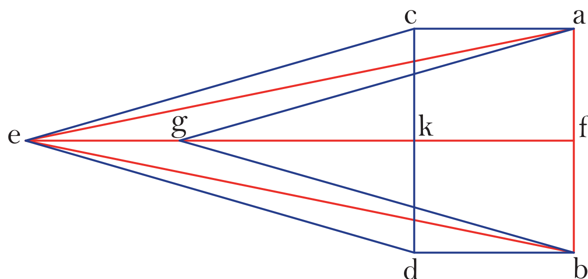


Fig. 24

[Fig. 25] | O mesmo é evidente se o olho estiver no alto, como em H, e AB e CD estiverem em planos diversos, e AB estiver mais afastado. Estendam-se os raios HA, HB, HC e HD. Como AB está mais distante do olho H do que CD, HB será maior do que HD. Então, corte-se BG, igual a esta [HD], e ligue-se os pontos A a G. Como ABG e CDH são ângulos iguais, pois assim o supomos, e os lados são iguais, então, pela quarta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo BGA (maior do que o ângulo BHA) será igual ao ângulo CHD. Em consequência, CHD é maior do que o ângulo AHB e, por isso, CD vê-se maior do que AB, etc.

Theorema sextum. *Parallela interualla*[13] *in distantia spectata, inaequalis latitudinis apparent.*

Sint parallela interualla .abcd. .adef. quorum spectantur latitudines .ba. .af. ab oculo .g. <in> distantia inaequaliter sitque .abcd. propinquior .fade. remotior.

Dico interualla <paralella> .ac.fd. apparere inaequalis latitudinis.

Quoniam | enim aequalia sunt interualla .ba. .af. quorum remotius est .af. ergo [S31v] per 4.am huius maior videtur .ab. quam .af. quod proponitur. Similiter ostendentur inaequales apparere latitudines .bc. ad. .ef.

13 **interualla**, interuallo *SO*

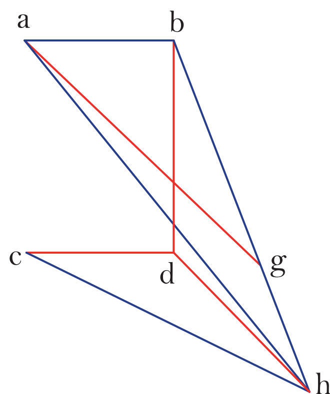
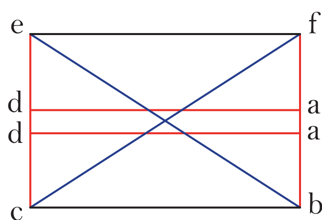
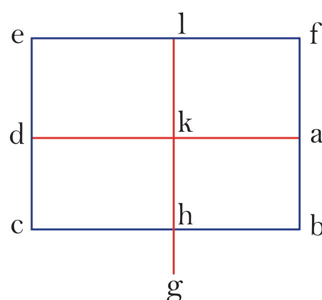


Fig. 25

Teorema sexto. *Paralelogramos olhados à distância, aparecem de largura desigual.*
[Figs. 26 e 27] | Sejam os paralelogramos ABCD e ADEF, cujas larguras BA e AF se veem a partir do olho G a uma distância desigual, e esteja ABCD mais próximo, e FADE mais afastado.





Figs. 26 e 27[5]

Afirmo que os paralelogramos AC e FD aparecem de largura desigual.

Como os intervalos BA e AF são iguais, e, destes, AF está mais afastado, então, pela quarta [proposição] deste [tratado], AB vê-se maior do que AF, que é o que se afirma. Da mesma forma se mostrará que as larguras BC, AD e EF, aparecem desi-

5 A figura 26 está errada e o próprio desenhador cancelou-a discretamente com uma cruz. A figura que deve ser tida em consideração é a figura 27.

| Oculo posito in plano .be. et inter lineas .fb. .ec. ducta .ghkl. parallela ipsi .baf. vel etiam posito oculo .g. in alterutra linearum .fb.ec. sequitur per precedentem inaequales apparere .bc.ad.fe. [O30v]

Demum sit oculus .g. in sublimi. A quo in subiectum planum .fc. perpendicularis ducatur .gh. per 11.^{am} 11.^{mi} elementorum et a signo .h. in plano .fc. parallela ipsis .bf. .ce. ducatur per 30.^{am} primi elementorum .hklm. et per eandem per .h. signum ipsis .cb. .da. parallela ducatur .hn. connectanturque .gb. .ga. .gf. .gk. .gl. gm. .gc. .gd. .ge. Et quoniam .ak. .am. parallelograma sunt. est enim .abk. angulus vt supponitur rectus et similiter .bkl. qui positusque[14] est aequalis angulo .nhk. per 34.^{am} primi .bk. .al. .fm. aequales sunt. Quoniam igitur .nh. ad ipsam .gh. perpendicularis est. et ipsi etiam .hm. nam .hk. super .cb. illi parallelam perpendicularis est ex hypothesi, ergo eadem .hn. per 4.^{am} 11.^{mi} elementorum plano .hgm. perpendicularis est. Et quoniam .nh. .kb. sunt parallele et .nh. plano .ghm. est perpendicularis, ergo per 8.^{am} 11.^{mi} .bk. plano .ghm. etiam est perpendicularis, angulus ergo .bkg. rectus est per 2.^{am} definitionem 11.^{mi} triangulum ergo .gkb. rectangulum est. Consimiliter ostendentur .gla. .gmf. .gkc. .gld. .gme. rectangula triangula.

Tunc quoniam .ghk. angulus rectus. et similiter <.ghm.> maior ergo .hmg. angulo per 32.^{am} primi elementorum. estque .glm. maior angulo .ghm. per 16.^{am} primi

14 **qui positusque,** qui positis quod *SO*

guais. Quer se coloque o olho no plano BE e se trace [a reta] GHKL entre as linhas FB e EC, paralela a BAF; quer se coloque o olho G em qualquer uma das linhas FB e EC; segue-se, pela [proposição] anterior, que BC, AD e FE aparecem desiguais.

[Fig. 28] | Finalmente, esteja o olho G elevado. A partir dele, trace-se a perpendicular GH, para o plano subjacente FC, pela décima primeira [proposição] do décimo primeiro [livro] dos *Elementos*; e, do ponto H, no plano FC, trace-se a [reta] HKLM, paralela a BF e CE, pela trigésima do primeiro dos *Elementos*. Pela mesma [proposição dos *Elementos*], trace-se [a reta] HN, pelo ponto H, paralela a CB e a DA. Ligue-se G a B, G a A, G a F, G a K, G a L, G a M, G a C, G a D e G a E. Como AK e AM são paralelogramos (pois o ângulo ABK é reto, por suposição, tal como BKL, o qual se pôs igual ao ângulo NHK, pela trigésima quarta do primeiro); [então,] BK, AL e FM são iguais. Como NH é perpendicular a GH e a HM (pois HK é, por hipótese, perpendicular a CB, que é paralela àquela [NH]), então a mesma HN é perpendicular ao plano GHM, pela quarta do décimo primeiro dos *Elementos*. Como NH e KB são paralelas, e NH é perpendicular ao plano GHM, então, pela oitava do décimo primeiro, BK também é perpendicular ao plano GHM. Logo, o ângulo BKG é reto, pela segunda definição do décimo primeiro. Então o triângulo GKB é retângulo. Da mesma forma se demonstrará que GLA, GMF, GKC, GLD e GME são triângulos retângulos.

Fig. 28

Ora, como o ângulo GHK é reto, e também GHM, então [GHM] é maior do que o ângulo HMG, pela trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*. Mas [o ângulo] GLM é maior do que o ângulo GHM, pela décima sexta do primeiro;

maior igitur .glm. angulo | .lmg. per 18.^{am} ergo eiusdem maior est .mg. quam .gl. Sic probabis quod .gl. maior est quam .gk. per precedentem, ergo maior | apparebit .bk. quam .al. Consimiliter ostendetur maior videri quam .ld. ipsa .kc. tota igitur .cb. maior spectatur quam .ad. Eadem etiam ratione apparebit .ad. maior quam .fe. Igitur posito oculo .g. in sublimi et .ac. .fd. rectangula et signo .h. inter lineas .bf. .ec. vel in alterutra earum producta inaequales apparebunt latitudines .bc. .ad. .ef. Quod erat probandum. [S32r] [O31r]

Eadem erit probatio vbi in sublime fuerit .g. oculus et .gh. perpendicularis in ipsa .ec. aut .fb. producta inciderit.

Theorema septimum. *In eadem recta linea aequales magnitudines remotius inuicem positae inaequales apparent.*

In subiecto plano .gba. sit recta linea .ab. et oculus .g. perpendicularis autem ipsi .ab. esto .gb. et in linea .ba. ponantur .cd. .ef. magnitudines aequales perpendiculares subiecto plano .gba. sitque remotior .cd. a perpendiculari .gb. vicinior autem .ef.

Dico inaequales apparere .ef. .cd.

Connectantur enim .gc. .ge. .gd. .gf. Et quoniam rectus est angulus .gbe. aequale erit quadratum .ge. duobus quadratis .gb. .be. Cumque .bc. sit maior quam .be. per hypotesim. maius erit quadratum .bc. quam quadratum .be. quare adiecto communi quadrato .bg. maiora erunt duo quadrata .gb. .bc.

logo, o ângulo GLM é maior do que o ângulo LMG. Então, pela décima oitava do mesmo, MG é maior do que GL. Da mesma maneira provarás que GL é maior do que GK. Logo, pela [proposição] anterior, BK aparecerá maior do que AL. Da mesma forma se demonstrará que KC se vê maior do que LD. Então, todo CB vê-se maior do que AD. Pela mesma razão, AD também aparecerá maior do que FE. Então, colocado o olho G no alto; e os retângulos AC e FD e também o ponto H entre as linhas BF e CE, ou entre o prolongamento delas; as larguras BC, AD e EF aparecerão desiguais. O que se queria provar.

A demonstração será igual no caso de o olho G estar no alto e a perpendicular GH incidir no prolongamento de EC ou FB.

Teorema sétimo. *Grandezas iguais colocadas, umas mais afastadas do que as outras, na mesma linha reta aparecem desiguais.*

[Fig. 29] | No plano subjacente GBA, seja AB uma linha reta e G o olho. Seja GB perpendicular a AB. Na linha BA, coloquem-se as grandezas iguais CD e EF, perpendiculares ao plano subjacente GBA, estando CD mais afastada da perpendicular GB, e EF mais próxima.

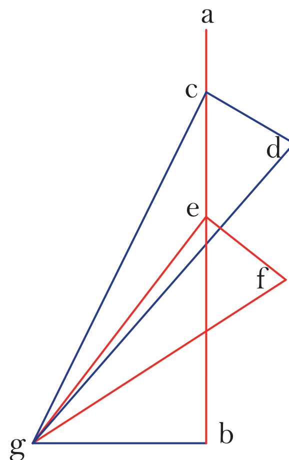


Fig. 29

Afirmo que EF e CD aparecem desiguais.

Ligue-se G a C, G a E, G a D e G a F. Como o ângulo GBE é reto, o quadrado de GE será igual à soma dos quadrados de GB e de BE. Uma vez que BC é maior do que BE, por hipótese, o quadrado de BC será maior do que o quadrado de BE. Por isso, somando o quadrado comum de BG, os dois quadrados de GB e de BC

duobus quadratis .gb. .be. et proinde quadrato .eg. Sunt autem duo quadrata .gb. .bc. aequalia quadrato .cg. per 48.^{am} primi elementorum quadratum igitur .gc. maius est. quadrato .eg. maior igitur est .gc. quam .ge. Et quoniam plano .gbc. perpendiculares sunt .cd. .ef. ergo per 2.^{am} | difinitionem 11.^{mi} Elementorum. vterque angulus [S32v] .dcg. et .feg. rectus est et quadratum .gf. aequum duobus quadratis .fe. et .eg. similiter | quadratum .gd. aequum duobus quadratis .dc. et .cg. cum autem quadratum [O31v] .cg. sit maius quadrato .ge. et quadrata .cd. et .ef. aequalia, erunt duo quadrata .cd. et .cg. hoc est quadratum .gd. maiora duobus quadratis .ge. et .ef. hoc est quadrato .gf. maior est igitur .gd. ipsa .gf. et .gc. ipsa .ge. duae ergo magnitudines .cd. et .ef. aequales inequaliter expositae sunt oculo .g. ergo per 5.^{am} huius maior videbitur .ef. quam .cd. igitur in eadem recta linea .ab. aequales magnitudines .cd. .ef. inaequaliter expositae a perpendiculari inaequales apparent. Quod erat probandum.

Theorema octauum. *Equales magnitudines inaequaliter expositae interuallis proportionaliter minime spectantur.*

Sit[15] oculus .a. in recta linea .ace. in qua sint aequales magnitudines .bc. .ed. inaequaliter expositae et parallelae quarum vicinior sit .bc.

---

15 **sit,** si *SO*

serão maiores do que os dois quadrados de GB e BE, e, em consequência, do que o quadrado de EG. Mas os dois quadrados de GB de BC [somados] são iguais ao quadrado de CG, pela quadragésima oitava [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Então, o quadrado de GC é maior do que o quadrado de EG; portanto GC é maior do que GE. Como CD e EF são perpendiculares ao plano GBC, então, pela segunda definição do décimo primeiro dos *Elementos*, cada um dos ângulos DCG e FEG é reto. E o quadrado de GF é igual aos dois quadrados de FE e de EG [somados]. Da mesma maneira, o quadrado de GD é igual aos dois quadrados de DC e de CG [somados]. Mas, uma vez que o quadrado de CG é maior do que o quadrado de GE e os quadrados de CD e de EF [são] iguais, [então,] os dois quadrados de CD e de CG [somados], isto é, o quadrado de GD, será maior do que os dois quadrados de GE e de EF [somados], isto é, do que o quadrado de GF; portanto, GD é maior do que GF, e GC do que GE. Logo, as duas grandezas iguais CD e EF encontram-se desigualmente expostas ao olho G; logo, pela quinta deste [tratado], EF ver-se-á maior do que CD. Então, as grandezas iguais CD e EF desigualmente expostas na mesma linha AB divergindo da perpendicular aparecem desiguais. O que se queria provar.

Teorema oitavo. *Grandezas iguais desigualmente expostas não se veem proporcionais às distâncias.*

[Fig. 30] | Esteja o olho A na linha reta ACE; nela estejam [também] as grandezas iguais BC e ED desigualmente expostas e paralelas, das quais, BC esteja mais próxima.

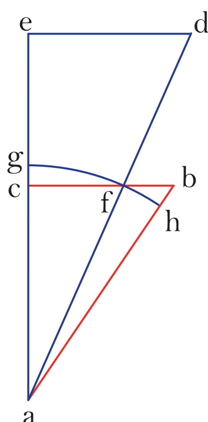


Fig. 30

Dico eas non proportionaliter spectari suis interuallis hoc est non esse eandem rationem .ea. ad .ac. et anguli .bac. ad angulum .dae.

Sin autem sit .ae. ad .ac. vt angulus .bac. ad angulum .dae. Et centro .a. spacio .af. describatur circulus .gfh. Et quoniam angulus .acf. rectus est, reliquus igitur .afc. minor erit recto per 17.^{am} primi maior igitur est.af. quam .ac. per 18.^{am} primi. Quare circulus .gfh. lineam .ae. secat, sit in .g. signo secat ipsam extra lineam .ac. estque .ag. aequalis ipsi .af. per 15.^{am} definitionem primi maior quam .ac. et triangulum .afc. pars est sectoris .gaf. | Preterea quoniam vt probatum est .acf. angulus maior [S33r] est angulo .afc. Sed .afc. angulo .fba. per 16.^{am} primi maior | est, et per eandem .bfa. [O32r] angulo .fca. maior est, multo ergo maior est .bfa. angulus angulo .fba.[16] per 18.^{am} ergo primi .ba. maior est ipsa .fa. est autem .fa. ipsi .ha. per definitionem circuli aequa, maior igitur est .ba. quam .ha. et proinde trianguli .baf. pars est sector .afh. Quoniam igitur in parallelas .cb. .ed. cadunt .ae. .ad. ergo per 29.^{am} primi bis repetitam erunt duo anguli ipsius .afc. trianguli qui sunt .acf. .afc. aequales duobus angulis .aed. .ade. in triangulo .ead. et .fac. vtrique communis per 4.^{am} ergo 6.^{ti} sicut .ea. ad .ac. sic .ed. ad .cf. est autem .de. ad .fc. vt .bc. ad .fc. per 7.^{am} quinti. (sunt enim .bc. .ed. aequales) et .bc. igitur ad .fc. est sicut .ea. ad .ac. per 11.^{am} quinti Elementorum. Sed sicut .bc. ad .cf.[17] sic per primam 6.^{ti} triangulum .abc. ad triangulum .caf. ergo per 11.^{am} quinti sicut .bac. triangulum ad .fac. triangulum sic .ae. ad .ac. Ponebatur autem .ea. ad .ac. sicut angulus .bac. ad angulum .fac. et per vltimam 6.^{ti} sicut .bac. angulus ad .fac. angulum sic sector .hag. ad sectorem .fag. igitur per 11.^{am} quinti sicut .bac. triangulum ad .fac. triangulum, sic .hag. sector ad .fag. sectorem, diuisim ergo per 18.^{am} quinti et .baf. triangulum ad .fac. triangulum, sicut .haf. sector ad .fag. sectorem permutatim. ergo per 16.^{am} eiusdem sicut .baf. triangulum ad .fah. sectorem, sic .fac. trigonus ad .gaf. sectorem. Maior autem est .abf. triangulus .haf. sectore per nonam communem sententiam. maior igitur erit .afc. triangulus sectore .afg. pars toto, quod | erat impossibile. Non erat igitur sicut .ea. ad .ac. sic .bac. angulus ad .dae. angulum. [S33v] Quod erat demonstrandum.

16 **.fba.,** .fha. *SO*
17 **ad .cf.,** ad .ef. *SO*

Afirmo que elas não se veem proporcionalmente às suas distâncias; ou seja, que a razão de EA para AC não é a mesma que a do ângulo BAC para o ângulo DAE.

Caso contrário, seja AE para AC como o ângulo BAC para o ângulo DAE. Com centro A e raio AF descreva-se o círculo GFH. Uma vez que o ângulo ACF é reto, então o restante AFC será menor do que um reto, pela décima sétima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Portanto, AF é maior do que AC, pela décima oitava [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Por isso, o círculo GFH corta a linha AE (no ponto G), cortando-a para lá da linha AC. [A linha] AG é igual a AF (pela décima quinta definição), [que é] maior do que AC; e o triângulo AFC é uma parte do sector GAF. Além disso, uma vez que (como se provou) o ângulo ACF é maior do que o ângulo AFC, e AFC é maior do que o ângulo FBA (pela décima sexta do primeiro), e BFA é maior do que o ângulo FCA (pela mesma), então o ângulo BFA é muito maior do que o ângulo FBA. Então, pela décima oitava do primeiro, BA é maior do que FA. Mas FA é igual a HA pela definição de círculo. Portanto, BA é maior do que HA, e daí se segue que o sector AFH é parte do triângulo BAF. Como AE e AD caem nas paralelas CB e ED, então, pela vigésima nona [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*] tomada duas vezes, os dois ângulos do triângulo AFC, que são ACF e AFC, [são] iguais aos dois ângulos AED e ADE do triângulo EAD; e FAC é comum a ambos. Logo, pela quarta do sexto, EA:AC=ED:CF. Mas DE:FC=BC:FC, pela sétima do quinto (pois BC e ED são iguais). Portanto BC:FC=EA:AC, pela décima primeira do quinto dos *Elementos*. Mas como BC para CF assim o triângulo ABC para o triângulo CAF, pela primeira do sexto; logo, pela décima primeira do quinto, como o triângulo BAC para o triângulo FAC, assim AE para AC. Mas pôs-se EA para AC como o ângulo BAC para o ângulo FAC[6]. Pela última do sexto, como o ângulo BAC para o ângulo FAC, assim o sector HAG para o sector FAG. Então, como o triângulo BAC para o triângulo FAC, assim o sector HAG para o sector FAG, pela décima primeiro do quinto. Logo, *separando*, como o triângulo BAF para o triângulo FAC, assim o sector HAF para o sector FAG, pela décima oitava do quinto. Então, *permutando*, como o triângulo BAF para o sector FAH, assim o triângulo FAC para o sector GAF, pela décima sexta do mesmo. Mas o triângulo ABF é maior do que o sector HAF, pela nona noção comum; logo, o triângulo AFC será maior do que o sector AFG, a parte do que o todo, o que é impossível. Portanto, não se tem como EA para AC, assim BAC para DAE. O que se queria demonstrar.

---

6 Notar que este ângulo é o mesmo que o ângulo DAE, referido com diferente notação.

| Alia ostensio breuior. [O32v]

Sint aequales magnitudines .bc. .df. directae ad lineam .cf. sitque .k. oculus in linea .cf. producta, procidant radii .kc. .kd. .kb.

Et sicuti demonstrandum est in presenti ostensione ita et hic[18] ostendentur .kdf. .kbc. trianguli similes. item quod sicut .df. ad .hf. ita .ck. ad .fk. Item quod centro .k. interuallo .kh. circulus ductus secabit .kc. lineam inter .cf. signa, item .kd. infra signum .d. Et quoniam triangulum .hdk. ad sectorem .lhk. maiorem habet rationem quam triangulus .hfk. ad sectorem .akh. (sector enim .ahk. maior est triangulo .fkh. sectorque .hkl. minor triangulo .dkh.) vicissim igitur per 2.am additarum Campani ad quintum, maior est ratio .dhk. trianguli ad .khf. triangulum, quam .lkh. sectoris ad .hka. sectorem, quare per 3.am additarum eiusdem coniunctim maior est ratio .dfk. trianguli ad .hkf. triangulum quam .lka. sectoris ad .hka. sectorem. Sed per primam 6.ti sicut .dkf. ad .khf. sic .df. ad .hf. et sicut .df. ad .hf. sic probata est .ck. ad .fk. maior igitur erit ratio .ck. ad .fk. quam .lka. sectoris ad .hka. sectorem, per vltimam autem sexti sicut .lka. sector ad .hka. sectorem, sic .lka. angulus ad .hka. angulum maior igitur est ratio .ck. ad .fk. quam .dkf. anguli (sub quo videtur .df.) ad .hkf. angulum sub quo videtur .bc. quod erat probandum.

18 **hic,** his *SO*

Outra prova, mais breve.

[Fig. 31] | Sejam as grandezas iguais BC e DF perpendiculares à linha CF, e esteja o olho K no prolongamento da linha CF. Estendam-se os raios KC, KD e KB.

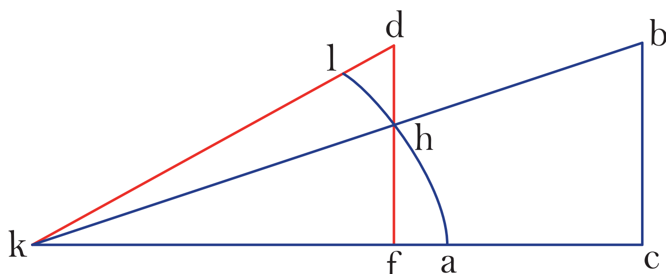


Fig. 31

Como é mister demonstrar na presente prova, também agora se mostrará que os triângulos KDF e KBC são semelhantes, e que como DF para HF, assim CK para FK, e que o círculo traçado com centro K e raio KH cortará a linha KC entre os pontos C e F, e [cortará] KD abaixo do ponto D. Uma vez que o triângulo HDK para o sector LHK tem uma razão maior do que o triângulo HFK para o sector AKH (pois o sector AHK é maior do que o triângulo FKH e o sector HKL é menor do que o triângulo DKH), então, *alternando*, a razão do triângulo DHK para o triângulo KHF é maior do que a do sector LKH para o sector HKA, pela segunda das [proposições] acrescentadas por Campano ao quinto [livro dos *Elementos*]. Por esta razão, *componendo*, pela terceira das [proposições] acrescentadas pelo mesmo [Campano], a razão do triângulo DFK para o triângulo HKF é maior do que a do LKA para o sector HKA. Mas como o triângulo DKF para o triângulo KHF, assim DF para HF, pela primeira do sexto, e, como se provou, como DF para HF, assim CK para FK; logo, a razão de CK para FK é maior do que a do sector LKA para o sector HKA. Mas, pela última do sexto, como o sector LKA para o sector HKA, assim o ângulo LKA para o ângulo HKA. Então, a razão de CK para FK é maior do que a do ângulo DKF (sob o qual se vê DF) para o ângulo HKF, sob o qual se vê BC. O que se queria provar.

Theorema nonum. *Rectangulae magnitudines ex interuallo spectatae circunductae apparent.*

| Sit rectangula magnitudo .abcd. sub aspectum cadens. [S34r, O33r]

Dico illam ea distantia videri posse, vt circunducta appareat, videaturque tendere ad circularem.

Diuidantur enim latera ipsius .ac. bifariam per 10.^{am} primi elementorum in signis .e.f.g.h. Ponaturque oculus in ea distantia, vt inter visus consequenter se habentes cadat angulus .fae. cum suis lineis per tertiam huius. Iam igitur nec spectabitur .fa. nec .ea. Quare nec videbuntur angulum facere in .b. nec in .c. nec in .d. Igitur circularis apparebit .abcd. vel rotunda. Consimiliter ostendetur ante illam distantiam quod minus percipiantur anguli .abcd. et quod spectabitur circulariter. Quod erat probandum.

Theorema decimum. *Sub oculo positorum planorum que remotiora sublimiora apparent.* Sub oculo .b. sint plana .c.d.e.f. posita in recta linea .cf. ad quae emittantur visus .bc. .bd. .be. .bf. Quorum perpendicularis sit .bf. ipsi .fc.

Dico sublimius spectari .c. quam .d. et .d. quam .e.

Cum .c. sit remotissimum a perpendiculari erit .fc. maior quam .fd. maius ergo quadratum .fc. quadrato .fd.

Teorema nono. *Grandezas retangulares observadas à distância aparecem circulares.*

[Fig. 32] | Seja ABCD uma grandeza retangular que cai sob o olhar.

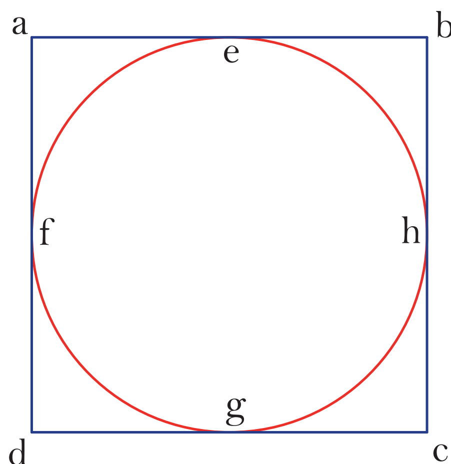


Fig. 32

Afirmo que há uma distância em que é possível vê-la, [mas] tal que parece curva e tender para [a forma] circular.

Bissectem-se os lados de AC nos pontos E, F, G e H, pela décima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Ponha-se o olho numa distância tal, que o ângulo FAE caia, juntamente com as suas linhas, entre raios visuais consecutivos. Então, pela terceira deste, deixará de se avistar FA e EA. Por esta razão, também não se verão [linhas a] fazer ângulos em B, ou C ou D. Então, ABCD aparecerá circular, ou redonda. Da mesma forma se mostrará que, para cá daquela distância, não se distinguirá os ângulos de ABCD e que [este] se verá circularmente. O que se queria provar.

Teorema décimo. *De planos colocados por baixo de um olho, as partes mais afastadas aparecem mais elevadas.*

[Fig. 33] | Sob o olho B, estejam os planos C, D, E e F colocados na linha reta CF. Estendam-se para eles os raios visuais BC, BD, BE e BF. Deles, seja BF perpendicular a FC.

Afirmo que C se vê mais elevado do que D, e D do que E.

Como C é o mais afastado da perpendicular, FC será maior do que FD; logo, o quadrado de FC é maior do que o quadrado de FD.

Adiuncto communi quadrato ipsius .bf. duo quadrata .bf. .fc. maiora erunt duobus quadratis .bf. fd.

Quadratis autem .bf. .fc. aequum est quadratum .bc. et quadratis .bf. .fd. aequum est quadratum .bd. .bc. igitur quadratum maius est quadrato .bd. maior ergo .bc. quam .bd. magis ergo distat .bc. a perpendiculari .bf. quam .bd. per corrogatum a nobis additum[19] ad 19.^{am} primi elementorum et exinde maior est angulus .fbc. angu|lo .fbd. et plus de directo accipit .bc. linea quam .bd.[20] | Et quoniam .bf. recta tendit deorsum ergo radius .bd. humilior est .bc. vero sublimior quare per 7.^{am} et 8.^{am} suppositiones humilius spectatur .d. quam .c.[21] [S34v] [O33v]

Humiliores sane radii sunt qui cum perpendiculari recta deorsum tendente, minorem angulum in oculo efficiunt.

Igitur sub oculo positorum in plano quae remotiora sublimiora apparent.

Si spectata non sint in eadem recta linea cum visu a maiori distantia resecando minori aequale, fiet demonstratio per quartam primi elementorum. Perpendicularis enim .bf. ad subiectum planum etiam perpendicularis erit ad omnes rectas lineas a signo .f. in eodem plano ductas per secundam definitionem vndecimi elementorum.

---

19 **additum,** auditum *SO*
20 **.bc. linea quam .bd.,** .bd. linea quam .bc. *SO*
21 **.d. quam .c.,** .c. quam .d. *SO*

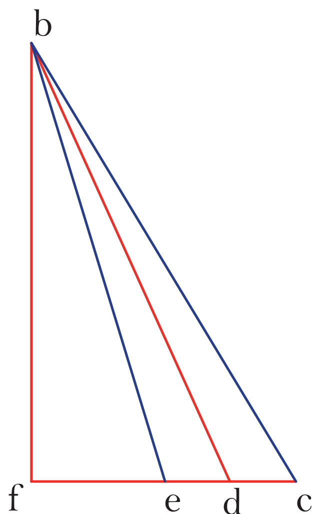


Fig. 33

Acrescentado o quadrado de BF, comum, os dois quadrados de BF e de FC [somados] serão maiores do que os dois quadrados de BF e de FD [somados].

Mas o quadrado de BC é igual aos quadrados de BF e de FC [somados], e o quadrado de BD é igual aos quadrados de BF e de FD somados. Então, o quadrado de BC é maior do que o quadrado de BD. Logo, BC é maior do que BD. Então, BC está mais distante da perpendicular BF do que BD, pelo corrogado acrescentado por nós à décima nona [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Donde, o ângulo FBC é maior do que o ângulo FBD, e a linha BC toma mais da linha reta [FC] do que BD. Ora, como a linha reta BF se estende de cima para baixo, então o raio BD é o raio mais baixo e BC, o mais alto. Por esta razão, pelas suposições sétima e oitava, D vê-se mais baixo do que C.

Raios mais baixos são aqueles que fazem, com a reta perpendicular que se estende de cima para baixo, um ângulo menor no olho.

Então, de coisas colocadas num plano sob o olho, as mais afastadas aparecem mais altas.

[**Fig. 34**] | Se as coisas observadas não estiverem na mesma linha reta que o raio visual. Se cortarmos, do comprimento maior, um [comprimento] igual ao menor, a demonstração far-se-á pela quarta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Com efeito, BF, perpendicular ao plano subjacente, também será perpendicular a todas as linhas retas traçadas a partir do ponto F no mesmo plano, pela segunda definição do undécimo [livro] dos *Elementos*.

Et hec esset causa cur mare videatur esse mons presertim ex loco edito tametsi intumescat nonnihil et in orbem pandatur.

Theorema vndecimum. *Planorum super oculo positorum quae remotiora humiliora apparent.*

Ab oculo .a. inferiore in superius .ec.[22] cadant radii .ae. perpendicularis ad .ec. <.ad. .ac.> sitque linea .ed. minor .ec.

Dico humilius videri .c. quam .d. Sint enim in eadem recta linea .ed. .ec.

Et quoniam ab angulo .a. in basim .ec. cadit recta linea .ad.[23] secans basim .ec. in .d. secat igitur et

22 **.ec.,** .ac. *SO*

23 **.ad.,** .ec. *SO*

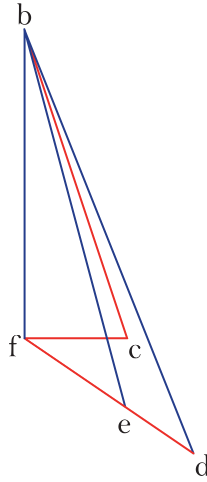


Fig. 34

E esta pode ser a razão por que o mar parece ser um monte, sobretudo a partir de um lugar elevado, apesar de se arredondar e encurvar um pouco.

Teorema undécimo. *De planos situados por cima de um olho, as partes mais afastadas aparecem mais baixas.*

[Fig. 35] | Do olho A, situado mais em baixo, para EC, situado mais em cima, caiam os raios AE, perpendicular a EC, AD e AC. Seja a linha ED menor do que EC.

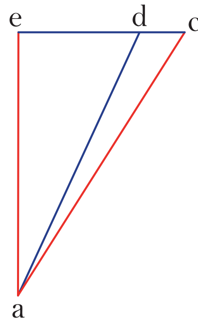


Fig. 35

Afirmo que C se vê mais baixo do que D.

Estejam ED e EC na mesma linha reta. Uma vez que, do ângulo A, para a base EC, cai a linha reta AD, secante à base EC em D, então [esta reta] também corta o

angulum .eac. per corrogatum quartum, maior igitur est .eac. angulus angulo .ead. igitur radius .ad. faciens minorem angulum quam .ac. cum perpendiculari .ae. recta sursum tendente sublimior erit. humilior autem .ac. quare per 7.^{am} et 8.^{am} suppositionem .c. humilius | apparet .d. vero sublimius. [S35r]

Si vero .edc. non sint in eadem recta linea, vt .ef. .ec. | posita .ed. aequali ipsi .ef. probabitur angulus .eaf. aequalis .ead. per secundam definitionem vndecimi et quartam primi Elementorum et humilior[24] erit radius .af. quam .ac. Igitur planorum etc. [O34r]

Hinc ingens templum subeunti penitiores testudines, apparent humiliores.

Theorema duodecimum. *Quae obiiciuntur longitudinem habentium, quae sunt in dextris, in sinistra procedere videntur[25], quae vero in sinistris in dextra.*

Ab oculo .a. in dextram lineam .bc. procidant radii .af. perpendicularis .ag. .ab. Item ab oculo .a. in sinistram magnitudinem .de. procidant radii .ad. .ah. et .ak. perpendicularis ipsi .de. recta sinistrorsum tendens sicut .af. recta dextrorsum, sitque .g. propior ipsi .f. quam .b. et ad easdem partes. Item .h. ipsi .k. quam .d.

---

24 **humilior,** sublimior *SO*
25 **videntur,** videnter *SO*

ângulo EAC, pelo quarto corrogado. Então, o ângulo EAC é maior do que o ângulo EAD. Portanto, o raio AD, ao fazer, com AE, a reta perpendicular que se estende para cima, um ângulo menor do que AC, será mais elevado, e AC mais baixo. Por isso, pelas suposições sétima e oitava, C aparece mais baixo e D mais elevado.

[Fig. 36] | Se E, D e C não estiverem na mesma linha reta, como [estão] EF e EC, e se se puser ED igual a EF, provar-se-á que o ângulo EAF é igual a EAD, pela segunda definição do undécimo [livro] e pela quarta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, e que o raio AF será mais elevado do que AC. Logo, de planos, etc.

Fig. 36

Daqui que, para quem se aproxima de um templo enorme, as coberturas situadas mais ao fundo aparecem mais baixas.

Teorema duodécimo. *De objetos que possuem [algum] comprimento situados à frente [do olho], aqueles que estão à direita parecem avançar para a esquerda e os que estão à esquerda, para a direita.*

[Fig. 37] | Do olho A estendam-se, para a linha BC, situada à direita, os raios AF (perpendicular [a BC]), AG e AB. Do mesmo modo, do olho A, para a grandeza DE, situada à esquerda, estendam-se os raios AD, AH e AK, [este último] perpendicular a DE e [constituindo a] reta que se estende para a esquerda, tal como AF [constitui a que] se estende para a direita[7]. Esteja G mais próximo de F do que B, e para o mesmo lado. Do mesmo modo, [esteja] H [mais próximo] de K do que D [e para o mesmo lado].

7 Neste passo, Melo acaba por definir e identificar AK como a «reta que se estende para a esquerda» (=reta traçada perpendicularmente de A para DK), e AF como a «reta que se estende para a direita» (=reta traçada perpendicularmente de A para BF).

Dico quod mobile a .g.[26] in .b. videtur sinistrorsum moueri et ab .h. in .d. dextrorsum.

Quoniam enim mobile prius spectabatur sub radio .ag. deinde sub radio .ab. maiorem autem angulum .baf. efficit radius .ba. cum radio .af. recte dextrorsum tendente quam radius .ga. cum radio .af. ergo magis dexter est radius .ag. quam .ab. Radius enim dexterior est qui propinquior et vicinior est perpendiculari rectae[27] dextrorsum tendenti. Per 9.^{am} suppositionem ergo mobile in .g. dexterius spectatur, quam in .b. Quoniam itaque mobile prius spectatur radio magis dextro .ag. deinde radio .ab. minus dextro, videtur ergo mobile sinistrorsum procedere. Eadem demonstratione ostendetur | quod mobile ab .h. in .d. videatur dextrorsum moueri [S35v] cum sit in sinistris. Igitur quae obiiciuntur, etc.

| **Corrollarium.** *Sequitur hinc corollariae quod oculo posito inter parallelas ipsae productae tandem videbuntur concurrere.* [O34v]

Cum enim .hd. in dextram videatur procedere, et .gb. in sinistram, connexis itaque .hg. et per .d. ipsi .hg. ducta parallela .db. per 30.^{am} primi, sequitur per 6.^{am} huius quod .db. minor spectatur quam .hg. et per tertiam

26 **a .g.,** .ag. *SO*
27 **rectae,** recta *SO*

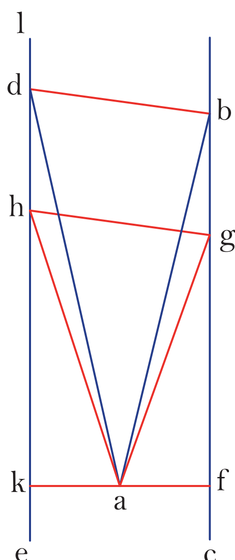


Fig. 37

Afirmo que um móvel [que se desloca] de G para B, parece mover-se para a esquerda, e que [um móvel que se desloca] de H para D, [parece mover-se] para a direita.

Como o móvel se via antes sob o raio AG e, depois, sob o raio AB; e [como] o raio BA, em conjunto com AF (que se estende perpendicularmente para a direita), faz um ângulo, BAF, maior do que o [ângulo formado pelo] raio GA em conjunto com AF, então o raio AG é [um raio] mais à direita do que AB, pois o raio mais à direita é aquele que é mais próximo e vizinho da reta perpendicular que se estende para a direita. Logo, pela suposição nona, o móvel vê-se mais à direita em G do que em B. Assim, como o móvel se via antes pelo raio mais à direita AG e, depois, pelo raio menos à direita AB, então o móvel parece avançar para a esquerda. Pela mesma demonstração se mostrará que o móvel [que se desloca] de H para D parece mover-se para a direita, apesar de estar à esquerda. Logo, de objetos situados à frente [do olho], etc.

Corolário. *Daqui se segue, como corolário, que, se se colocar o olho entre paralelas, e estas se prolongarem, parecerão ser concorrentes.*

Como HD parece avançar para a direita e GB para a esquerda, se se ligar H a G e se se traçar DB, por D, paralela a HG, pela trigésima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], segue-se que DB se vê menor do que HG, pela sexta [proposição]

huius .db. longitudinem interualli habet aliquam qua aduentante non amplius spectabitur. Extensa igitur .ed. in infinitum ponatur .db. in illa distantia vt puta in .l. sequitur quod .db. in .l. non videbitur sed videbuntur .bcde. conuenire in .l. igitur etc.

Theorema tredecimum. *Equalium <magnitudinum> sub oculo positorum, quae longe positae sunt, sublimiores apparent.*

Sint aequales[28] magnitudines .ab. .cd. .ef. subiecto plano perpendiculares positae sub oculo .k. sitque remotior .ef. quam .cd. et .cd. quam .ab. a perpendiculari .kg.

Dico sublimiorem spectari .ef. quam .cd. et .cd. quam .ab.

Connectantur .ac. .bd. .ce. .df. .gb. Quoniam itaque equales et paralellas connectunt .ac. .bd. ergo per $33.^{am}$ primi elementorum parallelae sunt .ac. .bd. et per eandem .ce. .df. igitur per $15.^{am}$ $11.^{mi}$ planum .ace. parallelum est plano .bdf. et per $11.^{am}$ $11.^{mi}$ a signo .k. in planum .bdf. ducatur perpendicularis .khg. per conuersam ergo $14.^{o}$ $11.^{mi}$ demonstratam a nobis in $16.^{a}$ eiusdem .khg. perpendicularis erit plano .ace. Abscindaturque ab .kg. ipsi .ab. equalis .hg. Et quoniam .ab. .hg. per $6.^{am}$ $11.^{mi}$ parallelae sunt

28 **aequales,** *rep. SO*

deste [tratado], e que DB possui um comprimento da distância, atingido o qual, não mais se verá, pela terceira [proposição] deste [tratado]. Então, estendida ED infinitamente, ponha-se DB àquela distância, por exemplo em L. Segue-se que DB não se verá em L, mas BC e DE ver-se-ão convergir para L; logo, etc.

Teorema décimo terceiro. *De grandezas iguais colocadas por baixo de um olho, as que estão situadas [mais] longe aparecem mais altas.*

[Fig. 38] | Sejam AB, CD e EF grandezas iguais perpendiculares ao plano subjacente e colocadas por baixo do olho K. Esteja EF mais afastada da perpendicular KG do que CD, e CD do que AB.

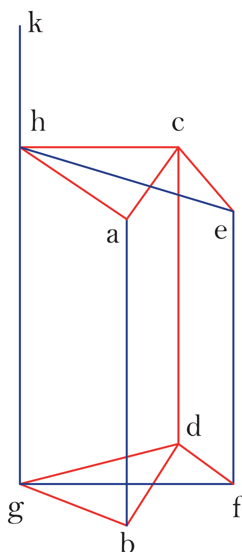


Fig. 38

Afirmo que EF se vê mais elevada do que CD e CD do que AB.

Ligue-se A a C, B a D, C a E, D a F e G a B. Uma vez que AC e BD ligam [grandezas] iguais e paralelas, então, pela trigésima terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, AC e BD são paralelas. Pela mesma [proposição], CE e DF também [são paralelas]. Então, pela décima quinta do décimo primeiro, o plano ACE é paralelo ao plano BDF. Pela décima primeira do décimo primeiro, trace-se KHG perpendicular ao plano BDF, a partir do ponto K. Então, pela conversa do décimo quarto do décimo primeiro, demonstrada por nós na décima sexta do mesmo, KHG será perpendicular ao plano ACE. Da reta KG, corte-se HG igual a AB. Ora, como AB e HG são paralelas pela sexta [proposição] do décimo primeiro [livro dos *Ele-*

per 35.^{am} definitionem in eodem sunt plano. At quoniam .hg. .ab. parallele sunt et equales .ha. .gb. itaque eas connectentes equales et parallele sunt .ga. igitur parallelo- [S36r] gramum est et | secat .ace. .bdf. plana ergo | per 16.^{am} vndecimi communes ipsorum [O35r] sectiones <et ipsius> .ba.gh. parallelae sunt .ha. .gb. Item .hc. .gd. .he. gf. parallelae sunt. Sed ponitur .f. signum remotius quam .d. et .d. quam .b. a signo .g. remotius ergo erit .e. quam .c. et .c. quam .a. ab .h. siue a perpendiculari .hg. Igitur per 10.^{am} huius sublimius spectatur .e. quam .c. et .c. quam .a. eadem ratione sublimius spectatur .f. quam .d. et .d. quam .b. tota igitur .ef. sublimior videtur quam .cd. et .cd. quam .ab. Igitur aequalium magnitudinum etc.

Hinc fit vt ex edito turres remotiores altiores videantur.

Theorema decimum quartum. *Equalium magnitudinum super oculo positarum quae longe positae sunt humiliores apparent.*

Sint aequales magnitudines .ab. .cd. .ef. parallelae et superiori plano dato perpendiculares, quae spectentur ab oculo .k. Sitque per duodecimam vndecimi .kg. eidem plano perpendicularis sit autem .f. remotior quam .d. et .d. quam .b. a perpendiculari .kg.

Dico humiliorem spectari .ef. quam .cd. et .cd. quam .ab.

mentos], [então,] elas estão no mesmo plano, pela trigésima quinta definição. Mas, uma vez que HG e AB são paralelas e iguais, assim também HA e GB, que ligam aquelas, são iguais e paralelas; portanto, GA é um paralelogramo, e corta os planos ACE e BDF. Então, pela décima sexta do undécimo, HA e GB (interseções daqueles [planos ACE e BDF] com o paralelogramo BAGH) são paralelas. Do mesmo modo, HC e GD são paralelas, tal como HE e GF. Mas o ponto F está colocado mais longe do ponto G do que o ponto D, e o ponto D [está colocado mais longe do ponto G] do que B. Então, E estará mais afastado do ponto H, ou seja, da perpendicular HG, do que C, e C [estará mais afastado do ponto H] do que A. Então, pela décima deste [tratado], E vê-se mais elevado do que C, e C do que A. Pela mesma razão, F vê-se mais alto do que D, e D do que B. Portanto, a linha inteira EF vê-se mais alta do que CD, e CD do que AB. Logo, de grandezas iguais, etc.

Daqui se segue que, vistas de um ponto elevado, as torres mais afastadas parecem mais altas.

Teorema décimo quarto. *De grandezas iguais colocadas por cima do olho, as que estão colocadas [mais] longe aparecem mais baixas.*

[Fig. 39] | Sejam AB, CD e EF grandezas iguais, paralelas, e perpendiculares a um plano dado por cima [delas]. Sejam vistas pelo olho K. Seja KG perpendicular ao mesmo plano, pela duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Esteja F mais afastado da perpendicular KG do que D, e D do que B.

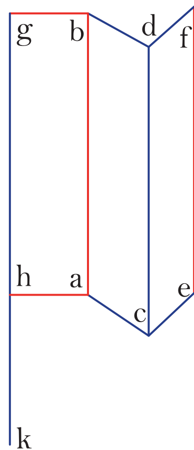


Fig. 39

Afirmo que EF se vê mais baixa do que CD, e CD do que AB.

Retenta enim priori hypotesi parallela erunt plana .ace. .bdf. vt probatum est in priore, eritque .e. remotius ab .h. quam .c. et .c. quam .a. quare per vndecimam huius humilius apparebit .e. quam .c. et .c. quam .a. Tota igitur .fe. humilior apparet quam .cd. et .cd. quam .ab. Igitur aequalium magnitudinum super oculo positarum quae longius positae sunt humiliores apparent.

Additio. *Magnitudines equaliter ab oculo distantes aequales et aeque humiliter spectantur.* Sint .bc. .ef. aequales magnitudines spectate ab oculo .a. a quo aequaliter distant.

Dico quod aequales et quod | aequae humiliter | spectantur. [S36v] [O35v]

A signo .a. super planum[29] super quod .bc. .fe. ducatur perpendicularis per vndecimam vndecimum .ad. connectantur .ab. .af. .dc. .de. .ae. .ac. .ec. Quoniam enim .ad. perpendicularis est ad planum .dec. ergo per secundam definitionem vndecimi .adc. .ade. anguli aequales sunt. sunt etiam .ed. .dc. aequales, aeque enim distant .ce. signa a signo .d. et .ad. communis ergo per quartam primi elementorum .ac. .ae. aequales sunt. et angulus .dac. angulo .dae. quare per ea quae dicta sunt in vndecima huius .ae. .ac. aeque humiles radii sunt. Abscindaturque ab ipsa .ad. ipsis .fe. .bc. equalis per tertiam primi. que sit .ld. et connectantur .fl. .lb. At[30] quoniam .ld. .bc. aequales[31] sunt et parallelae ergo per 34.^{am} primi .lb. .dc. aequales sunt et parallelae per idem et .fl. .ed. aequales sunt, sunt autem .ed. .dc. inuicem aequales erunt igitur .fl. .lb. per primam communem sententiam bis repetitam aequales. Angulusque .alb. angulo .alf. per 29.^{am} enim primi bis repetitam

29 **planum,** planam *SO*
30 **at,** ad *SO*
31 **equales,** equalis *SO*

Mantendo-se a hipótese anterior, os planos ACE e BDF serão paralelos, como se provou no [teorema] anterior, e E estará mais afastado de H do que C, e C do que A. Por esta razão, pela undécima [proposição] deste [tratado], E aparecerá mais baixo do que C, e C do que A. Então, a linha inteira FE aparece mais baixa do que CD, e CD do que AB. Logo, de grandezas iguais colocadas por cima do olho, as que estão colocadas [mais] longe aparecem mais baixas.

Aditamento. *Grandezas [situadas] à mesma distância do olho vêem-se iguais e igualmente baixas.*

[Fig. 40] | Sejam BC e EF grandezas iguais observadas pelo olho A, do qual se encontram à mesma distância.

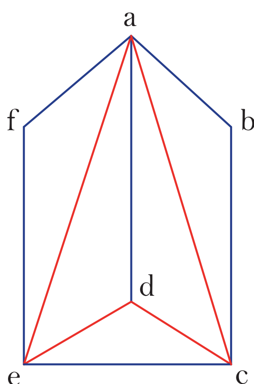


Fig. 40

Afirmo que se veem iguais e igualmente baixas.

Do ponto A, trace-se a perpendicular AD ao plano sobre o qual [se encontram] BC e FE, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Ligue-se A a B, A a F, D a C, D a E, A a E, A a C e E a C. Uma vez que AD é perpendicular ao plano DEC, então, pela segunda definição do undécimo [livro dos *Elementos*], os ângulos ADC e ADE são iguais; ED e DC também são iguais, pois os pontos C e E são equidistantes do ponto D. Mas AD é comum. Então, pela quarta do primeiro dos *Elementos*, AC e AE são iguais; assim como os ângulos DAC e DAE. Por esta razão, por aquilo que se disse na undécima [proposição] deste [tratado], AE e AC são raios
[Fig. 41] igualmente baixos. | Corte-se de AD uma [reta] igual a FE e a BC, pela terceira do primeiro, seja LD. Ligue-se F a L e L a B. Ora, uma vez que LD e BC são iguais e paralelas, então, pela trigésima quarta do primeiro, LB e DC são iguais e paralelas. Pelo mesmo motivo, FL e ED também são iguais. Mas ED e DC são iguais. Então, FL e LB serão iguais entre si, pela primeira noção comum tomada duas vezes; o ângulo ALB é igual ao ângulo ALF, pela vigésima nona do primeiro duas vezes tomada ([os ângulos]

.alb. .alf. duobus .ldc. .lde. quisque suo relatiuo est aequalis, at illi aequales sunt .alb. alf. igitur aequales sunt et .al. communis .ab. igitur et .af. per quartam primi elementorum lineae equales sunt, angulique .lab. .laf. quare .ab. .af. aeque depresse sunt per dicta in vndecima huius videtur igitur .bc. .fe. mediantibus .ab. .ac. .af. .ae. eque sublimibus et depressis.

Dico etiam quod .bc. .fe. aequales spectantur quoniam enim .ab. .ac. aequales probatae sunt .af. .ae. et .bc. ipsi .fe. aequalis est ex hypotesi ergo per octauam primi .bac. angulus angulo .fae. equalis est, ergo per 6.^{am} suppositionem aequales spectantur .bc. .fe. postquam aequaliter distant a per|pendiculari alias non oporteret. [S37r]

Theorema decimum quintum. *Eorum quae sub oculo posita sunt, quae sese inuicem excedunt, | adherente oculo minori supra spectatum, maius apparet, recedente vero a minore minus.* [O36r]

Sint .ab. maius et .cd. minus exposita oculo .e. sitque excessus .ab. super .cd. .af. sit autem .cd. oculo vicinior a quo procidant radii .ec. .ef. Item ponatur .hk. ipsis .cd. .fb. equalis at remotior quam .ab. et procidat radius .eh.

ALB e ALF [são iguais] aos dois [ângulos] LDC e LDE, cada um ao seu correspondente; mas estes são iguais, logo ALB e ALF são iguais); e AL é comum; logo, AB e AF são linhas iguais, pela quarta do primeiro dos *Elementos*, tal como os ângulos LAB e LAF. Por esta razão, AB e AF são [retas] igualmente baixas, por aquilo que foi dito na undécima deste. Então, BC e FE vêem-se [respetivamente] por meio dos raios AB e AC, e [dos raios] AF e AE, [que estão] igualmente elevados e baixos[8].

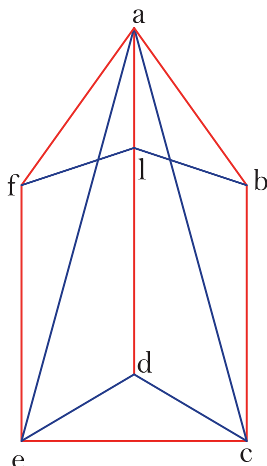


Fig. 41

Afirmo ainda que BC e FE se veem iguais. Uma vez que se provou que AB e AC são iguais a AF e AE; e como BC é igual a FE, por hipótese, então, pela oitava do primeiro, o ângulo BAC é igual ao ângulo FAE. Portanto, pela sexta suposição, BC e FE vêem-se iguais. Uma vez que estão equidistantes da perpendicular, não poderia ser de outra maneira.

Teorema décimo quinto. *De grandezas colocadas por baixo do olho em que uma excede a outra, se o olho se aproximar da menor, aquilo que se vê por cima [dela] aparece maior, se o olho se afastar da menor, [aquilo que se vê por cima dela] aparece menor.*
[Fig. 42] | Seja AB [a grandeza] maior e CD [a grandeza] menor, expostas ao olho E. Seja AF o excesso de AB sobre CD. Esteja CD mais próxima do olho, e dele se estendam os raios EC e EF. Do mesmo modo, ponha-se HK igual a CD e a FB, mas mais afastada do que AB, e estenda-se o raio EH.

8 A expressão «igualmente elevados e baixos» significa que AB e AF estão igualmente elevados, e AC e AE igualmente baixos.

Dico illud quod spectatur supra .cd. maius esse legittimo[32] excessu .af. et quod supra .hk. spectatur minus esse legittimo[33] excessu .af.

Quoniam enim .cd. .fb. aequales magnitudines sunt et .fb. remotior est, ergo per tredecimam huius sublimior spectatur .f. quare radius .ef. sublimior est radio .ec. producatur .ec. quousque contingat lineam .ab. sit contactus in .g. Dico .g. cadere inter .fb. signa quia si supra vel in signo .f. duae rectae lineae facientes angulum .fec. superficiem concluderent quod est contra vltimam communem sententiam primi elementorum, maior igitur est .ga. quam .af. per nonam communem sententiam. At .ag. est supra spectatum .af. autem verus et legittimus[34] excessus. Igitur prima pars vera. Eodem modo probabitur quod .eh. radius sublimior erit radio .ef. quare secabit .eh. radius lineam .ab. inter .af. signa sit in signo .l. .al. igitur minor est .af. .af. autem legittimus[35] est excessus. igitur supra spectatum minus est legittimo[36] excessu quod est secundum.

Si vero magnitudo .cd. nunc oculo sit vicinior, nunc ab oculo recedat, semper tamen media inter oculum et maiorem magnitudinem .ab. vel etiam | si manentibus [S37v] magnitudinibus oculus nunc accedat nunc recedat, quando minor magnitudo oculo fuerit vicinior, maius erit supra spectatum, quam quando remotior. Et consimiliter de duabus sequentibus conclusionibus dicatur. Quod eisdem rationibus demonstrabitur hoc postulato quod si duae | rectae lineae sese intersecant, post intersectionem [O36v] commutatur situs sitque ex superiore inferior poteruntque magnitudines ita distare quod minor magnitudo altior apparebit, et quod aeque altae apparent, quae omnia clarent ex demonstratione et subiectis e regione exemplis.

---

32 **legittimo** *S*, legitimo *O*
33 **legittimo** *S*, legitimo *O*
34 **legittimus** *S*, legitimus *O*
35 **legittimus** *S*, legitimus *O*
36 **legittimo** *S*, legitimo *O*

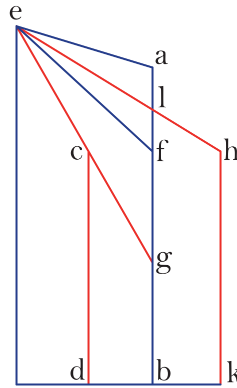


Fig. 42

Afirmo que aquilo que se vê por cima de CD é maior do que o excesso legítimo AF, e que o que se vê por cima de HK é menor do que o excesso legítimo AF.

Uma vez que CD e FB são grandezas iguais e FB está mais afastada, então, pela décima terceira [proposição] deste [tratado], F vê-se mais elevado. Por essa razão, o raio EF é mais alto do que o raio EC. Prolongue-se EC até que toque a linha AB; seja o contacto em G. Afirmo que G cai entre os pontos F e B porque, se caísse para cima [de F] ou no ponto F, as duas linhas retas que constituem o ângulo FEC encerrariam uma área, o que é contra a última noção comum do primeiro [livro] dos *Elementos*. Portanto, GA é maior do que AF, pela nona noção comum. Mas AG é aquilo que se vê por cima [de CD] e AF é o excesso verdadeiro e legítimo. Logo, a primeira parte [da proposição] é verdadeira. Do mesmo modo se provará que o raio EH será mais elevado do que o raio EF. Por esta razão, o raio EH cortará a linha AB entre os pontos A e F, seja no ponto L. Então, AL é menor do que AF. Mas AF é o excesso legítimo. Então, aquilo que se vê por cima [de KH] é menor do que o excesso legítimo, o que corresponde à segunda parte [da demonstração].

[Figs. 43 e 44] | No caso de a grandeza CD se aproximar ou afastar do olho, desde que esteja sempre entre o olho e a grandeza maior AB, ou no caso de o olho se aproximar ou se afastar, desde que as grandezas permaneçam [na posição em que estão], aquilo que se vê por cima será maior quando a grandeza menor estiver mais próxima do olho do que quando estiver mais afastada. O mesmo se diga a propósito das duas conclusões apresentadas de seguida, o que se demonstrará com os mesmos argumentos, postulando-se o seguinte: se duas linhas retas se intersectarem, e se após a interseção a posição se alterar, e se [esta alteração] for do mais alto para o mais baixo, poderão as grandezas ficar separadas uma da outra de tal forma que a grandeza menor aparece mais elevada ou que ambas aparecem igualmente elevadas. Todas estas coisas ficam claras a partir da demonstração e a partir dos exemplos incluídos à margem.

Theorema decimum sextum. *Quae sese inuicem excedunt inferius posito oculo adherente oculo minori, minus supra spectatum apparet recedente vero a minore maius*[37]. Sint .ab. .cd. .ef. in eodem plano magnitudines visae ab oculo .g. quarum aequales sint .cd. .ef. minores quam .ab. sitque excessus .ah. Sit oculus .g. cui propinquior sit .cd. .ab. remotior quam .cd. propior tamen quam .ef. ab oculo .g. emittantur radii .gc. .gh. abscisa tamen prius .bh. ad aequalitatem .cd. Item alter radius .ge.

37 **maius,** maiore *SO*

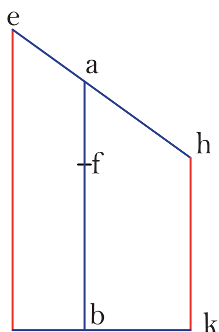


Fig.43

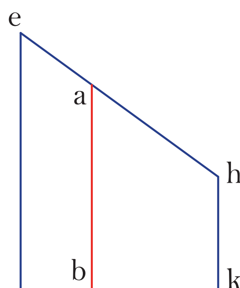


Fig. 44

Teorema décimo sexto. *De grandezas em que uma excede a outra, colocado o olho mais em baixo, se o olho se aproximar da menor, aquilo que se vê por cima [dela] aparece menor, se o olho se afastar da menor, [aquilo] que se vê por cima dela] aparece maior.* [Fig. 45] | Sejam AB, CD e EF grandezas no mesmo plano, vistas pelo olho G. Delas, sejam CD e EF iguais e menores do que AB. Seja AH o excesso [de AB sobre EF ou CD]. Seja G o olho, estando CD mais próximo dele e AB mais afastado [dele] do que CD, mas mais próximo do que EF. Do olho G, estendam-se os raios GC e GH (mas antes corte-se BH igual a CD) e, do mesmo modo, o outro raio GE.

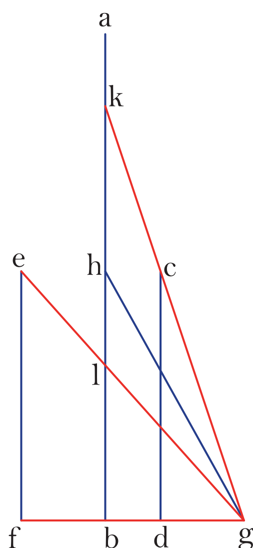


Fig. 45

Dico quod supra spectatum ipsius .ab. quod scilicet videtur supra .dc. minus esse legittimo excessu .ah. quod autem supra .fe. spectatur maius esse legittimo excessu.

Cum enim .cd. .hb.[38] aequales magnitudines spectantur ab oculo .g. et remotior est .hb. per decimam quartam ergo huius humilior spectatur .bh. quare sublimior est radius .gc. radio .gh. productus ergo radius .gc. tandem continget magnitudinem .ab. supra signum .h. sit in signo .k. .ka. igitur minus est supra spectatum ipso .ha. vero excessu, quod | erat primum. [S38r]

Eodem modo probabitur quod .ge. radius cadet infra .h. signum sit in .l. igitur secans et per nonam communem sententiam .la. maius sit .ha. sequitur quod spectatum super .ef. maius est legittimo excessu, quod erat secundum probandum.

Consimiliter si manente oculo .g. et magnitudine .ab. .cd. magnitudo nunc oculo vicinior fieret | nunc remotior, vel manente vtraque magnitudine, oculus .g. nunc [O37r] accederet, nunc recederet, semper cum .cd. remotior est oculo, supra spectatum maius[39] est quam quando propior[40]. Quod eisdem rationibus ostendetur.

Theorema decimum septimum. *Quaecunque sese inuicem excedunt, oculo posito in recta linea minori magnitudini*[41] *adherente uel recedente oculo aequale semper supra spectatum videbitur, vel aequaliter semper superius spectatum minorem*[42] *videbitur excedere.* Sit .ab. magnitudo maior .cd. .ef. magnitudines minores sed aequales inuicem. Sitque excessus .ag. videantur .ab. oculo .h. qui sit in altitudine .hk. aequali ipsis .cd. .ef. Sit etiam .cd. inter .ab. et .h. .ef. vero remotius ab oculo .h. Ab oculo autem .h. per .c. procidat radius ad lineam .ab. in signum .l. Item ab eodem oculo procidat visus .he. secans magnitudinem .ab. in signo .m.

---

38 **.hb.,** .ha. *SO*
39 **maius,** minus *SO*
40 **propior,** remortior *SO*
41 **minori magnitudini**, et minore magnitudine *SO*
42 **minorem**, minus *SO*

Afirmo que aquilo que, de AB, se vê por cima, ou seja, o que se vê por cima de DC, é menor do que o excesso legítimo AH, e que o que se vê por cima de FE é maior do que o excesso legítimo.

Uma vez que as grandezas iguais CD e HB são vistas a partir do olho G, e HB está mais afastada, então, pela décima quarta [proposição] deste [tratado] BH vê-se mais baixa. Por esta razão, o raio GC é mais elevado do que o raio GH. Então, o raio GC, prolongado, tocará a grandeza AB acima do ponto H, seja em K. Assim, KA (aquilo que [de AB] se vê por cima [de CD]) é menor do que o excesso HA, o que era o primeiro ponto [da demonstração].

Do mesmo modo se provará que o raio GE cairá abaixo de H, seja no ponto L. Então é secante [a HB] e, pela nona noção comum, LA será maior do que HA. Segue-se que aquilo que se vê por cima de EF é maior do que o excesso legítimo, o que se queria provar em segundo lugar.

Da mesma forma, se o olho G e a grandeza AB permanecerem no mesmo sítio, e a grandeza CD se aproximar ou afastar do olho; ou se, permanecendo cada uma das grandezas no mesmo lugar e o olho G se aproximar ou afastar, [então,] sempre que CD está mais longe do olho, aquilo que se vê por cima é maior do que quando está mais próximo. O que se mostrará com os mesmos argumentos.

Teorema décimo sétimo. *Em grandezas em que uma é maior do que a outra, se se colocar o olho numa reta perpendicular à grandeza menor e se o olho se aproximar ou afastar [dela], aquilo que se vê por cima ver-se-á sempre igual*[9]*; ou: o que se vê mais acima parecerá ultrapassar a grandeza menor sempre de maneira igual.*

[Fig. 46] | Seja AB a grandeza maior. Sejam CD e EF as grandezas menores, mas iguais. Seja AG o excesso. Tudo isto seja visto pelo olho H, situado na altura HK, [que é] igual a CD e a EF. Esteja CD entre AB e H, e esteja EF mais afastada do olho H. Do olho H, por C, estenda-se um raio visual para a linha AB, até ao ponto L. Do mesmo modo, a partir do mesmo olho, estenda-se o raio visual HE, secante à grandeza AB no ponto M.

9 Ou seja, a parte da grandeza maior que se vê por cima da menor aparece sempre igual.

Dico aequales esse lineas .al. .ag. .am.

Quoniam enim aequales sunt .cd. et .hk. vt positum est et parallelae per sextam vndecimi. Vtraque enim subiecto plano perpendicularis. ergo per 33.^{am} primi elementorum parallelae sunt .ch. .dk. Sunt etiam parallelae .cd. .lb. per sextam vndecimi Elementorum. Igitur parallelogramum est .bc. Quare per 34.^{am} primi elementorum. aequales sunt .cd. .lb. Rursus quoniam aequa|les sunt .hk. .ef. per hypotesim et [S38v] subiecto plano perpendiculares igitur sunt parallelae per sextam vndecimi quare per 34.^{am} primi, parallelae erunt .eh. .fk. sunt etiam .ab. .ef. parallelae per eandem sextam. Igitur .fm. parallelogramum est. latera ergo opposita .ef. .mb. aequalia sunt. Aequales autem sunt .ef. .gb. .cd. per hypotesim aequales quoque .cd. .bl. vt demonstratum est. ergo per primam communem sententiam aequales sunt .bg. .bl. .bm. quibus detractis ab eadem | magnitudine .ba. per tertiam communem sententiam relinquentur [O37v] aequales .ag. .al. .am. quod proponitur. nam et illud supra spectatur. Idem continget siue oculo in eadem altitudine, nunc accedente nunc recedente magnitudines quiescant, siue .cd. accedente oculo et recedente reliqua quiescant. Igitur quaecunque etc.

Theorema decimum octauum. *Datam altitudinem cognoscere quanta sit.*
Sit data altitudo .ab. subiecto plano perpendicularis in quo sit .bc.

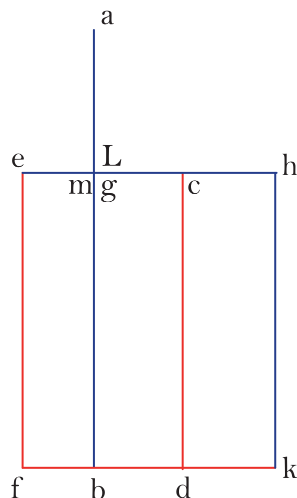


Fig. 46

Afirmo que as linhas AL, AG e AM são iguais.

Uma vez que CD e HK são iguais, como se pôs, e são paralelas, pela sexta [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*] (pois cada uma é perpendicular ao plano subjacente); então CH e DK são paralelas, pela trigésima terceira do primeiro dos *Elementos*. [Mas] CD e LB também são paralelas, pela sexta do undécimo dos *Elementos*. Então, BC é um paralelogramo. Por esta razão, pela trigésima quarta do primeiro dos *Elementos*, CD e LB são iguais. Novamente, uma vez que HK e EF são iguais, por hipótese, e perpendiculares ao plano subjacente, então são paralelas, pela sexta do undécimo. Por esta razão EH e FK serão paralelas, pela trigésima quarta do primeiro. AB e EF também são paralelas, pela mesma sexta [do undécimo]. Então, FM é um paralelogramo. Portanto, os lados opostos EF e MB são iguais. Mas EF, GB e CD são iguais (por hipótese), assim como CD e BL (como se demonstrou). Então, pela primeira noção comum, BG, BL e BM são iguais. Subtraídas estas da mesma grandeza BA restarão iguais AG, AL e AM, pela terceira noção comum, que é o que se propõe, pois isto é aquilo que se vê por cima. O mesmo acontecerá, quer no caso em que, permanecendo as grandezas no mesmo sítio, o olho se aproxima ou afasta, mantendo-se na mesma altura; quer no caso em que CD se aproxima ou afasta do olho, mantendo-se tudo o resto no mesmo sítio. Logo, em grandezas, etc.

Teorema décimo oitavo. *Saber quanto é uma altura dada.*

[**Fig. 47**] | Seja AB a altura dada, perpendicular ao plano subjacente em que se encontra BC.

Recipio definire quanta sit .ab. altitudo.

Procidat autem a sole per .a. signum in subiectum planum radius .ac. Sumpto deinde in linea .bc. signo .d. vtcumque[43] excitetur .de. subiecto plano perpendicularis. per vndecimam vndecimi, eruntque per sextam eiusdem .ab. .ed. parallelae et per 29.^{am} primi bis repetitam .ced. .cab. .cde. .cba. anguli aequales et .ecd. communis sunt igitur aequiangula triangula .ced. .cba. quare per quartam sexti erit .ba. ad .ed. sicut .bc. ad .cd. et vicissim per decimam sextam quinti erit .cd. ad .de. sicut .cb. ad .ba. quare per secundam datorum Euclidis .ab. magnitudo cognita siue data est. cum .cb. data sit, cum .cd. et .de. magnitudines atque eorum ratio detur | que est sicut [S39r] .cb. ad .ab.

Idem eueniet et si vbi libet sumatur perpendicularis alicuius vt ipsius .fg. vmbra vtputa .gh. Aequales enim erunt anguli ad .h. et .c. vel insensibiliter distabunt. similiaque erunt triangula .hgf. .abc. Quare succedet demonstratio.

---

43 **vtcumque,** vtrumque *SO*

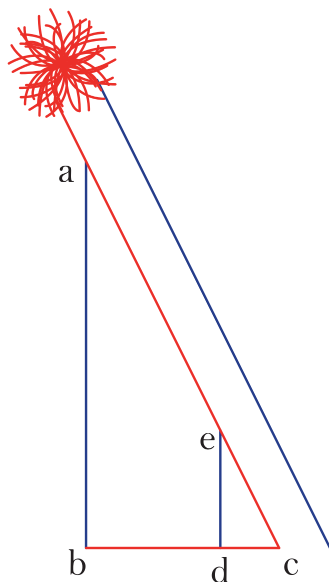


Fig. 47

Tenho de determinar quanto é a altura AB.

Estenda-se, a partir do Sol, pelo ponto A, para o plano subjacente, o raio AC. De seguida, tomado um ponto D na linha BC, levante-se DE perpendicular ao plano subjacente, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Pela sexta do mesmo, AB e ED serão paralelas. Pela vigésima nona do primeiro tomada duas vezes, os ângulos CED e CAB [serão iguais], [e os ângulos] CDE e CBA [também] serão iguais; e [o ângulo] ECD é comum; portanto, os triângulos CED e CBA são equiângulos. Por esta razão, pela quarta do sexto BA:ED=BC:CD e, *alternando*, pela décima sexta do quinto, CD:DE=CB:BA[10]. Por isso, pela segunda dos *Dados* de Euclides, a grandeza AB é conhecida, ou dada, porque CB é dada e as grandezas CD e DE são dadas, e é dada a razão destas duas últimas, que é CB:AB.

[**Fig. 48**] | O mesmo sucederá mesmo quando se toma (se se conseguir) a sombra (por exemplo, GH) de uma perpendicular, como FG. Com efeito, os ângulos em H e C serão iguais, ou terão uma diferença impercetível, e os triângulos HGF e ABC serão semelhantes[11]. Por esta razão, a demonstração dar-se-á.

---

10 Melo não apenas *alterna* (BA:ED=BC:CD::BA:BC=ED:CD), como *inverte* a proporção (BA:BC=ED:CD:: BC:BA=CD:ED).

11 O texto remete para as figuras 47 e 48: deve imaginar-se que a segunda se sobrepõe na primeira.

Theorema decimum nonum. *Sole non apparente datam altitudinem, quanta sit cognoscere.*

Sit data altitudo .ab. et non appareat sol.

Recipio | definire quanta sit. [O38r]

Ponatur .ed. sumpto plano perpendicularis, per duodecimam vndecimi et ab oculo .c. procidat radius uisiuus .cea. ducaturque perpendicularis .cdb. per duodecimam primi. eruntque .ed. .ab. per sextam vndecimi parallelae. et per 29.^{am} primi bis repetitam, et 32.^{am} eiusdem .ecd. .cba. triangula similia. et per quartam sexti et per decimam sextam[44] quinti sicut .cd. ad .de. ita .cb. ad .ba.[45] Notae autem sunt tres .cd. .de. .cb. nota ergo erit quarta per duodecimam sexti elementorum. quod proponitur. Idem facilius fiet posito signo .c. in dati oculi altitudine et adiiciendo eandem oculi altitudinem.

Idem fieri potest per speculum in superficie finitoris in quo speculo ab oculo .c. per signum[46] .d. refringatur[47] visus in .a. et excitata .ce. perpendiculari subiecto plano aequales enim erunt anguli .cde. et .adb. per primam specularium Euclidis etiam et recti .ced. .abd. quare reliqui .ecd. .bad. aequales sunt per 32.^{am} primi Elementorum. Aequiangula igitur sunt triangula[48] .ced. .abd.

44 **sextam,** sexti *SO*
45 **.ba.,** .be. *SO*
46 **signum**, radium *SO*
47 **refringatur,** refrangatur *SO*
48 **triangula,** triangule *SO*

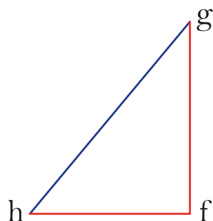


Fig. 48

Teorema décimo nono. *Não aparecendo o sol, saber quanto é uma altura dada.*

[Fig. 49] | Seja AB a altura dada e não apareça o sol.

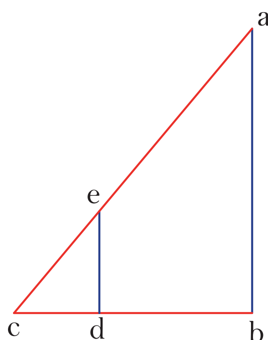


Fig. 49

Tenho de determinar quanto ela é.

Ponha-se ED perpendicular a um plano tomado, pela duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Do olho C, estenda-se o raio visual CEA. Trace-se a perpendicular CDB, pela duodécima do primeiro. Pela sexta do undécimo, ED e AB serão paralelas. Pela vigésima nona do primeiro duas vezes tomada, e pela trigésima segunda do mesmo, os triângulos ECD e CBA serão semelhantes. Pela quarta do sexto e pela décima sexta do quinto, CD:DE=CB:BA. Mas as três [retas] CD, DE e CB são conhecidas; logo, a quarta [reta] será conhecida, pela duodécima do sexto dos *Elementos*, que é o que se propõe. O mesmo se fará mais facilmente se se colocar o ponto C à altura do olho dado e se se acrescentar esta mesma altura do olho.

[Fig. 50] | O mesmo pode fazer-se por meio de um espelho na superfície do horizonte**.** Neste espelho, o raio visual [estendido a partir] do olho C reflita-se no ponto D para A. Traçada a perpendicular CE ao plano subjacente, os ângulos CDE e ADB serão iguais, pela primeira do *Tratado dos Espelhos* de Euclides. Além disso, CED e ABD são retos. Por esta razão, os restantes [ângulos] ECD e BAD são iguais, pela trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*. Então, os triângulos CED e ABD são equiân-

et proportionalia latera per quartam sexti[49] .de. .ec. .db. .ba. et per decimam sextam
quinti | Elementorum quorum tria nota sunt latera igitur et quartam <magnitudi- [S39v]
nem> est enim .gk.[50] speculum positum in superficie finitoris.

Quoniam vero non semper possumus accedere ad eleuatam altitudinem.
Sit .ab. data altitudo quae a signo .c. spectetur radio visuali .ca. in quo signetur .d. signum a quo ducatur perpendicularis in subiectum planum per vndecimam vndecimi. sic quod .de. cadat citra impedimentum, quod nos impedit quo minus possimus accedere ad dictam altitudinem .ab. Item retrocedendo in eodem plano et
in eadem recta linea .bec. a signo .f. spectetur | vertex .a. radio .fa. [O38v]

---

49 **sexti,** secundi *SO*
50 **.gk.,** .ak. *SO*

gulos, e os [seus] lados DE e EC, DB e BA são proporcionais, pela quarta do sexto e pela décima sexta do quinto dos *Elementos*. Destes, três lados são conhecidos; logo, o quarto também [o será], pois GK é um espelho colocado na superfície do horizonte.

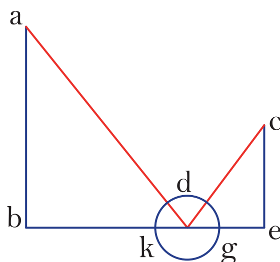
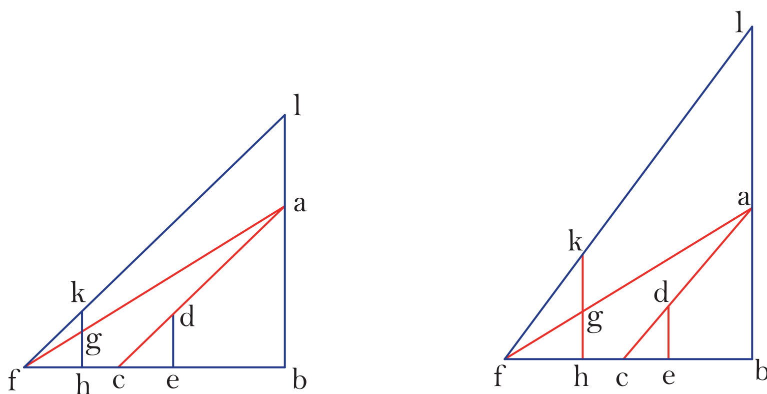


Fig. 50

Porque nem sempre podemos alcançar uma altura elevada.



Figs. 51 e 52[12]

[Figs. 51 e 52] | Seja AB a altura dada, e seja vista a partir do ponto C, por meio do raio visual CA. Assinale-se nele o ponto D, a partir do qual se trace a perpendicular ao plano subjacente, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], de tal forma que DE caia aquém do obstáculo que nos impede de chegar mais perto da referida altura AB. Voltando atrás, do mesmo modo, no mesmo plano e na mesma linha reta BEC, a partir do ponto F, veja-se o ponto mais alto [da altura dada] A, por meio do raio FA.

12 Trata-se de figuras repetidas.

In quo suscipiatur aliud signum .g. a quo etiam per vndecimam vndecimi perpendicularis ducatur .gh. in subiectum planum Itaque per signum .f. ducatur .fl. parallela ipsi .ca. per 31.am primi concurrens[51] ipsi .ab. in signo .l. Concurrent enim postquam sunt in eodem plano, alias parallele essent .ab. .fl. et cum .fl. .ca. etiam parallele sint essent per 30.am primi .ab. .ac. parallelae quod falsum est et producatur .hg. quousque secet lineam .lf. sitque in .k. erit igitur per secundam sexti elementorum .fc. ad .cb. sicuti .la. ad .ab. et per quartam eiusdem .bf. ad .fh. sicut .lb. ad .kh. vt in premissis demonstrationibus probabatur. Sunt enim .lb. .kh. perpendiculares eidem plano quare per sextam vndecimi inuicem parallelae et per 29.am primi .fkh. angulus .flb. angulo aequalis est. Rursus per eandem .fhk. .fbl. angulo aequus, at .kfh. communis, aequiangula igitur sunt .fhk. .flb. triangula, ita probabis quod sicut .bf. ad. .fh. ita .ab. ad .gh. per vndecimam quinti igitur sicut .lb. ad .kh. | ita .ab. ad .gh. totum scilicet ad totum sicut pars ad partem. Quare per decimam nonam quinti Elementorum reliquum .la. ad reliquum .kg. sicut .lb. ad .kh. et sicut .ab. ad .gh. vicissim igitur per decimam sextam eiusdem .la. ad .ab.sicut .kg. ad .gh. Ostensum autem est quod sicut .la. ad .ab. ita .fc. ad .cb. ergo per vndecimam quinti .kg. ad .gh. sicut .fc. ad .cb. Nota autem est .kg. .gh. .fc. reliqua ergo .cb. nota est per duodecimam sexti elementorum. vel secundam datorum erat autem .ce. ad .ed. sicut .cb. ad .ba. Suntque .ce.[52] .de. .cb. notae, nota igitur et cognita est .ab. altitudo per eandem duodecimam sexti. Quod intendebamus. [S40r]

Theorema vigesimum. | *Datam profunditatem quanta sit cognoscere.* [O39r]
Sit data profunditas .ab. Recipio definire quanta sit.

51 **concurrens,** concurrentes *SO*
52 **.ce.,** .cd. *SO*

Neste, tome-se um outro ponto G, a partir do qual se trace também, pela undécima do undécimo, a perpendicular GH ao plano subjacente. Pelo ponto F, trace-se FL paralela a CA, pela trigésima primeira [proposição do primeiro livro dos *Elementos*], [e] concorrente a AB no ponto L ([AB e FL] serão concorrentes uma vez que estão no mesmo plano, caso contrário, AB e FL seriam paralelas, e, como FL e CA também são paralelas, AB e AC seriam paralelas, pela trigésima do primeiro, o que é falso). Prolongue-se HG até que corte a linha LF, em K. Então, pela segunda do sexto dos *Elementos*, FC:CB=LA:AB. Mas, pela quarta do mesmo, BF:FH=LB:KH, como se provou nas demonstrações anteriores. Com efeito, LB e KH são perpendiculares ao mesmo plano; por esta razão, pela sexta do undécimo, [são] paralelas e, pela vigésima nona do primeiro, o ângulo FKH é igual ao ângulo FLB. Novamente, pela mesma, o ângulo FHK é igual ao ângulo FBL e [o ângulo] KFH é comum; logo, os triângulos FHK e FLB são equiângulos. Da mesma forma provarás que BF:FH=AB:GH. Então, pela undécima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*], LB:KH=AB:GH; ou seja, o todo [está] para o todo, como a parte para a parte. Por esta razão, pela décima nona do quinto dos *Elementos*, LA:KG=LB:KH=AB:GH. Então, *alternando*, pela décima sexta do mesmo, LA:AB=KG:GH. Mas mostrou-se que LA:AB=FC:CB; logo, KG:GH=FC:CB, pela undécima do quinto. Mas KG, GH e FC são conhecidas; logo, a restante CB é conhecida, pela duodécima do sexto dos *Elementos*, ou pela segunda dos *Dados*. Mas CE:ED=CB:BA e CE, DE e CB são conhecidas; logo, a altura AB também é conhecida, pela mesma duodécima do sexto. O que pretendíamos.

Teorema vigésimo. *Saber quanto é uma profundidade dada.*

[Fig. 53] | Seja AB a profundidade dada. Tenho de determinar quanto ela é.

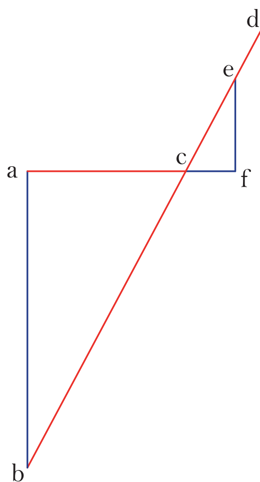


Fig. 53

In plano enim cui perpendicularis est .ab. suscipiatur linea .ac. quae sit ipsi .ab. perpendicularis per vndecimam primi Elementorum et ab oculo .d. per .c. signum emittatur radius visualis .dcb. In linea autem .dc. suscipiatur signum .e. vtcumque a quo per duodecimam primi Elementorum excitetur .ef. perpendicularis ipsi .ac. productae erunt igitur <aequales> per decimam quintam primi Elementorum anguli .ecf. .acb. at per quartum[53] postulatum elementorum .efc. .bac. etiam aequales sunt .fec. igitur ipsi .abc. angulo aequus est per 32.^{am} primi Elementorum. Quare per quartam sexti sicut .ef. ad .ab. ita .fc. ad .ca. vicissim igitur sicut .fc. ad .fe. ita .ac. ad .ab. Sunt autem tres primae .ef. .cf. .ca. magnitudines cognitae erit igitur et quarta .ab. cognita per duodecimam sexti Elementorum. Quod erat probandum.

| **Theorema vigesimum primum.** *Datam longitudinem quanta sit cognoscere.* [S40v]
Sit data longitudo .ab. Recipio definire quanta sit.

Si vnus finis eius possit accedi.
Ponatur itaque a signo .a. super .ab. perpendicularis .ea. per vndecimam primi Elementorum in qua suscipiatur .c. signum a quo erigatur perpendicularis super .ea. .cd. ab oculo autem .e. per .d. signum videatur <.b.>

Erunt igitur .ba. .dc. parallelae per sextam vndecimi quare per 29.^{am} primi bis repetitam erunt .edc. .eba. .ecd. .eab. aequales et .dec. communis aequiangula igitur sunt .ecd. .eab.

53 **quartum,** quartam *SO*

No plano a que AB é perpendicular, tome-se a linha AC, perpendicular a AB, pela undécima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Do olho D, pelo ponto C, estenda-se o raio visual DCB. Na linha DC, tome-se um qualquer ponto E. A partir dele, pela duodécima do primeiro dos *Elementos*, baixe-se EF perpendicular ao prolongamento de AC. Então, pela décima quinta do primeiro dos *Elementos*, os ângulos ECF e ACB serão iguais. Mas, pelo quarto postulado dos *Elementos*, EFC e BAC também são iguais. Então, FEC é igual ao ângulo ABC, pela trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*. Por esta razão, pela quarta do sexto, EF:AB=FC:CA; logo, *alternando*, FC:FE=AC:AB[13]. Mas as três primeiras grandezas EF, CF e CA, são conhecidas; logo, também a quarta [grandeza] AB é conhecida, pela duodécima do sexto dos *Elementos*. O que se queria provar.

Teorema vigésimo primeiro. *Saber quanto é um comprimento dado.*
Seja AB o comprimento dado. Tenho de determinar quanto ele é.

Se se puder chegar a uma das suas extremidades.
[Fig. 54] | Ponha-se a perpendicular EA em AB, a partir do ponto A, pela undécima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Nela, tome-se o ponto C. A partir dele, levante-se, em EA, a perpendicular CD. A partir do olho E, pelo ponto D, veja-se B.

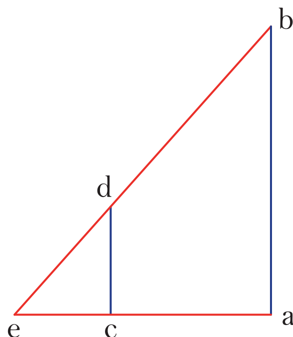


Fig. 54

Então, BA e DC serão paralelas, pela sexta do undécimo. Por esta razão, pela vigésima nona do primeiro duas vezes tomada, [os ângulos] EDC e EBA, ECD e EAB serão iguais; e [o ângulo] DEC é comum. Logo, os triângulos ECD e

13 Mais uma vez, Melo não apenas alterna, como inverte.

triangula per quartam ergo sexti et decimam sextam quinti. sicut .ec. ad .cd. ita .ea. ad .ab. Licet autem metiri quantae sint .ec. .cd. .ea. ergo per duodecimam sexti elementorum et .ab. nota erit. Data igitur longitudo .ab. cognita.

Quod si neuter terminus | accessibilis sit. [O39v]
Inueniatur per corollarium in vigesima sexta primi elementorum a nobis additum distantia ipsius .ab. longitudinis ab oculo .e. sit .ek.[54] et signetur punctus aliquis .c. accessibilis et super .c. erigatur perpendicularis .cd. per vndecimam primi Elementorum et ab oculo .e. per .c. spectetur aliquod punctum ipsius lineae .ab. quod sit .k. ita tamen quod angulus .bke. rectus sit. Item ab eodem oculo spectetur .b. signum per .d. in quo .cd. perpendicularis contingit .eb. Ab eodem oculo .e. spectetur .a. radio .ea. extendatur .dc. per secundum postulatum quousque secet lineam .ea. in .f. tunc quoniam .dck. .bkc. anguli recti sunt. ergo per vigesimam octauam primi elementorum .dc. .bk. parallelae sunt per vigesimam nonam ergo eiusdem .edc. .ebk. anguli aequa|les sunt, quare aequiangula sunt triangula .edc. .ekb. Sicut ergo per quartam [S41r] sexti .ec. ad .ek. ita .dc. ad .bk. Eodem modo probabis quod sicut .ec. ad .ek. ita .cf. ad .ka. per vndecimam ergo quinti sicut .dc. ad .kb. ita .cf. ad .ka. quare per duodecimam eiusdem sicut .dc. ad .bk. ita .df. ad .ba. iterum per vndecimam eiusdem sicut .ec. ad .ck. ita .df. ad .ab. vicissim ergo per decimam sextam eiusdem sicut .ec. ad .df. sic .ck. ad .ab. Sunt autem .ec. .df. .ck. cognitae cognita igitur et .ba. per duodecimam sexti elementorum. Quod erat faciendum.

---

54 **.ek.,** .ck. *SO*

EAB são equiângulos. Então, pela quarta do sexto e pela décima sexta do quinto, EC:CD=EA:AB. Mas consegue medir-se a quantidade de EC, CD e EA; logo, pela duodécima do sexto dos *Elementos*, AB também será conhecida. Portanto, o comprimento dado AB será conhecido.

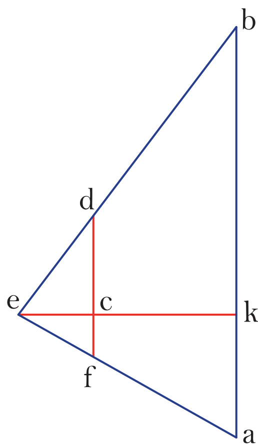


Fig. 55

Quanto ao caso de não ser acessível nenhum dos extremos.

[Fig. 55] | Descubra-se, pelo corolário da vigésima sexta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos* acrescentado por nós, a distância do comprimento AB ao olho E, seja EK. Assinale-se um ponto qualquer acessível C. Em C, levante-se a perpendicular CD, pela undécima do primeiro dos *Elementos*. A partir do olho E, por C, olhe-se um ponto qualquer da linha AB, seja K, mas de maneira que o ângulo BKE seja reto. Do mesmo modo, a partir do mesmo olho, veja-se o ponto B, por D, onde a perpendicular CD toca em EB. A partir do mesmo olho E, veja-se A pelo raio EA. Prolongue-se DC, pelo segundo postulado, até cortar a linha EA em F. Como os ângulos DCK e BKC são retos, então, pela vigésima oitava do primeiro dos *Elementos*, DC e BK são paralelas. Portanto, pela vigésima nona do mesmo, os ângulos EDC e EBK são iguais. Por esta razão, os triângulos EDC e EKB são equiângulos. Então, pela quarta do sexto, EC:EK=DC:BK. Do mesmo modo provarás que EC:EK=CF:KA. Logo, pela undécima do quinto, DC:KB=CF:KA. Por esta razão, pela duodécima do mesmo, DC:BK=DF:BA. Novamente, pela undécima do mesmo EC:CK=DF:AB. Logo, *alternando*, pela décima sexta do mesmo, EC:DF=CK:AB. Mas EC, DF e CK são conhecidas; logo, BA também será conhecida, pela duodécima do sexto dos *Elementos*. O que se queria fazer.

Theorema vigesimum secundum. *Si in eodem plano in quo et oculus circuli ambitus positus fuerit recta linea ipsius circuli ambitus apparebit.*
Sit oculus .a. in plano .abc. in quo et circunferentia visa .bdc.

Dico circunferentiam .bdc. apparere rectam lineam.

Quoniam enim videtur .bc. ergo ad fines ipsius .bdc. procidunt visus .ab. .ac. procidat etiam visus .ad. Tandem igitur occurret ipsi .bc. | rectae lineae sit in signo [O40r] .e. sub eisdem igitur visibus spectatur circunferentia .bdc. et recta linea .bec. quare circunferentia .bdc. apparet recta linea .bec. In ipsis enim visibus vnica est differentia positionis videlicet superioris et inferioris dextri aut sinistri, anterioris vel posterioris. Igitur.

Theorema vigesimum tertium. *Sphera vtcumque inspecta ab vno oculo minus semper hemispherio cernetur, ipsum vero spectatum sub sphaerae circulo comprehensum apparet.*
Ab oculo .a. spectetur sphera .bcd. cuius centrum sit | .e. [S41v]

Teorema vigésimo segundo. *Se se colocar um arco de círculo no mesmo plano em que está o olho, o arco do círculo aparecerá como uma linha reta.*

[Fig. 56] | Esteja o olho A no plano ABC, no qual também se encontra a circunferência avistada BDC.

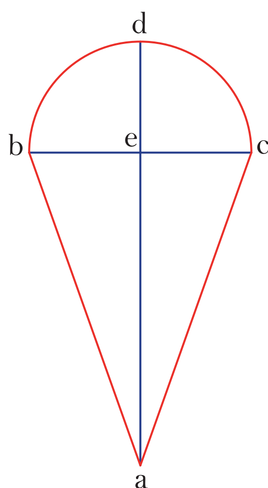


Fig. 56

Afirmo que a circunferência BDC aparece como uma linha reta.

Uma vez que se vê BC, então, os raios visuais AB e AC estendem-se até às extremidades de BDC. Estenda-se também o raio visual AD. Este encontrará a linha reta BC, no ponto E. Então, vê-se tanto a circunferência BDC, como a linha reta BEC, sob os mesmos raios visuais. Por esta razão, a circunferência BDC aparece como a linha reta BEC. Com efeito, nos raios visuais há uma única diferença de posição, a saber: de superior e inferior, de direito e esquerdino, de anterior e posterior[14]. Logo.

Teorema vigésimo terceiro. *De uma esfera observada de qualquer maneira a partir do olho, ver-se-á sempre menos do que um hemisfério, e aquilo que se vê aparece compreendido por um círculo da esfera.*

[Fig. 57] | A partir do olho A, veja-se a esfera BCD, com centro em E.

---

14 As diferenças de posição encontram-se definidas nas definições do início deste tratado e no comentário à *Especulária* (proposições sétima e nona).

Dico partem visam vt .bfcd. minorem esse hemisphaerio, eius vero basim vt .bfd. esse circulum.

Ab oculo enim .a. procidant visus contingentes spheram .ab. .ad. .af. et connectantur .ae. .eb. .ef. .ed. Secetque linea .ae. circunferentiam in signo .c. et .a. signo .b. excitetur .bk. perpendicularis ipsi .ae. per duodecimam primi Elementorum et connectantur .fk. .dk. Quoniam igitur per centrum .e. ducitur superficies .aeb. erit sectio spherae circulus vt .cbdl., cuius centrum erit .e. per definitionem spherae. quod etiam probatur a Theodosio in prima sui libri propositione quem circulum quoniam tangit recta linea .ab. rectus erit angulus .abe. per decimam octauam tertii Elementorum. Quare per decimam septimam primi maior erit angulus .abe. angulo .aeb. et per decimam nonam eiusdem .ae. linea maior .ab. minor igitur .bc. circunferentia quam medietas semicirculi.

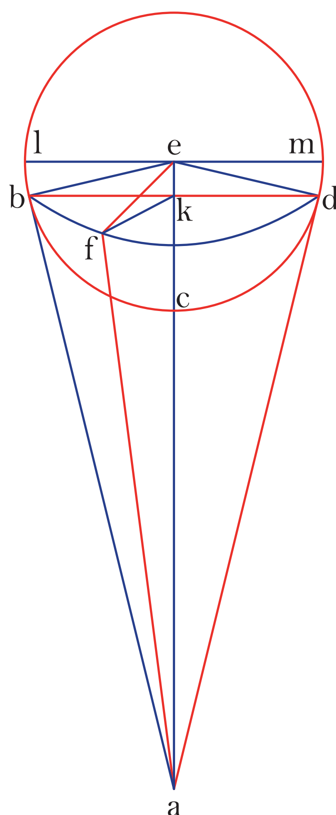


Fig. 57

Afirmo que a parte vista, seja BFCD, é menor do que um hemisfério e que a sua base, seja BFD, é um círculo.

A partir do olho A, estendam-se os raios visuais AB, AD e AF, tangentes à esfera. Ligue-se A a E, E a B, E a F e E a D. A linha AE corte a circunferência no ponto C. A partir do ponto B, trace-se BK perpendicular a AE, pela duodécima do primeiro dos *Elementos*. Ligue-se F a K e D a K. Uma vez que, pelo centro E, se traça a superfície AEB, então a secção da esfera será um círculo, seja CBDL. O seu centro será E, pela definição de esfera, o que também é provado por Teodósio, na primeira proposição do seu livro. Uma vez que a linha reta AB é tangente a esse círculo, o ângulo ABE será reto, pela décima oitava do terceiro dos *Elementos*. Por esta razão, pela décima sétima do primeiro, o ângulo ABE será maior do que o ângulo AEB, e, pela décima nona do mesmo, a linha AE será maior do que a linha AB. Então, a circunferência BC é menor do que uma metade de um semicírculo.

Vel melius forsan.
Cum angulus .abe. sit rectus et maior sit angulo .aeb. erit .aeb. recto minor. Sic probabitur .dea. angulus recto minor. ambo igitur .bea. .aed. duobus rectis minores sunt ducaturque super .ae. ad signum .e. perpendicularis .el. que extendatur | usque in .m. [O40v] erit igitur angulus .aem. per decimam quartam primi elementorum etiam rectus. Sed per trigintesimam[55] tertiam sexti, sicut .lea. angulus ad .bea. angulum ita .lec. sector ad .ebc. sectorem minor est .bea. angulus .lea. angulo minor igitur .ebc. sector .lea. sectore eodem modo probabis de .cm. quod maior sit .cd. circunferentia tota igitur .lcm. maior est .bcd. circunferentia. at .lcm. semicirculus est. ex definitione .bcd. igitur semicirculo minor est. Ita probabis de quacumque cir|cunferentia visa. Quod [S42r] primum est.

Et quoniam rectus est angulus .abe. et eadem ratione recti sunt .afe. .ade. ergo per 48.^{am} primi quadratum ipsius .ae. aequale est quadratis .ad. .de. Item .af. .fe. Iterum per eandem quadratis .ab. .be. detractis ergo aequalibus quadratis .eb. .ef. .ed. ex definitione spherae reliqua aequalia erunt aequales igitur sunt lineae .ab. .af. .ad. Cunque .be. .fe. .ed. etiam sint aequales et .ae. omnibus communis per octauam primi erunt .bea. .fea. .dea. anguli adinuicem aequales. quare <cum> circa illos aequales angulos latera .be. .ef. .ed. sint et .ek. communis <aequales> erunt[56] per quartam primi bis repetitam simul cum primo postulato elementorum bases .bk. .fk. .dk. et anguli .bke. .fke. .dke. At .bke. rectus est recti igitur et .fke. .dke. Consimiliter ostendetur quod quotquot ad contingentes ducentur <aequales sunt> quare per 5.^{am} vndecimi .bk. .kf. .kd. et quotquot a .k. ad contingentes ducentur in eodem plano <sunt>. Aequales autem probatae sunt lineae .kb. .kf. .kd. et quotquot ad contactum ducentur ergo circulus est .bfd. cuius per nonam tertii .k. centrum erit. Quod est secundum.

Theorema vigesimum quartum. *Oculo ad sphaeram propius accedente spectatum minus est putabitur autem maius videri.*
| Ab oculo <.a.> spherae portio visa sit .bcd. cuius centrum .e. Accedat autem oculus [O41r] in linea .ae. ponaturque in signo .f. vnde visa pars spherae sit .gch.

55 **trigintesimam,** trigintam *SO*
56 **communis <aequales> erunt,** communis erit *SO* [totam sententiam corruptam esse uidetur; quam minime tamen correximus]

Talvez ainda melhor.
Uma vez que o ângulo ABE é reto e é maior do que o ângulo AEB, [então,] AEB será menor do que um reto. Assim, provar-se-á que o ângulo DEA é menor do que um reto. Então, ambos os ângulos BEA e AED [somados] são menores do que dois retos. Trace-se em AE, no ponto E, a perpendicular EL, e que ela seja prolongada até M. Então, o ângulo AEM também será reto, pela décima quarta do primeiro dos *Elementos*. Mas como o ângulo LEA para o ângulo BEA, assim o sector LEC para o sector EBC, pela trigésima terceira do sexto. O ângulo BEA é menor do que o ângulo LEA; logo, o sector EBC será menor do que o sector LEA. Do mesmo modo provarás que CM é maior do que CD. Então, a circunferência toda LCM é maior do que a circunferência BCD. Mas LCM é um semicírculo, por definição. Logo, BCD é menor do que um semicírculo. Assim provarás acerca de qualquer circunferência vista. O que era o primeiro [objetivo].

Uma vez que o ângulo ABE é reto e, pela mesma razão, AFE e ADE são retos, então, pela quadragésima oitava do primeiro, o quadrado de AE é igual aos quadrados de AD e DE [somados]. Assim também, [o quadrado de AE é igual] aos quadrados de AF e FE [somados]. E mais uma vez, pela mesma, aos quadrados de AB e BE [somados]. Então, subtraídos os quadrados iguais EB, EF e ED, pela definição de esfera, os [quadrados] restantes serão iguais. Então, as linhas AB, AF e AD serão iguais. Uma vez que BE, FE e ED também são iguais, e AE é comum a todos, os ângulos BEA, FEA e DEA serão iguais, pela oitava do primeiro. Por esta razão, uma vez aqueles ângulos iguais são compreendidos pelos lados BE, EF e DE e pelo [lado] comum EK; [então,] pela quarta do primeiro duas vezes tomada, em conjunto com o primeiro postulado dos *Elementos*, serão iguais as bases BK, FK e DK, assim como os ângulos BKE, FKE e DKE. Mas BKE é reto, logo, FKE e DKE também são retos. O mesmo se mostrará de quantas [retas] se traçarem para as tangentes. Por esta razão, pela quinta do undécimo, BK, KF, KD e quantas [retas] se traçarem de K para as tangentes, estão no mesmo plano. Mas provou-se serem iguais as linhas KB, KF e KD e quantas se traçarem para o ponto de contacto; logo, BFD é um círculo, com centro em K, pela nona do terceiro. O que era o segundo [objetivo].

Teorema vigésimo quarto. *À medida que o olho se aproxima de uma esfera, o que se vê é menor, mas pensar-se-á que se vê maior.*

[Figs. 58 e 59] | Do olho A, veja-se a porção BCD de uma esfera com centro E. Que o olho se aproxime ao longo da linha AE e que ele seja posto no ponto F, de onde a parte vista da esfera seja GCH.

Dico minorem esse portionem .gch. quam .bcd. sed videri maiorem.

Per centrum ductum planum .abe. secet spheram, eritque spherae sectio quae sit .bcd. circulus: cuius centrum .e. per definitionem spherae. At quoniam .ab. .ad. visus sphe|ram contingunt, contingant et circulum .bcd. eritque rectus angulus [S42v] .abe. per Decimam octauam tertii. Item et angulus .fge. quare quadratum .ae. per 48.^{am} primi aequale erit duobus quadratis .eb. .ba. quadratum vero .ef. duobus quadratis .eg. .gf. et quoniam maius est quadratum .ea. quam quadratum .ef. maiora erunt quadrata .eb. .ba. quadratis .eg. .gf. Detractis ergo aequalibus quadratis .eb. .eg. maius erit quadratum .ba. quadrato .gf. Et proinde maior erit linea .ab. linea .gf. Abscindatur .bk. aequalis ipsi .gf. per tertiam primi et connectatur .ke. et quoniam angulus .kbe. angulo .fge. aequalis est vterque enim rectus, et aequa latera .be. .ge. per definitionem spherae. aequalia iterum .bk. .gf. vt positum est, ergo per quartam primi aequalis erit angulus .bek. angulo .gef. Sed maior est .bea. quam .bek. per nonam communem sententiam. igitur .bea. etiam maior erit quam .gef.

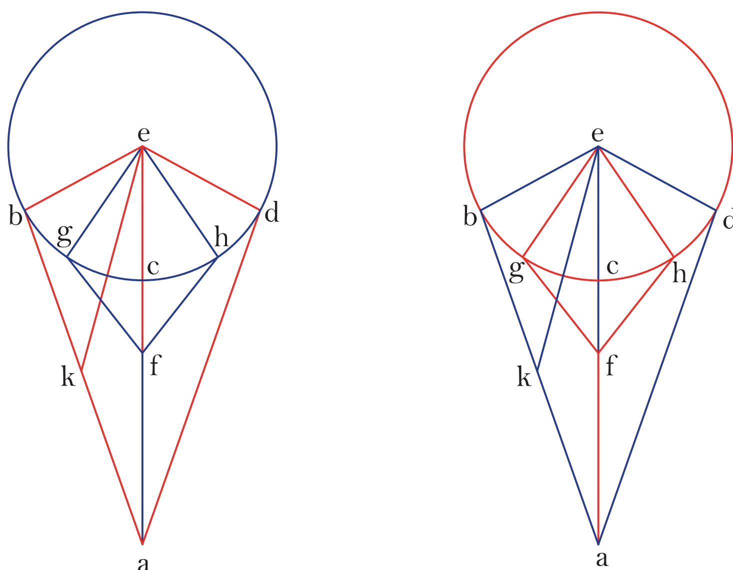


Fig. 58 e 59[15]

Afirmo que a porção GCH é menor do que BCD, mas que se vê maior.

Que o plano ABE, traçado pelo centro [da esfera], corte a esfera. Produzir-se-á uma secção da esfera; seja o círculo BCD, com centro E, pela definição de esfera. Uma vez que os raios visuais AB e AD são tangentes à esfera, sejam também tangentes ao círculo BCD. ABE será um ângulo reto, pela décima oitava [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. O mesmo sucede com o ângulo FGE. Por esta razão, pela quadragésima oitava do primeiro, o quadrado de AE será igual aos dois quadrados de EB e BA [somados], e o quadrado de EF [será igual] aos dois quadrados EG e GF [somados]. Visto que o quadrado de EA é maior do que o quadrado de EF, os quadrados de EB e BA [somados] serão maiores do que os quadrados de EG e GF [somados]. Então, subtraídos os quadrados de EB e EG, [que são iguais,] o quadrado de BA será maior do que o quadrado de GF. Em consequência, a linha AB será maior do que a linha GF. Corte-se BK, igual a GF, pela terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Ligue-se K a E. Uma vez que o ângulo KBE é igual ao ângulo FGE (pois ambos são retos), e os lados BE e GE são iguais, pela definição de esfera, e, novamente, BK e GF são iguais, como se pôs, então, pela quarta do primeiro, o ângulo BEK será igual ao ângulo GEF. Mas BEA é maior do que BEK, pela nona noção comum; logo, BEA também será maior do que GEF, e a cir-

15 Trata-se de figuras repetidas.

maiorque circunferentia .bc. quam .gc. per trigintesimam tertiam sexti. Consimiliter ostendetur maior esse circumferentia .cd. quam .ch. Igitur maior est circunferentia .bcd. spectata quando oculus est in .a. quam .gch. spectata quando oculus est, in .f. et portio spherae .bcd. quam .gch. Quod est primum.

Rursus quoniam aequales sint anguli .bke. .gfe. per quartam primi, maior autem est per decimam sextam primi angulus .bke. angulo .bae. maior ergo erit angulus .gfe. angulo .bae. | Eadem ratione maior erit angulus .efh.[57] quam .ead. totus igitur **[O41v]** angulus .gfh. toto angulo .bad. maior est. Maior igitur videtur .gch. ab oculo .f. quam .bcd. ab oculo .a. per quartam et quintam suppositiones. Quod est secundum. Ergo oculo ad spheram propius accedente etc.

Theorema vigesimum quintum. | *Sphera binis spectata oculis si dimetiens spherae* **[S43r]** *aequus fuerit rectae lineae distanti ab oculis ipsius hemispherium spectabitur.*
A duobus oculis .ab. inspiciatur sphaera .cde. cuius centrum sit .f. ipsius autem .ab. distantiae[58] duorum oculorum sit medietas .ag. per 10.^{am} primi elementorum. erit igitur .ag. ipsi .ef. semidiametro aequalis super .ab. a signo .g. excitetur perpendicularis per vndecimam primi elementorum. que sit .gf. ita quod centrum spherae contingat illam perpendicularem.

Dico quod ab oculis .ab. hemispherium spectatur.

Connectantur .af. .fb. cumque planum .afb. transeat per centrum spherae erit eiusdem cum sphera intersectio circulus qui sit .cde.[59] in quo visus altrinsecus contingentes[60] spheram sint .aebc. eritque vt in 23.^{a} huius demonstratum est angulus .aef. rectus similiter .fcb. est igitur quadratum .af. aequum duobus quadratis .fe. .ea. per 48.^{am} primi et per eandem idem □ .af. aequale erit duobus □ □ .fg. .ga. detractis ergo aequalibus □ □ aequalium linearum .ef. .ag. relinquentur □ □ .eafg. aequalia. aequales igitur sunt .aegf. per octauam ergo primi cum etiam .ef. .ag. aequales sint et .af. comunis aequalis erit angulus .afe. angulo .fag. et .fae. angulo .afg. sunt autem per 32.^{am} primi elementorum .eaf. .efa. | anguli vni recto aequales quare et .efa. .afg. **[O42r]** recto aequales sunt per vigesimam octauam primi elementorum bis repetitam parallelogramum erit .eg.

---

57 **.efh,** .efg. *SO*
58 **distantiae,** distantur *SO*
59 **.cde.,** cdbe. *SO*
60 **contingentes**, contingentis *SO*

cunferência BC [será] maior do que [a circunferência] GC, pela trigésima terceira do sexto. Da mesma forma se mostrará que a circunferência CD é maior do que [a circunferência] CH. Então, a circunferência BCD, vista quando o olho está em A, é maior do que [a circunferência] GCH, vista quando o olho está em F, e a porção da esfera BCD [é maior] do que [a porção de esfera] GCH. O que era o primeiro [objetivo].

Novamente, uma vez que os ângulos BKE e GFE são iguais, pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], e o ângulo BKE é maior do que o ângulo BAE, pela décima sexta do primeiro, então o ângulo GFE será maior do que o ângulo BAE. Pela mesma razão, o ângulo EFH será maior do que [o ângulo] EAD. Então, o ângulo todo GFH é maior do que o ângulo todo BAD. Logo, GCH vê-se maior a partir do olho F do que BCD a partir do olho A, pela quarta e pela quinta suposição [deste tratado]. O que é o segundo [objetivo]. Logo, à medida que o olho se aproxima de uma esfera, etc.

Teorema vigésimo quinto. *Se se observar uma esfera com os dois olhos, e o diâmetro da esfera for igual à linha reta que separa os olhos, ver-se-á um hemisfério dela.*

[Fig. 60] | A partir dos dois olhos A e B, veja-se a esfera CDE com centro F. Seja AG a metade da distância AB entre os dois olhos, pela décima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Então, AG será igual ao semidiâmetro EF. Em AB, a partir do ponto G, levante-se, pela undécima do primeiro dos *Elementos*, uma perpendicular GF, de maneira que o centro da esfera seja tangente àquela perpendicular.

Afirmo que, a partir dos olhos A e B, se observa um hemisfério.

Ligue-se A a F e F a B. Uma vez que o plano AFB passa pelo centro da esfera, a sua interseção com a esfera será um círculo, seja CDE. Que os raios AE e BC sejam tangentes a ele, um de cada lado. O ângulo AEF será reto, como foi demonstrado na vigésima terceira [proposição] deste [tratado]. O mesmo sucede com [o ângulo] FCB. Então, o quadrado de AF é igual aos dois quadrados de FE e EA [somados], pela quadragésima oitava do primeiro. Pela mesma [proposição], o mesmo quadrado de AF será igual aos dois quadrados de FG e GA [somados]. Então, subtraídos os quadrados iguais das linhas iguais EF e AG, restarão os quadrados iguais de EA e FG. Então, AE e GF são iguais. Portanto, pela oitava do primeiro, visto que EF e AG também são iguais e AF é comum, o ângulo AFE será igual ao ângulo FAG, e o ângulo FAE ao ângulo AFG. Mas, pela trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*, os ângulos EAF e EFA são iguais a um reto; por esta razão, também EFA e AFG são iguais a um reto. [Portanto,] pela vigésima oitava do primeiro dos *Elementos* duas vezes tomada, EG será um paralelogramo.

Eodem modo probabitur .gc. parallelogramum igitur per vigesimam nonam eiusdem angulus .agf. angulo .efg. aequalis est. item angulus .bgf. angulo .cfg.[61] At duo anguli .fga. .fgb. duobus rectis aequa|les sunt per decimam[62] 3.am primi elementorum ergo et .efg. .gfc. duobus rectis aequales sunt, et per decimam 4.am eiusdem .efc. vna est recta linea transitque per centrum, est igitur .edc. semicirculus. quare revolutis ab oculis circa lineam .fg. poterit spectari hemispherium vndique scilicet ab ipso .d. 4.a circuli oculis tamen quiescentibus nunquam spectatur hemispherium. [S43v]

Propositio vigesima sexta. *Cum oculorum distantia sphere diametro maior fuerit hemispherio maius id quod ipsius spherae spectabitur apparebit.*
Sint .ab. oculi a quibus spectetur sphera .cde. cuius centrum sit .f. et medium ipsius .ab. sit .g. per 10.am primi elementorum sitque .gf. perpendicularis ipsi .ab. et cum tota .ab. maior sit diametro spherae, erit .ag. eius medietas maior .ef. semidiametro.

61 **.cfg.,** .efg. *SO*
62 **decimam,** tridecimam *SO*

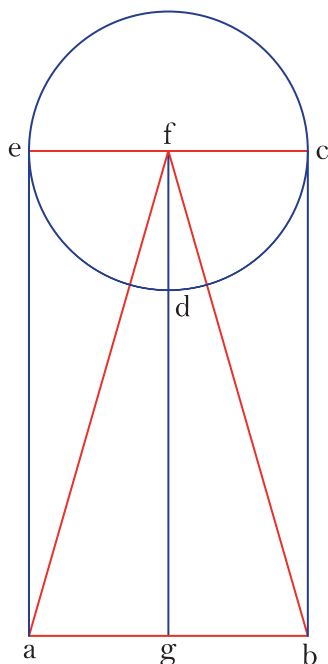


Fig. 60

Do mesmo modo se provará que GC é um paralelogramo. Então, pela vigésima nona do mesmo, o ângulo AGF é igual ao ângulo EFG. Do mesmo modo, o ângulo BGF [é igual] ao ângulo CFG. Mas os dois ângulos FGA e FGB são iguais a dois retos, pela décima terceira do primeiro dos *Elementos*; logo, EFG e GFC também são iguais a dois retos. Mas, pela décima quarta do mesmo, EFC é uma linha reta; e passa pelo centro; logo, EDC é um semicírculo. Por esta razão, se os olhos rodarem em torno da linha FG poderá ver-se um hemisfério de todos os lados, ou seja, a partir do ponto D [poderá ver-se] uma quarta [parte] do círculo. Pelo contrário, se os olhos permanecerem imóveis, não se observará um hemisfério de todo.

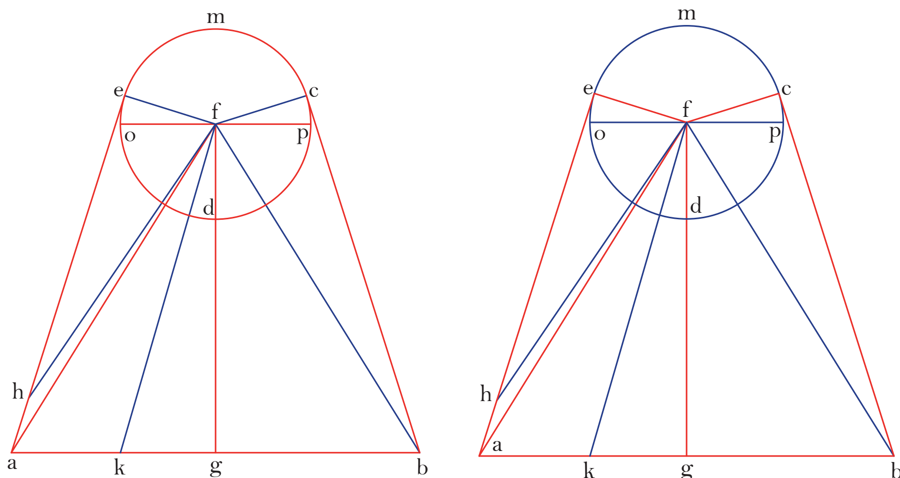
Proposição vigésima sexta. *Se a distância entre os olhos for maior do que o diâmetro da esfera, a parte da esfera que se observa aparecerá maior.*

[Figs. 61 e 62] | Sejam A e B os olhos, a partir dos quais se veja a esfera CDE, com centro F. Seja G o meio de AB, pela décima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, e seja GF perpendicular a AB. Uma vez que toda AB é maior do que o diâmetro da esfera, a sua metade AG será maior do que o semidiâmetro EF.

Dico iam spectari a duobus oculis plusquam dimidium spherae.

Cadant enim ab oculis .ab. rectae lineae visuales .ae. .bc. quae vt probatum est in vigesima tertia contingent sectionem spherae circulum existentem, connexisque .ec. signis cum .f. erunt anguli .aef. .bcf. per decimam octauam tertii recti, quare per quadragesimam octauam primi □ .af. aequum est □ □ .ae. .ef. et per eandem eidem □ .af. aequa sunt □ □ .ag. .gf. duo igitur □ □ .ae. .ef. aequa sunt duobus □ □ .ag. .gf. per primam communem sententiam, detractis itaque inequalibus quadratis .ag. | [O42v] maiore et minore .ef. reliquum □ .ae. reliquo quadrato .fg. maius erit et exinde linea .ae. maior linea .fg. Abscindatur igitur per tertiam primi elementorum .eh. ipsi .fg. aequalis connectanturque .hf. Item quoniam .ga. maior est quam .fe. ponatur .gk. ipsi .fe. aequalis per tertiam primi elementorum. cum igitur .feh. angulus aequalis sit | .fgk. angulo (vterque enim rectus) per quartam primi angulus .ehf. angulo .gfk. [S44r] aequus. At maior est .ehf. angulus angulo .eaf. per decimam[63] sextam eiusdem ergo et .gfk. maior est quam .eaf. multoque magis .gfa. maior erit quam .eaf. admisso ergo communis .afe. totus angulus .gfe. maior erit duobus .eaf. .afe. Et quoniam rectus est .aef. erunt per trigintesimam secundam primi .eaf. .efa. vni recto aequales

63 **decimam,** vigesimam *SO*



Figs. 61 e 62[16]

Afirmo que, a partir dos dois olhos se observa mais do que metade da esfera.

A partir dos olhos A e B, caiam as linhas retas visuais AE e BC, as quais, como se provou na vigésima terceira [proposição deste tratado], serão tangentes à secção da esfera, que é um círculo. Ligados os pontos E e C a F, os ângulos AEF e BCF serão retos, pela décima oitava do terceiro. Por esta razão, pela quadragésima oitava do primeiro, o quadrado de AF é igual aos dois quadrados de AE e EF [somados]. Pela mesma, os quadrados de AG e GF [somados] são iguais ao quadrado de AF. Portanto, os dois quadrados de AE e EF [somados] são iguais aos dois quadrados de AG e GF [somados], pela primeira noção comum. Assim, subtraídos os quadrados desiguais, o de AG (maior) e o de EF (menor), o restante [quadrado] de AE será maior do que o restante quadrado de FG. Em consequência, a linha AE será maior do que a linha FG. Então, corte-se EH igual a FG, pela terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, e ligue-se H a F. Do mesmo modo, Uma vez que GA é maior do que FE, ponha-se GK igual a FE, pela terceira do primeiro dos *Elementos*. Uma vez que o ângulo FEH é igual ao ângulo FGK (pois ambos são retos); [então,] pela quarta do primeiro, o ângulo EHF é igual ao ângulo GFK. Mas o ângulo EHF é maior do que o ângulo EAF, pela décima sexta do mesmo; logo, GFK também é maior do que EAF, e GFA será muito maior do que EAF. Então, adicionado o ângulo comum AFE, o ângulo todo GFE será maior do que os dois ângulos EAF e AFE [somados]. Visto que AEF é reto, [então,] EAF e EFA [somados] serão iguais a

16 Trata-se de figuras repetidas.

quibus maior est .efg. maior igitur .efg. est recto. eodem modo probabis quod .gfc. .gfp. recto maior est, eritque .edc. circunferentia semicirculo maior ducta enim per .f. signum parallela ipsi .ab. ipsa erit diameter .op. eritque .gfp. angulus per vigesimam nonam primi elementorum rectus minor angulo .gfc. etiam et ipse .gfo. rectus et .odp.[64] semicirculus et cum per trigesimam tertiam, sexti bis repetitam .edc. circunferentia maior .odp. semicirculo que tota sub aspectum cadit Revolutis autem oculis circa .fg. similiter ostendetur vndique a signo .d. spectari plusquam quartam circuli. Cum igitur oculorum distantia sphaerae diametro maior fuerit, hemispherio maius id quod ipsius sphaerae spectabitur apparebit, oculis vero immotis nunquam totum hemispherium apparet.

Posset quidem breuius probari quod angulus .efg. recto maior est quoniam enim probatum est quod .ehf. .gfk. anguli aequales sunt. suntque per trigintesimam tertiam primi elementorum .efh. .ehf. anguli vni recto aequales, erunt etiam .efh. .kfg. anguli recto aequales adiunctoque .hfk. totus .efg. recto maior est.

Proposito vigesima septima. | *Si oculorum interuallum minus fuerit sphe|rae diametro, id sphaerae quod spectatur hemispherio minus spectabitur.* **[O43r]** **[S44v]**

Demonstratio Brissoti.
A duobus oculis .ab. spectetur sphaera .cde. cuius centrum .f. sitque ipsius .ab. dimidium .ag. eritque minus quam .ef. semidiameter postquam tota .ab. minor est diametro.

Dico spherae visam partem minorem hemispherio.

Sit enim vt prius .gf. perpendicularis super .ab. connectanturque .af. Igitur plani .afg. cum sphera .f. sectio erit, circulus vt .cdem. In eo itaque plano sphaeram contingentes sunt radii .ae. .bc. connexisque .ef. .fc. ducatur .fh. parallela ipsi .ea. a signo .f. per 31.^{am} primi elementorum secans .ab in signo .h. continget eam productam aliquando postquam ipsam .ea. .ab. linea contingit et sunt in eodem plano. Item ducatur .ak. parallela ipsi .ef. secans .fh. in signo .k. parallelogramum enim est .efka. per trigintesimam quartam ergo primi elementorum .efk. .eak. anguli aequales sunt, et cum .aef. rectus sit per decimam[65] octauam tertii et per vigesimam nonam primi .efk. rectus erit et per consequens etiam .eak. rectus, .kfa. igitur et .fak. duobus rectis minores sunt (sunt enim partes ipsorum) quare per quintum postulatum

64 **.odp.,** .op. *SO*
65 **decimam,** vigesimam *SO*

um reto, pela trigésima segunda do primeiro. EFG é maior do que estes [somados]; logo, EFG é maior do que um reto. Do mesmo modo provarás que [o ângulo] GFC é maior do que o [ângulo] reto GFP e que a circunferência EDC será maior do que um semicírculo. Traçada pelo ponto F a paralela a AB, ela será o diâmetro OP. O ângulo GFP, reto pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos,* será menor do que o ângulo GFC. O ângulo GFO também é reto, e ODP é um semicírculo. Uma vez que, pela trigésima terceira do sexto duas vezes tomada, a circunferência EDC, que cai, toda ela, sob o olhar, é maior do que o semicírculo ODP; e [uma vez que], levados os olhos em torno de FG, da mesma forma se mostrará que de todos os lados, [considerados] a partir do ponto D, se observa mais do que uma quarta parte do círculo, então, se a distância dos olhos for maior do que o diâmetro da esfera, a parte da esfera que se observa aparecerá maior do que um hemisfério. Se, pelo contrário, os olhos permanecerem imóveis, não aparece um hemisfério completo.

Poderia mais brevemente provar-se que o ângulo EFG é maior do que um reto porque se provou que os ângulos EHF e GFK são iguais; mas, pela trigésima terceira do primeiro dos *Elementos,* os ângulos EFH e EHF [somados] são iguais a um reto; logo, também os ângulos EFH e KFG [somados] serão iguais a um reto e, somado HFK, o ângulo todo EFG é maior do que um reto.

Proposição vigésima sétima. *Se a distância entre os olhos for menor do que o diâmetro da esfera, a parte da esfera que se vê ver-se-á menor do que um hemisfério.*

Demonstração de Brissot

[Fig. 63] | A partir dos dois olhos A e B, observe-se a esfera CDE com centro F. Seja AG metade de AB; [AG] será menor do que o semidiâmetro EF, uma vez que toda AB é menor do que o diâmetro.

Afirmo que a parte vista da esfera é menor do que um hemisfério.

Como antes, seja GF perpendicular sobre AB e ligue-se A a F. Então, a interseção do plano AFG com a esfera será um círculo, seja CDEM. Assim, nesse plano estão os raios tangentes à esfera, AE e BC. Ligados E a F e F a C, trace-se FH, a partir do ponto F, paralela a EA, pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos,* [e] secante a AB no ponto H (AB será tangente à reta traçada [FH] a dado momento, uma vez que a linha AB é tangente à linha EA e estão no mesmo plano). Do mesmo modo, trace-se AK, paralela a EF, secante a FH no ponto K. Com efeito, EFKA é um paralelogramo, então, pela trigésima quarta do primeiro dos *Elementos,* os ângulos EFK e EAK são iguais; uma vez que AEF é reto, pela décima oitava do terceiro, [então,] EFK também será reto, pela vigésima nona do primeiro; em consequência, EAK também é reto, então KFA e FAK [somados] são menores do que dois retos (pois são partes daqueles); por esta razão, pelo quinto postulado,

.fh.[66] .ak. <concurrunt in .k.> Quoniam igitur .aef. rectus est erit per trigintesimam quartam primi etiam .akf. rectus et per vigesimam nonam eiusdem .efk. rectus, eruntque per eandem .ef. .ak. aequales.

At ex hypotesi maior est .ef. quam .ag. maior igitur est .ak. quam .ag. Si igitur .ak. sit eadem ipsi .ah. maior erit .ah. quam .ag. Sin minus quoniam rectus est .akf. angulus maior angulo .ahk. per decimam sextam primi et aequalis ipsi .akh. per decimam definitionem eiusdem, maior igitur est angulus .akh. angu|lo .ahk. quare [S45r] latus .ah. maius est latere .ak. per decimam nonam, multo igitur maior est .ah. quam .ag. quare per nonam communem | sententiam angulus .afh. maior est angulo .afg. [O43v] Addito igitur communi .afe. maior erit angulus rectus .efh. angulo .efg. igitur per trigintesimam tertiam, sexti circunferentia .de. minor est .ep. quarta circuli. Similiter de circunferentia .dc. fiet demonstratio. Minor igitur est .cde. semicirculo et proinde minus hemispherio videtur igitur etc.

66 **.fh.,** .fk. *SO*

[as retas] FH e AK concorrem em K. Então, uma vez que AEF é reto, AKF também é reto, pela trigésima quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Pela vigésima nona do mesmo, EFK também é reto e, pela mesma [trigésima quarta do primeiro], EF e AK serão iguais.

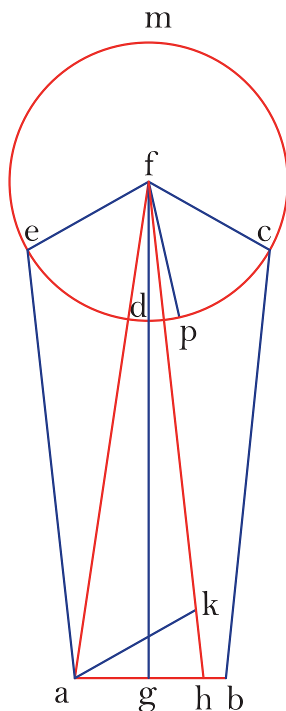


Fig. 63

Mas EF é maior do que AG, por hipótese. Então, AK é maior do que AG. Portanto, se AK é igual a AH; [então,] AH será maior do que AG. Caso contrário, visto que o ângulo AKF, reto, é maior do que o ângulo AHK, pela décima sexta do primeiro, e é igual a AKH, pela décima definição do mesmo, então o ângulo AKH é maior do que o ângulo AHK. Por esta razão, o lado AH é maior do que o lado AK, pela décima nona; logo, AH é muito maior do que AG. Por esta razão, pela nona noção comum o ângulo AFH é maior do que o ângulo AFG. Somado o ângulo comum AFE, o ângulo reto EFH será maior do que o ângulo EFG. Então, pela trigésima terceira do sexto, a circunferência DE é menor do que o quadrante de círculo EP. Da mesma forma, far-se-á a demonstração sobre a circunferência DC. Logo, CDE é menor do que um semicírculo e, em consequência, vê-se menor do que um hemisfério. Portanto, etc.

Aliter idem demonstrare.

Sit sphaera cuius centrum .c. sitque eius diameter interuallo inter duo oculos .ab. a quibus videtur ipsa sphaera maior.

Dico quod minus spectatur hemisphaerio.

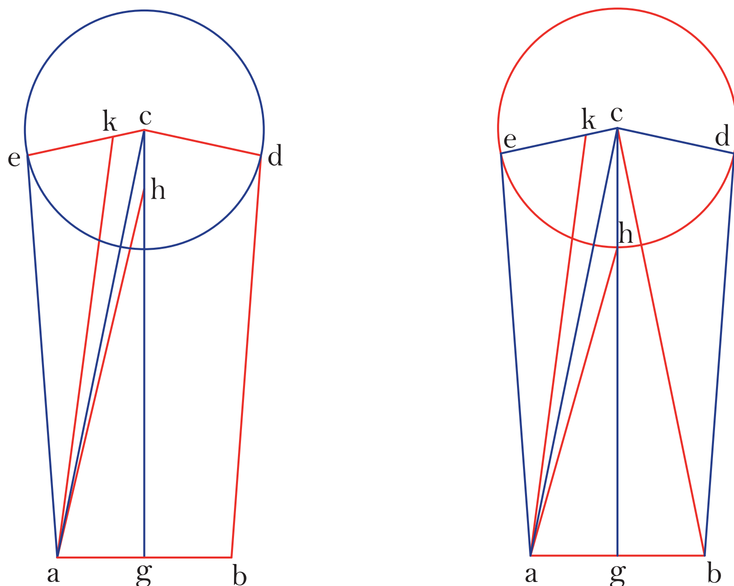
Diuisa .ab. bifariam per 10.^{am} primi, excitetur a .g.[67] signo dimidiae sectionis perpendicularis .gc. per vndecimam eiusdem, sic quod contingat centrum sphaerae visae connectantur .ac. .cb. planum igitur .acb. secans sphaeram circulus est ad quem cadant radii visuales .ae. .bd. connexisque .ec. .cd. per 20.^{am} tertii elementorum erunt .cea. .cdb. anguli recti. Cum igitur .cea. angulus rectus sit erit per 47.^{am} primi □ ipsius .ca. aequum duobus □ □.ec. .ea. Quoniam etiam .cga. angulus rectus sit ex definitione perpendicularis erit per eandem □ .ca. aequalem □ □ .ag. .gc. Sunt igitur per primam communem sententiam .ec. .ea. □ □ aequa quadratis .cg. .ga. Cum autem .ec. maior sit .ag. erit eius □[68] maius □ .ag. illis

67 **a .g.,** .ag. *SO*

68 **eius □,** eius □□ *SO*

Demonstrar o mesmo de maneira diferente.

[Figs. 64 e 65] | Seja uma esfera com centro C e seja o seu diâmetro maior do que a distância entre os dois olhos A e B, a partir dos quais se vê a referida esfera.



Figs. 64 e 65[17]

Afirmo que se vê menos do que um hemisfério.

Bissetada AB, pela décima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], levante-se, a partir do ponto G da bissecção, a perpendicular GC, pela undécima do mesmo, de tal forma que seja tangente ao centro da esfera vista. Ligue-se A a C e C a B. Então, o plano ACB secante à esfera é um círculo. Nele caiam os raios visuais AE e BD. Ligados E a C e C a D, os ângulos CEA e CDB serão retos, pela vigésima do terceiro dos *Elementos*. Uma vez que o ângulo CEA é reto, então o quadrado de CA será igual aos dois quadrados de EC e EA [somados], pela quadragésima sétima do primeiro. Visto que o ângulo CGA é reto, pela definição de perpendicular, o quadrado de CA será igual aos quadrados de AG e GC [somados], pela mesma [proposição]. Então, pela primeira noção comum, os quadrados de EC e EA [somados] são iguais aos quadrados de CG e GA [somados]. Mas, uma vez que EC é maior do que AG, o quadrado dessa [reta] será maior do que o quadrado de AG.

17 Trata-se de figuras repetidas, em que a segunda corrige pontualmente a primeira.

ergo demptis, ab aequalibus remanebit □ .cg. maius □ .ea. quare .cg.[69] linea maior est quam sit .ea. linea. At per tertiam primi elementorum ab ipsa .cg. abscindatur aequalis ipsi .ea. quae sit .hg. ponatur etiam per eandem .ek. ipsi .ag. | aequalis connectanturque .ak. .ha. et quoniam .ek. .ag. aequales sunt, et .gh. ipsi .ea. et .kea. angulus angulo .agh.[70] (vterque enim rectus) ergo per quartam primi elementorum .ahg. angulus aequus est angulo .kae. et angulus .eka. angulo .gah. At per trigintesimam secundam primi .eka. .eak. | anguli recto aequales sunt. erunt etiam .eka. .ahg. vni recto aequales. Sed .eka. angulus exterior est trianguli .akc. ergo per decimam sextam primi interiore et sibi opposito .kca. maior est et per eandem .gha. ipso .gca. maior est. Totus igitur .ecg. recto minor est. Similiter probabitur .dch. recto minor quare vt probatum est in vigesima tertia huius, erit .ed. semicirculo minor. voluendo igitur .ab. oculos manente .gc. continuo minus semicirculo spectabitur quare et minus hemisphaerio. Quod erat probandum. [S45v] [O44r]

Lemma. *Si basi cilyndri parallela ducatur secans cilyndrum communis sectio circulus erit, si autem non fuerit basis communi sectioni parallela, oualis erit figure*[71] *communis sectio.*

Sit cilyndrus cuius axis .ac. seceturque superficie .egf. parallela basi.

Dico quod ipsa circulus est.

Signentur in circunferentia basis, cuius centrum .c. tria puncta .b. .k. .h. connectanturque cum centro productis rectis lineis .cb. .ch. .ck. Ducaturque per 31.[am] primi a signo .b. ipsi .ca. parallela .bl. tangens superficiem .egf.[72] in signo .e. et per eandem per .h. signum contingens ipsam superficiem .egf. in signo .f. per ipsum autem .k.[73] ducatur parallela .km. ipsi axi contingens .egf.[74] in .g. signo connectantur .egf. signa cum .d. signo | quod est in axe .ac. in quo intersecatur axis. Quoniam igitur .efg. .bhk. paralellae sunt superficies et .ac. perpendicularis est super .khb. ergo per conuersam 14.[e] vndecimi demonstrata a nobis in decima sexta eiusdem eadem super .efg. perpendicularis erit. et propterea per secundam definitionem vndecimi .edc. .cdf. .cdg. recti sunt et per vigesimam octauam primi elementorum .de. .bc. paralelae sunt, et per septimam vndecimi erunt in eodem plano | cum ipsis .dc. .eb. parallelae .ed. .bc. est igitur .db. parallelogramum, quare per trigintesimam quartam primi elementorum .ed. .bc. aequales sunt. [S46r] [O44v]

69 **.cg.,** .eg. *SO*
70 **.agh.,** .agb. *SO*
71 **figure** *S*, figurae *O*
72 **.egf.,** .agf. *SO*
73 **ipsum,** ipsam *SO*
74 **.egf.,** .edf. *SO*

Subtraídos aqueles de iguais, restará o quadrado de CG maior do que o quadrado de EA. Por esta razão, a linha CG é maior do que a linha EA. Ora, pela terceira do primeiro dos *Elementos*, corte-se, de CG, uma [reta] igual a EA, seja HG. Pela mesma, ponha-se EK igual a AG. Ligue-se A a K e H a A. Como EK e AG são iguais, e GH é igual a EA, e o ângulo KEA [é igual] ao ângulo AGH (pois ambos são retos), então, pela quarta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo AHG é igual ao ângulo KAE e o ângulo EKA [é igual] ao ângulo GAH. Mas, pela trigésima segunda do primeiro, os ângulos EKA e EAK [somados] são iguais a um reto. Os ângulos EKA e AHG [somados] também serão iguais a um reto. Mas o ângulo EKA é externo do triângulo AKC; logo, pela décima sexta do primeiro, é maior do que o interior e oposto KCA. Pela mesma, GHA é maior do que GCA. Então, o ângulo todo ECG é menor do que um reto. Da mesma forma se provará que DCH é menor do que um reto. Por esta razão, como se provou na vigésima terceira deste, ED será menor do que um semicírculo. Então, rodando os olhos A e B, e permanecendo GC imóvel, observar-se-á continuamente menos do que um semicírculo. Por esta razão, também [se verá] menos do que um hemisfério. O que se queria provar.

Lema. *Se se traçar uma [superfície] paralela à base de um cilindro e secante ao cilindro, a intersecção será um círculo. Se a base não for paralela à interseção, a interseção será de forma oval.*

[Fig. 66] | Seja um cilindro com eixo AC, e seja cortado pela superfície EGF, paralela à base.

Afirmo que esta [superfície] é um círculo.

Assinale-se na circunferência da base, de centro C, os três pontos B, K e H, e liguem-se [estes pontos] ao centro, traçadas as linhas retas CB, CH e CK. Pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], a partir do ponto B, trace-se BL paralela a CA e tangente à superfície EGF no ponto E; pela mesma [proposição], pelo ponto H, [trace-se] uma tangente à superfície EGF no ponto F, e pelo ponto K, trace-se KM paralela ao eixo e tangente a EGF no ponto G. Ligue-se os pontos E, G e F ao ponto D, que está no eixo AC, e no qual o eixo é intersectado [pela superfície EGF]. Uma vez que EFG e BHK são superfícies paralelas e AC é perpendicular sobre KHB, então, pela conversa da décima quarta do undécimo demonstrada por nós na décima sexta do mesmo, esta [linha reta AC] será perpendicular sobre EFG. Por isso, pela segunda definição do undécimo, [os ângulos] EDC, CDF e CDG são retos; e, pela vigésima oitava do primeiro dos *Elementos*, DE e BC são paralelas. Pela sétima do undécimo, as paralelas ED e BC estarão no mesmo plano em que [estão] DC e EB. Então, DB é um paralelogramo. Por esta razão, pela trigésima quarta do primeiro dos *Elementos*, ED e BC são iguais.

At ex definitione circuli .cb. .ch. aequales sunt, quare per primam communem sententiam .ed. .ch. aequales sunt. Probabitur eodem modo quod .dh. parallelogramum est et quod .df. .ch. aequales sunt. Idem de .dg.[75] .ck. tres igitur .de. .df. .dg. et quotquot produxeris a signo .d. in superficie .efg. aequales sunt quare .efg. circulus est cuius centrum per nonam tertii elementorum est .d. Sectio igitur si paralela fuerit circulus est. Quod fuit primum probandum.

Non sit nunc sectio parallela basi.
Dico quod ipsa non est circulus <sed> oualis figure.

Sit igitur vt prius .egf. secans axem .ca. in signo .d. ducaturque per .d. signum planum parallelum ipsi .bhk. per annotata a nobis in duodecima vndecimi elementorum Euclidis.

---

75 **de .dg.,** .de. .dg. *SO*

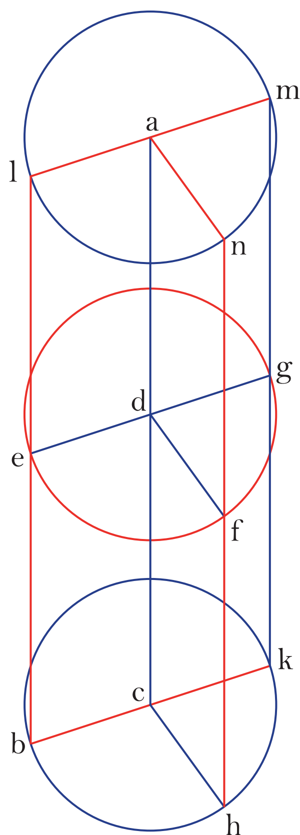


Fig. 66

Mas CB e CH são iguais, pela definição de círculo. Por esta razão, ED e CH são iguais, pela primeira noção comum. Provar-se-á, do mesmo modo, que DH é um paralelogramo e que DF e CH são iguais. O mesmo [se pode dizer] a propósito de DG e CK. Então, as três [retas] DE, DF e DG, e quantas [retas] traçares a partir do ponto D na superfície EFG, são iguais. Por esta razão, EFG é um círculo com centro D, pela nona do terceiro dos *Elementos*. Logo, se a secção for paralela, é um círculo. O que se quis provar primeiro.

Agora, que a secção não seja paralela à base.

[Fig. 67] | Afirmo que ela não é um círculo, mas é de forma oval.

Como anteriormente, seja EGF secante ao eixo CA no ponto D. Pelo ponto D, trace-se um plano paralelo a BHK, pelas anotações que acrescentámos à duodécima [proposição] do undécimo dos *Elementos* de Euclides.

Quod id iam probatum est circulus erit, et per tertiam vndecimi eiusdem communis sectio ipsorum planorum recta linea est. Sit illa .ef. quae quoniam transit per .d. centrum et punctum axis erit diameter circuli. Et a puncto .k. existente in basi parallela ducatur axi .ca. per 31.am vndecimi quae sit .kl. contingatque planum illud quod basi parallelum | est in signo in .h. sectionem autem .efg. in .g. connectantur igitur [S46v] .dh. .dg. .gh. eritque trigonus .dhg. Cum autem .ck. parallelogramum sit (ex illo enim circunducto constat noster cilyndrus) et .cak. angulus rectus erit etiam .akl. rectus per 29.am primi elementorum. quare ex definitione erit .ak. perpendicularis super .lk. At .dh.

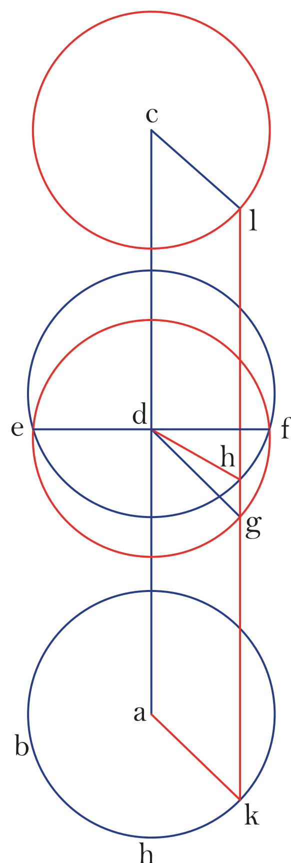


Fig. 67

Que este será um círculo, já se provou. Pela terceira do undécimo do mesmo [livro dos *Elementos*], a interseção destes [dois] planos é uma linha reta, seja EF. Uma vez que esta [reta] passa por D, [que é o] centro do círculo e [um] ponto do eixo, [ela] será um diâmetro do círculo. A partir do ponto K, que está na base, trace-se uma paralela ao eixo CA, pela trigésima primeira do undécimo. Seja KL e seja tangente ao plano que é paralelo à base no ponto H, e [seja tangente] à secção EFG no ponto G. Ligue-se D a H, D a G e G a H[18]. DHG será um triângulo. Visto que CK é um paralelogramo (o nosso cilindro resulta da sua revolução), CAK será um ângulo reto. AKL também será reto, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*. Por esta razão, por definição, AK será perpendicular sobre LK. Mas DH

18 Os pontos G e H já estavam ligados, ao ser traçada a reta KGHL.

ipsi .ak. parallela est, vt in priore huius Lemmatis parte probatum est angulus igitur .dhk. per vigesimam nonam primi elementorum rectus est. quare in triangulo .dhg. angulus .dhg. rectus est maximusque angulus in triangulo .dhg. At per decimam nonam primi maiori angulo | maius latus subtenditur subtensaque est .dg. angulo [O45r] .dhg. et .dh. angulo .dgh. minori maior igitur .dg. ipsa .dh. Suntque .df. .dh. aequales ex definitione circuli. maior igitur est .dg. ipsa .df. et sunt in eadem superficie. non est igitur superficies quae non est parallela basi circulus sed oualis. quod fuit probandum.

Theorema vigesimum octauum. *Cilyndro vtcunque*[76] *inspecto ab oculo vno minus hemicilyndro spectabitur.*

Ab oculo .a. spectetur cilyndrus .bc.

76 **vtcunque,** utrunque *SO*

é paralela a AK, como se provou na primeira parte deste lema. Então, o ângulo DHK é reto, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*. Por esta razão, no triângulo DHG, o ângulo DHG é reto; e é o maior ângulo do triângulo DHG. Mas, pela décima nona do primeiro, o maior lado é subtenso pelo maior ângulo. DG é subtensa pelo ângulo DHG e DH [é subtensa] pelo ângulo menor DGH; logo, DG é maior do que DH. Mas DF e DH são iguais, pela definição de círculo. Então, DG é maior do que DF, e estão na mesma superfície. Logo, a superfície que não é paralela à base não é um círculo mas [é de forma] oval. O que se quis provar.

Teorema vigésimo oitavo. *De um cilindro observado de qualquer maneira a partir de um olho, ver-se-á menos do que um semicilindro.*

[Fig. 68] | A partir do olho A, observe-se o cilindro BC.

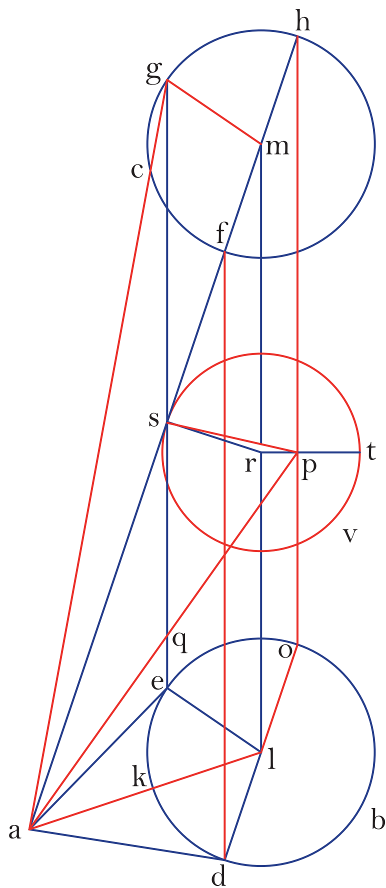


Fig. 68

Dico[77] minus hemicilyndro spectari.

Per signum enim .a. <...> ducatur planum parallelum basi cilyndri .fgh. per annotata a nobis in duodecimam vndecimi elementorum. eritque ipsius .ade. sectio per precedens Lemma circulus centrumque illius .l. in axe cilyndri qui sit .lm. Itaque ab oculo .a. in plano .ade. cilyndrum contingentes visus emittantur .ae. .ad. connectanturque .el. .dl. erit per decimam octauam tertii elementorum vterque angulorum .ael. .adl. rectus producatur per .e. signum ipsi .lm. parallela per 31.^{am} primi | que sit .eg. connec- [S47r]
tantur .gm. Per .d. eidem .lm. parallela ducatur .df. connectanturque .fm. erit igitur per definitionem cilyndri vtrumque ipsorum .elmg. .dlfm. parallelogramum rectangulum quorum .eg. .df. erunt in circumferentia cilyndri connectantur .af. .ag. quare erunt duo plana .adf. .aeg. contingentia cilyndrum non autem eundem secantia.

Sin autem in plano .aeg. sit signum .p. intra cilyndrum et connectatur .pa. secans lineam .eg.[78] in signo .q. et per notata in duodecimam vndecimi elementorum ducatur planum parallelum ipsi .dke. per signum .p. sitque .prs. cuius sectio cum cilyndro per precedens lemma erit circulus cuius centrum in axe cilyndri .lm. erit .r. sitque contactus circunferentiae | circuli cum linea .eg. .s. eritque .rs. semidiameter circuli ipsi .le. aequalis et [O45v]
parallela per decimam sextam vndecimi elementorum atque .dl. parallelogramum sitque circulus ille .svt. Et quoniam .rp. sunt diuersa puncta et .r. centrum circuli .p. autem non erit postquam est in superficie et plano .aeg. que contingit cilyndrum et .r. in axe cilyndri connectantur .rp. extendaturque quousque occurrat circunferentiae in signo .t. ac ex definitione circuli .rt. .rs. aequales erunt: Et quoniam per decimam octauam tertii elementorum[79] .ael. angulus rectus est rectus etiam .leg. per definitionem (est enim .legm. rectangulum) erit per 4.^{am} vndecimi elementorum .el. perpendicularis super plano .aeg. Item quoniam .srt. .edl. parallela sunt plana per decimam octauam vndecimi .sr. .el. parallelae erunt quare per octauam vndecimi .sr. eidem plano .aeg. perpendicularis erit. Cumque .sp. ponatur in plano .aeg. erit per secundam definitionem | vndecimi .rsp. rectus et per [S47v]
decimam septimam primi .spr.[80] recto minor erit .ac. per decimam nonam eiusdem .rp. maior erit quam .rs. Aequales autem sunt .rs. .rt.[81] per decimam quintam definitionem primi maior igitur erit .rp. pars toto .rt. quod est impossibile. Et per consequens .aeg.[82] tangit cilyndrum et non secat. Idem probabitur de .adf.[83] Igitur visus cilyndrum contingentes a signo .a. procidunt in lineas .eg. .df. videbitur itaque cilyndri portio circumferentiis .dke. .fcg. et rectis lineis .eg. .df. comprehensa per primam suppositionem.

Dico igitur quod pars visa minor erit hemicilyndro.

Erit enim vt in 23.^{a} huius demonstratum est .dke. circumferentia minor semicirculo producta igitur .dl. in .o. et per .o. ducta

---

77 **Dico,** duo *SO*
78 **.eg.,** .ag. *SO*
79 **per decimam octauam tertii,** *rep. SO*
80 **.spr.,** .srp. *SO*
81 **.rt.,** .st. *SO*
82 **.aeg.,** .acg. *SO*
83 **.adf.,** .asf. *SO*

Afirmo que se vê menos do que um semicilindro.

Pelo ponto A [trace-se o plano ADE;] trace-se o plano FGH paralelo à base do cilindro, pelas nossas anotações à duodécima [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*. Pelo lema precedente, a secção [produzida pelo plano] de ADE será um círculo, e o seu centro L estará no eixo do cilindro; seja ele LM. A partir do olho A, no plano ADE, estendam-se os raios AE e AD tangentes ao cilindro. Ligue-se E a L e D a L. Pela décima oitava do terceiro dos *Elementos*, os ângulos AEL e ADL serão retos. Trace-se, pelo ponto E, uma paralela a LM, pela trigésima primeira do primeiro, seja EG. Ligue-se G a M. Por D, trace-se uma paralela a LM, [seja] DF. Ligue-se F a M. Então, pela definição de cilindro, ELMG e DLFM serão paralelogramos retângulos cujos lados EG e DF estarão na circunferência do cilindro. Ligue-se A a F e A a G. Por esta razão, ADF e AEG serão dois planos tangentes ao cilindro, mas não secantes a ele.

Caso contrário, esteja o ponto P no plano AEG no interior do cilindro. Ligue-se P a A, secante à linha EG no ponto Q. Pelas anotações à duodécima do undécimo dos *Elementos*, trace-se um plano paralelo a DKE pelo ponto P, seja PRS. Pelo lema precedente, a sua [inter]secção com o cilindro será um círculo. O centro deste será R [e estará] no eixo do cilindro LM. Seja S o contacto da circunferência do círculo com a linha EG. RS será um semidiâmetro do círculo igual e paralelo a LE, pela décima sexta do undécimo dos *Elementos*, e SL [será] um paralelogramo. Seja SVT esse círculo. Uma vez que R e P são pontos diferentes e R é o centro do círculo, mas P não (pois está na superfície e no plano AEG tangente ao cilindro e R está no eixo do cilindro), ligue-se R a P, e estenda-se [esta reta] até encontrar a circunferência no ponto T. Pela definição de círculo, RT e RS serão iguais. Uma vez que o ângulo AEL é um ângulo reto, pela décima oitava do terceiro dos *Elementos*, [e] LEG também é reto, por definição (pois LEGM é um retângulo), [então,] pela quarta do undécimo dos *Elementos,* EL será perpendicular ao plano AEG. Do mesmo modo, uma vez que SRT e EDL são planos paralelos, SR e EL serão paralelas, pela décima oitava do undécimo. Por esta razão, pela oitava do undécimo, SR será perpendicular ao dito plano AEG. Uma vez posta SP no plano AEG, RSP será reto, pela segunda definição do undécimo. Pela décima sétima do primeiro, SPR será menor do que um reto. Pela décima nona do mesmo, RP será maior do que RS. Mas RS e RT são iguais, pela décima quinta definição do primeiro; logo, a parte RP será maior do que o todo RT, o que é impossível. Em consequência, AEG é tangente ao cilindro e não o corta. O mesmo se provará de ADF. Então, os raios visuais [provenientes] do olho A estendem-se pelas linhas EG e DF tangentes ao cilindro. Assim sendo, ver-se-á a porção do cilindro compreendida pelas circunferências DKE e FCG e pelas linhas retas EG e DF, pela primeira suposição [deste tratado].

Então, afirmo que a parte vista será menor do que um semicilindro.

Com efeito, como se demonstrou na vigésima terceira deste, DKE será um arco menor do que um semicírculo. Então, se se prolongar DL para O, se se traçar uma

parallela ipsi .ml. perfectoque parallelogramo .mloh. non videbitur .eohg.[84] per tertiam suppositionem huius quod tamen deficit a cilyndri parte visa quae est .dkegf. minore <hemicylindro> reliqua | .eohg.[85] sicut enim .dke. circunferentia [O46r] minor est semicirculo ita ostendetur de quocunque circulo ipsius cilyndri. totum igitur id quod videtur minus est hemicilyndro quod erat ostendendum.

Theorema vigesimum nonum. *Oculo propius ad cilyndrum posito minus quidem erit assumptum cilyndri sub ipsis aspectibus videbitur autem maius aspici.*

Ab oculo .a. spectetur cilyndri portio comprehensa sub rectis lineis .de. .bf. et circunferentiis .bcd. .ef. sitque axis cilyndri .no. et connexa .an. propius ponatur oculus in .g. et videatur cilyndri pars comprehensa sub .hck. .lm.

Dico eam esse minorem sed videri maiorem quam quae videtur oculo in .a. posito.

Retenta enim pri|oris conclusionis confirmatione maior erit cir- [S48r] cunferentia .bcd. quam .hck. quemadmodum demonstratum est in vigesima tertia huius et sic continuo quotquot circulis secetur cilyndrus

84 **.eohg.,** .cohg. *SO*
85 **.eohg.,** .cohg. *SO*

paralela a ML, por O, e se se completar o paralelogramo MLOH, não se verá EOHG pela terceira suposição deste [tratado], porque não pertence à parte do cilindro que se vê e que é DKEGF, menor [do que um semicilindro] pela parte restante EOHG. Com efeito, assim como a circunferência DKE é menor do que um semicírculo assim se provará de qualquer círculo do cilindro. Portanto, o todo que se vê é menor do que um semicilindro. O que se queria mostrar.

Teorema vigésimo nono. *Se se colocar o olho mais próximo do cilindro, a parte do cilindro tomada sob o olhar será menor, mas parecerá ver-se maior.*

[Fig. 69] | A partir do olho A veja-se a porção do cilindro compreendida pelas linhas retas DE e BF e pelas circunferências BCD e EF. Seja NO, o eixo do cilindro. Depois de se ligar A a N, ponha-se o olho mais próximo, em G. Veja-se a parte do cilindro compreendida sob HCK e LM.

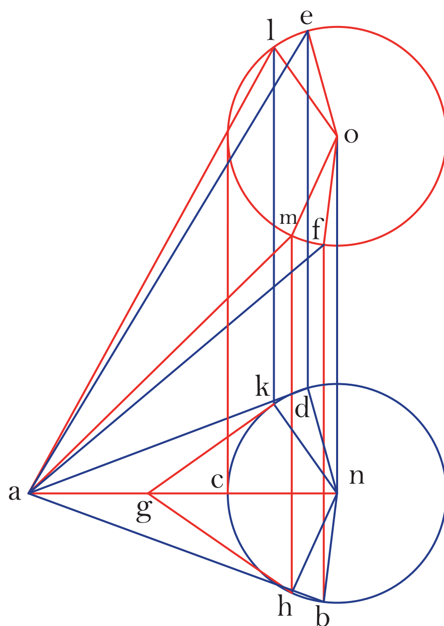


Fig. 69

Afirmo que esta [parte] é menor mas se vê maior do que a que se vê com o olho posto em A.

Mantida a confirmação da conclusão anterior, a circunferência BCD será maior do que [a circunferência] HCK, como se demonstrou na vigésima terceira deste [tratado], e por aí afora, sejam quantos forem os círculos com que se corta o cilindro,

probabitur circunferentia inter lineas .de. .bf. esse maior circunferentia inter .hm. .kl. Igitur oculo in .a. posito visa cilyndri portio .bcdef. maior est quam .hcklm. quae videtur oculo in .g. propius posito. Et quoniam per eandem vigesimam tertiam maior est angulus .hgk. angulo .bad. maior videbitur sectio .hl.[86] sectione .be. per quartam et quintam suppositiones. Quod erat probandum.

Lemma. *Si basi coni alicuius parallelum planum ducatur communis sectio circulus est.*
Sit conus cuius .abc. basis vertex autem .d. eritque basis ex definitione circulus sit igitur illius centrum .e. quod coniungatur cum .d. connectantur etiam .cd. .ad. .bd. sitque .ae. semidiameter[87] basis, seceturque conus ille plano parallelo basi | per [O46v] adnotata in duodecimam vndecimi.

Dico quod illud planum circulus est.

86 **.hl.,** .hm. *SO*
87 **semidiameter,** diameter *SO*

provar-se-á que a circunferência entre as linhas DE e BF é maior do que a circunferência entre HM e KL. Então, se se colocar o olho em A, BCDEF, a porção do cilindro que se vê, é maior do que [a porção] HCKLM que se vê se se puser o olho mais próximo, em G. Uma vez que, pela mesma vigésima terceira, o ângulo HGK é maior do que o ângulo BAD, a secção HL ver-se-á maior do que a secção BE, pela quarta e pela quinta suposição. O que se queria provar.

Lema. *Se se traçar um plano paralelo à base de um cone, a interseção é um círculo.*

[Fig. 70] | Seja um cone com base ABC e vértice D. A base será um círculo, por definição. Seja E o seu centro, e ligue-se a D. Ligue-se também C a D, A a D e B a D. Seja AE o semidiâmetro da base. Seja o cone cortado por um plano paralelo à base, pelas anotações à duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*].

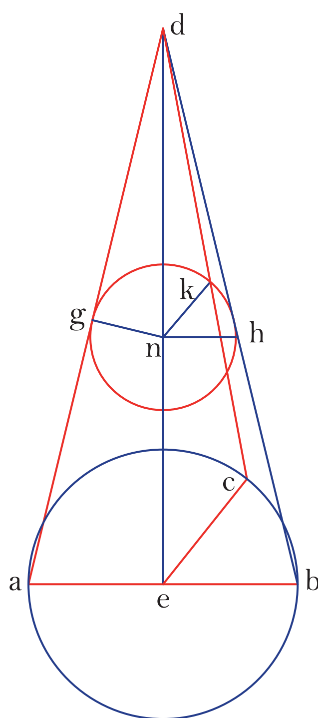


Fig. 70

Afirmo que aquele plano é um círculo[19].

19 Melo utiliza livremente o termo «plano», que também pode referir, como aqui, a interseção de um plano com o cone.

Secet enim planum illud axem coni qui est .ed. in signo .n. ipsam .ad. in .g. .db. autem in .h. .cd. autem in .k. connectantur rursus .gn. .kn. .nh. Quoniam igitur .kgh. .cab. plana parallela secantur plano .dae. ergo per decimam sextam vndecimi .aegn. parallelae sunt et per vigesimam nonam primi bis repetitam anguli .dgn. .dae. .dng. .dea. aequales sunt, et .gdn. communis. quare .dgn. .dae. aequiangula sunt triangula ob idque per quartam sexti sicut .dn. .ad. .de. ita .gn. .ad. .ae. Eodem modo probabis quod sicut .dn. ad .de. ita .nh. ad .eb. per vndecimam quinti igitur .gn. ad .ae. ita .nh. ad .eb. et permu|tatim per decimam sextam eiusdem quinti sicut .gn. ad .nh. ita .ae. [S48v] ad .eb. suntque .ae. .eb. per decimam quintam definitionem primi elementorum aequales, aequalis igitur <est> .gn. <ipsi> .nh. Sic probabis quod .nk. aequalis erit ipsis .gn. .nh. et quotquot ducentur ex .n. ad circunferentiam coni igitur etc.

Theorema trigintesimum. *Cono circulum basim habente sub vno oculo perspecto minus hemiconio spectabitur.*

Ab oculo .a. videatur conus .bcdef. habens basim circulum .cdef. cuius centrum .g.

Dico ipsius coni videri minus quam dimidium.

Per signum enim .a. ponatur planum .ahklm. secans axim .bg. in signo .n. per adnotata in duodecimam vndecimi ipsumque conum in plano .hklmo. et connectantur .mn. .nk. .nl. Et quoniam planum .hnb. ducitur per axem, erit eius sectio cum cono triangulum quare et portio .gbhf. triangulum erit per secundam vndecimi. Cumque .fg. .hn. sunt sectiones parallelorum[88] planorum ab eodem plano .bfg. parallelae erunt. per decimam sextam, vndecimum. eritque per quartam, sexti elementorum et vigesimam nonam primi bis repetitam .fg. ad .hn | sicuti .gb. ad .bn. [O47r] Eadem ratione per signa .bnk. ducto plano .bge. erit .ge. ad .nk. sicut .gb. ad .bn. quare per vndecimam quinti .ge.[89] ad .nk. est sicut .gf. ad .nh. Sed .ge. primum aequatur .gf. tertio ergo et .nk. secundum aequatur .nh. quarto. Eadem ratione et ipsi .nh. aequales sunt .nl. .nm. .no. Ergo est circulus sectio .hklmo. cuius centrum est .a. Hoc etiam probatum est in lemmate.

Itaque a signo .a. ducantur contingentes circulum .ah. .al. per | decimam [S49r] septimam tertii et ipsius .nbh. plani cum cono sectio sit .gbf. per definitionem coni. Consimiliter ducatur .bld. et connectantur .ab. .ad. .af. eruntque plana .afb. .adb. contingentia conum in lineis .bf. .bd. sunt enim communes planorum et coni. Dico quod et ipsum conum tangunt in his lineis .bf. .bd. Sin autem plani .abd.[90] signum .p. sit intra conum .bcde. et per signum .p. ducatur planum .pqrs. parallelum basi .edcf.

88 **parallelorum,** parallelogramorum *SO*
89 **.ge.,** .gn. *SO*
90 **.abd.,** .afd. *SO*

Que o plano corte o eixo do círculo, que é ED, no ponto N, [a reta] AD, em G, [a reta] DB, em H; [a reta] CD em K. Novamente, ligue-se G a N, K a N e N a H. Uma vez que os planos paralelos KGH e CAB são cortados pelo plano DAE, então, pela décima sexta do undécimo, AE e GN são paralelas. Pela vigésima nona do primeiro duas vezes tomada, os ângulos DGN e DAE, e DNG e DEA, são iguais. [O ângulo] GDN é comum. Por esta razão, os triângulos DGN e DAE são equiângulos. Por isso, pela quarta do sexto DN:DE=GN:AE. Do mesmo modo provarás que DN:DE=NH:EB. Então, pela undécima do quinto, GN:AE=NH:EB. *Alternando*, pela décima sexta do mesmo quinto, GN:NH=AE:EB. Mas AE e EB são iguais, pela décima quinta definição do primeiro dos *Elementos*. Logo, GN é igual a NH. Assim provarás que NK é igual a GN e a NH, assim como todas as linhas que se traçarem de N para a circunferência do cone. Logo, etc.

Teorema trigésimo. *Se um cone de base circular for observado a partir de um olho, ver-se-á menos do que um semicone.*

[Fig. 71] | A partir do olho A, veja-se o cone BCDEF, que tem como base o círculo CDEF com centro G.

Afirmo que se vê menos do que uma metade deste cone.

Pelo ponto A, trace-se, pelas anotações à duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], o plano AHKLM, secante ao eixo BG no ponto N e [secante] ao próprio cone no plano HKLMO. Ligue-se M a N, N a K e N a L. Uma vez que se traça o plano HNB pelo eixo, a sua interseção com o cone será um triângulo. Por esta razão, a porção GBHF também será um triângulo, pela segunda do undécimo. Uma vez que FG e HN são secções de planos paralelos [feitas] pelo mesmo plano BGF, elas serão paralelas, pela décima sexta do undécimo. Pela quarta do sexto dos *Elementos* e pela vigésima nona do primeiro duas vezes tomada, FG:HN=GB:NB. Pela mesma razão, traçado o plano BGE pelos pontos B, N e K, será GE:NK=GB:BN. Por esta razão, pela undécima do quinto, GE:NK=GF:NH. Mas o primeiro, GE, é igual ao terceiro, GF; logo, também o segundo, NK, é igual ao quarto, NH. Pela mesma razão, também NL, NM e NO são iguais a NH. Logo, a secção HKLMO é um círculo com centro A. Isto também foi provado no lema.

Assim sendo, do ponto A tracem-se AH e AL, tangentes ao círculo, pela décima sétima do terceiro. Seja GBF a interseção do plano NBH com o cone, pela definição de cone. Da mesma forma, trace-se BLD. Ligue-se A a B, A a D e A a F; surgirão os planos AFB e ADB, tangentes ao cone nas linhas BF e BD, pois [elas] são comuns aos planos e ao cone. Afirmo que também são tangentes ao cone nestas linhas BF e BD [mas não o cortam]. Caso contrário, seja P um ponto do plano ABD no interior do cone BCDE. Pelo ponto P, trace-se o plano PQRS, paralelo à base EDCF.

Eritque illud per adnotata Campani in 16.^{am} 11.^{mi} elementorum .hklm. circulo parallelum et per lemma erit eius entersectio cum cono circulus .qtv. cuius centrum erit intersectio axis .bg. sitque .s. et quoniam .sq. .ln. sunt intersectiones parallelorum planorum ab eodem plano .bln. parallelae erunt .sq. .ln. per decimam sextam vndecimi elementorum. Sit autem .rq. sectio plani .rqtv. <cum plano> .bal. Igitur per eandem 16.^{am} erunt .la. .rq. parallelae et per decimam quintam vndecimi aequus est angulus .rqs. angulo .aln.

Rectus autem est .aln. per decimam octauam tertii. ergo rectus erit .rqs. quare linea .rq. tangit circulum .qtv. et non secat per decimam sextam tertii. Et quoniam .p. signum est commune duarum superficierum .adb. .rqp. est igitur in communi sectione .rq. que per tertiam vndecimi est recta linea. Incommodum igitur linea .rqp. recta tangens circulum ipsum secat quod est contra secundam definitionem tertii | [O47v]
Itaque planum .adb. non secat conum, sed

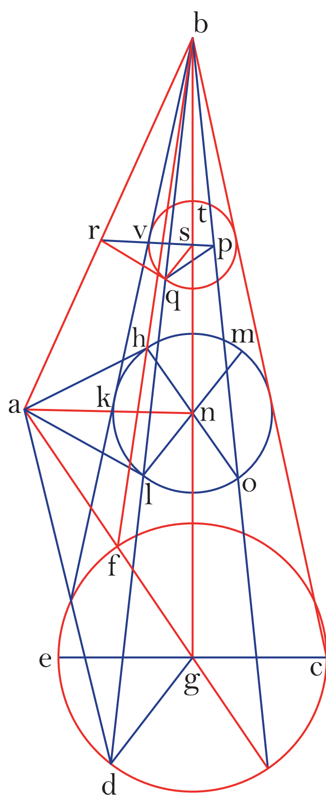


Fig. 71

Pelas anotações de Campano à décima sexta [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*, este será paralelo ao círculo HKLM. Pelo lema [anterior], a sua intersecção com o cone será o círculo QTV, cujo centro será a [sua] interseção com o eixo BG, seja S. Uma vez que SQ e LN são interseções de planos paralelos pelo mesmo plano BLN, [então,] SQ e LN serão paralelas, pela décima sexta do undécimo dos *Elementos*. Seja RQ a interseção do plano RQTV [com o plano] BAL. Então, pela mesma décima sexta, LA e RQ serão paralelas. Pela décima quinta do undécimo, o ângulo RQS é igual ao ângulo ALN.

Mas ALN é reto, pela décima oitava do terceiro; logo, RQS será reto. Por esta razão, a linha RQ toca, mas não corta, o círculo QTV, pela décima sexta do terceiro. Como o ponto P é comum às duas superfícies ADB e RQP, então está na interseção RQ que, pela terceira do undécimo é uma linha reta. Portanto, dá-se o impossível de que a linha reta RQP, que toca o círculo, [também] o corta, o que é contra a segunda definição do terceiro. Assim sendo, o plano ADB não corta o cone, mas

ipsum tangit in linea .db. Quod autem solum contingat in linea .db. eadem ratione probaretur iuncta .sp. quoniam enim rectus est .sqp. maior igitur erit .sp. quam .sq. quare signum .p. non erit in circunferentia coni neque intra conum. Et haec demonstratio accomoda|tur tam conis rectangulis quam obliquis. Posset similiter transferri ad cilyndros tam rectos quam obliquos. Ita enim precedens demonstratio esset vniuersalior. [S49v]

Quoniam itaque ab .a. signo ducuntur contingentes circulum .ah. .al. erit sector .hn. .lk. minor semicirculo per vigesimam tertiam huius. Cumque aequales sint anguli .hnl. .fgd. per decimam quintam vndecimi producta igitur .fg. in .p.[91] non spectabitur circunferentia .dp.[92] per tertiam suppositionem huius. Similiter nec .lo.[93] et in vniuersum quicquid

91 **in .p.,** .mp. *SO*

92 **.fp.,** .dp. *SO*

93 **.lo.,** .hp. *SO*

[Fig.72] toca-o na linha DB. | Que apenas o toca na linha DB [sem o cortar], poderia provar-se pelo mesmo argumento, depois de se ter ligado S a P. Com efeito, como SQP é reto, então SP será maior do que SQ. Por esta razão, o ponto P não estará na circunferência do cone, nem no interior do cone. Esta demonstração adapta-se, tanto a cones retângulos, como oblíquos. Poderia, da mesma maneira, ser transferida para cilindros, tanto retos, como oblíquos. Assim, a demonstração precedente seria mais universal.

Fig. 72

Assim sendo, uma vez que do ponto A se traçam AH e AL tangentes ao círculo, o sector HNLK será menor do que um semicírculo, pela vigésima [proposição] terceira deste [tratado]; e uma vez que os ângulos HNL e FGD são iguais, pela décima quinta [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], então, prolongando-se FG para P, não se verá a circunferência DP, pela terceira suposição deste [tratado]. Da mesma forma, não se verá [a circunferência] LO, nem, tudo o que está

continetur inter lineas .bd. .bp.[94] qua tamen parte pars spectata comprehensa inter lineas .bd. .bf. et circunferentiam .def. minorem semicirculo. deficit ab hemiconio comprehenso inter lineas .bf.[95] .bp. et semicirculum .defp. Igitur cono etc.

Theorema trigintesimum primum. *Oculo propius posito in eodem plano minor inquam erit visibus assumpta pars coni at maior perspici videbitur.*

Ab oculo .a. videatur conus .bcd. Item ab oculo .m. propius posito.

Dico ab oculo .a. plus coni videri sed minus apparere quam ab oculo .m.

94 **.bd. .bp.,** .bd. .bf. *SO*

95 **.bf.,** .bd. *SO*

contido, em geral, entre as linhas BD e BP. A parte observada compreendida entre as linhas BD e BF e a circunferência DEF (menor do que um semicírculo) é mais pequena do que o semicone compreendido entre as linhas BF e BP e o semicírculo DEFP precisamente por aquela parte[20]. Logo, de um cone, etc.

Teorema trigésimo primeiro. *Se se colocar o olho no mesmo plano mais próximo [de um cone], afirmo que a parte do cone tomada sob os raios visuais será menor, mas parecerá ver-se maior.*

[Fig. 73] | A partir do olho A, veja-se o cone BCD; do mesmo modo, a partir do olho M, colocado mais próximo [veja-se o cone BCD].

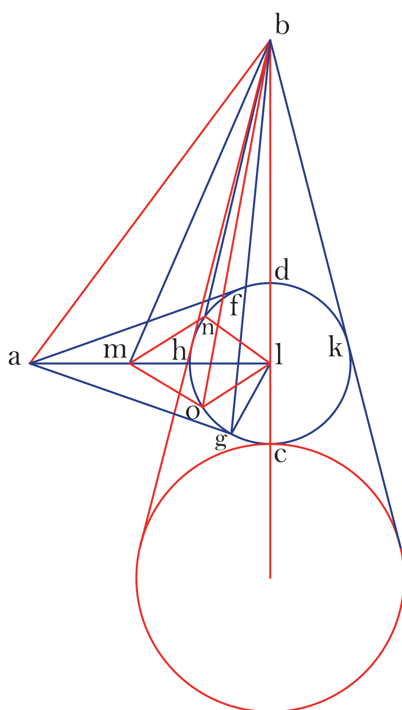


Fig. 73

Afirmo que, a partir do olho A, se vê uma porção do cone que é maior mas parece menor do que a que se vê a partir do olho M.

20 Isto é, por aquela parte que corresponde à diferença entre as duas áreas referidas, ou seja à área limitada pelas linhas BD e BP e pela circunferência DP.

Per signum .a. ducatur planum .afg. parallelum basi per adnotata in duodecimam vndecimi eritque per lemma precedentis plani cum cono communis sectio circulus vt .ghfk. cuius centrum sit .l. et ducantur contingentes .af.ag. per decimam septimam tertii elementorum. Item connexa .al. et in oculo in linea .al. posito ducantur contingentes .mn. .mo. Itaque quoniam visus | conum contingentes ab oculo .a. perueniunt ad lineas .fb. .gb. sicut in precedenti demonstratione ostensum | est oculo in .a. posito videbitur coni portio .fbgh. oculo vero in .m. posito videbitur solum portio comprehensa sub .nb. .bo. et circunferentia .ohn. et vt demonstratum est in vigesima quarta huius maior angulus .omn. angulo .fag. maiorque circunferentia .ghf. quam .nho. ergo oculo in .m. posito visa portio .nboh. minor est quam portio .gbfh. quae videtur oculo in .a. posito et per quartam suppositionem maior videbitur .nboh. quam .fghb. sub maiori enim angulo .omn. quam sit angulus .gaf. spectabitur. Igitur oculo propius posito etc. Quod fuit probandum. [O48r] [S50r]

Theorema trigintesimum secundum. *Cono circulum basim habente si a contactibus qui <fiunt> ab oculo in coni basim procidentibus radiis rectae lineae deducantur per superficiem coni ad verticem eius, perque deductas et eis quae ab oculo in basim coni procidentibus plana educta fuerint in communique planorum sectione oculus positus fuerit, id quod spectatur coni omnifariam aeque spectabitur visu in plano proposito existenti.* Sit conus .abcde. cuius basis sit circulus .bcde. et eius centrum .g. et in eo plano sit oculus .h. a quo spectetur conus et iungatur .ha. et in linea .ha. suscipiatur quodcunque signum .k. in quo sit oculus.

Dico coni .abcde. videri eandem partem in .k. et .h. apparereque eiusdem magnitudinis.

A signo enim .h. ducantur contingentes circulum .hc. .he. per decimam septimam tertii | et iungantur .hg. .ge. .gc. Item .ea. .ca. constat per trigintesimam huius videri portionem .caed. | sub angulo .echa. Iam per signum .k. ducatur planum .klnmp. parallelum basi eritque sectio circulus per lemma sitque .mln. cuius centrum .o. erit in linea .ag. A plano autem .klm. secetur linea .ca. in signo .l. et linea .ae. in signo .m. connectanturque .ol. .om. .on. .mk. .kl. .ko. [O48v] [S50v]

Pelo ponto A trace-se o plano AFG paralelo à base, pelas anotações à duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Pelo lema da precedente, a interseção do plano com o cone será um círculo, seja GHFK, com centro L. Trace-se AF e AG, tangentes [ao círculo], pela décima sétima do terceiro dos *Elementos*. Do mesmo modo, depois de se ligar A a L e colocar o olho na linha AL [no ponto M, mais próximo do cone], trace-se MN e MO, tangentes [ao círculo]. Uma vez que os raios tangentes ao cone [estendidos] a partir do olho A chegam às linhas FB e GB, então, como se mostrou na demonstração precedente, se se colocar o olho em A, ver-se-á a porção do cone FBGH; mas se se colocar o olho em M, ver-se-á somente a porção compreendida pelas retas NB e BO e pela circunferência OHN. Mas, como se demonstrou na vigésima quarta deste, o ângulo OMN é maior do que [o ângulo] FAG, e a circunferência GHF [é maior] do que [a circunferência] NHO. Então, se se colocar o olho em M, a porção vista NBOH é menor do que a porção GBFH, que se vê se se colocar o olho em A. Pela quarta suposição, NBOH ver-se-á maior do que FGHB; pois será vista no ângulo OMN, [que é] maior do que [o ângulo] GAF. Logo, se se colocar o olho mais próximo, etc. O que se quis provar.

Teorema trigésimo segundo. *Num cone de base circular, se, a partir dos pontos de contacto que resultam de se estender os raios desde o olho até à base do cone, se traçarem linhas retas na superfície desse cone até ao seu vértice; e se se estenderem planos pelas retas [antes] traçadas até às que se estendem do olho para a base do cone, se o olho for colocado na interseção dos planos, [então,] a parte do cone que se vê observar-se-á igual a partir de qualquer sítio [dessa interseção], se o raio visual estiver no plano proposto.*

[Figs. 74 e 75] | Seja o cone ABCDE. Seja a sua base o círculo BCDE, com centro G. No mesmo plano esteja o olho H, a partir do qual se veja o cone. Ligue-se H a A. Na linha HA tome-se um ponto qualquer K, no qual esteja o olho.

Afirmo que se vê a mesma parte do cone ABCDE, e que [essa parte] aparece com o mesmo tamanho, tanto em K como em H.

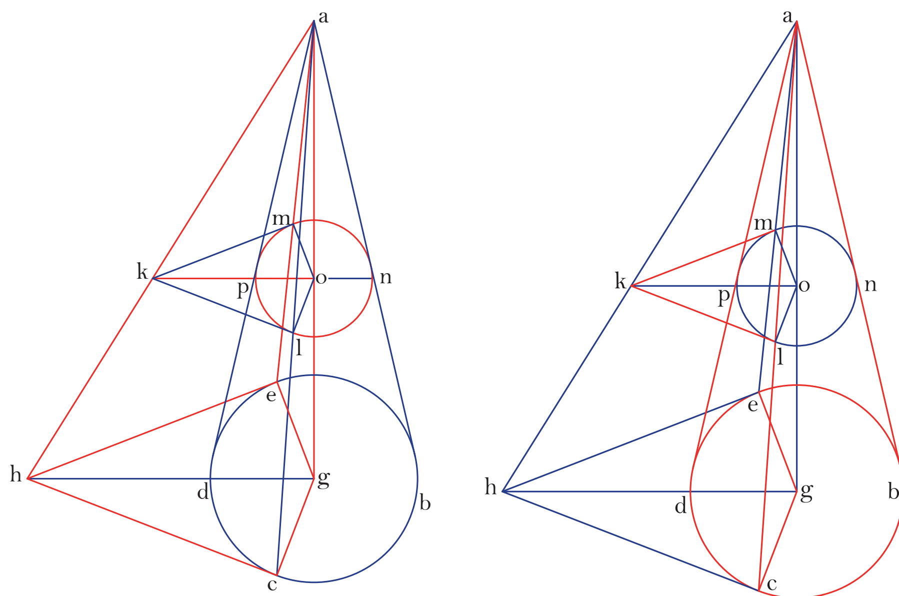
Do ponto H trace-se HC e HE, tangentes ao círculo, pela décima sétima [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Ligue-se H a G, G a E e G a C. Do mesmo modo, [ligue-se] E a A e C a A. Pela trigésima deste [tratado], ficou estabelecido que se vê a porção CAED sob o ângulo [sólido] ECHA. Pelo ponto K, trace-se o plano KLNMP, paralelo à base[21]. Pelo lema[22], a secção [do cone pelo] plano será um círculo, seja MLN. O seu centro O estará na linha AG. A linha CA seja cortada pelo plano KLM no ponto L, e a linha AE [seja cortada pelo plano KLM] no ponto M. Ligue-se O a L, O a M, O a N, M a K, K a L e K a O.

---

21 Este é «o plano proposto» referido no final da enunciação.

22 O lema a que Melo se refere é o do teorema trigésimo deste tratado.

Quoniam igitur communia sunt .lk. signa et superficiei .kml. et plani .hac. igitur communis sectio est recta linea .kl. per primam vndecimi est autem .hc. communis sectio eiusdem plani .hac. et plani siue basis .bcde. que quidem est parallela plano .kml. ergo parallelae sunt .kl. .hc. per decimam sextam eiusdem. Rursus per eandem quoniam .km. et .he. sunt communes sectiones planorum .klm. et .hce. ergo et etiam parallelae sunt .km. .he. Aequales igitur sunt anguli .ehc. et .mkl. per decimam eiusdem. Et quoniam .ol. .gc. sunt communes sectiones planorum parallelorum a plano .agc. erunt parallelae per eandem decimam sextam. Parallelae autem erant . kl. .hc. ergo per 10.^{am} eiusdem aequales sunt anguli .hcg. .klo. Sed rectus est .hcg. per decimam octauam tertii elementorum. ergo rectus est .klo. Eadem ratione aequales atque recti anguli sunt .kmo. .heg. ergo per decimam sextam tertii circulum contingunt recte lineae .kl. .km. Quare per 30.^{am} huius oculo posito in .k. signo videbitur portio coni comprehensa inter lineas .alc. .ame. Eadem autem videbatur ab oculo posito in .h. ergo oculo vbicunque posito in linea .ha. eadem pars videbitur. Et quoniam angulus .ehc. aequalis est angulo .mkl.



Figs. 74 e 75[23]

Uma vez que os pontos L e K são comuns à superfície KML e ao plano HAC, então a interseção [da superfície com o plano] é a linha reta KL, pela primeira do undécimo. Mas HC é a intersecção do mesmo plano HAC com o plano, ou base, BCDE, que é paralela ao plano KML. Então, KL e HC são paralelas, pela décima sexta do mesmo. De novo, uma vez que KM e HE são interseções dos planos KLM e HCE [com o plano AHE], então KM e HE também são paralelas, pela mesma [proposição]. Portanto, os ângulos EHC e MKL são ângulos iguais, pela décima do mesmo. Visto que OL e GC são interseções de planos paralelos com o plano AGC, [então,] elas serão paralelas, pela mesma décima sexta. Mas KL e HC eram paralelas; logo, pela décima do mesmo, os ângulos HCG e KLO são iguais. Mas HCG é reto, pela décima oitava do terceiro dos *Elementos*; logo, KLO é reto. Pela mesma razão, os ângulos KMO e HEG são iguais e retos. Portanto, pela décima sexta do terceiro, as linhas retas KL e KM são tangentes ao círculo. Por esta razão, pela trigésima deste, se se colocar o olho no ponto K, ver-se-á a porção do cone compreendida entre as linhas ALC e AME. Mas a mesma [parte] era vista pelo olho colocado em H. Então, onde quer que o olho esteja colocado na linha HA, ver-se-á a mesma parte [do cone]. Além disso, uma vez que o ângulo EHC é igual ao ângulo MKL,

23 Trata-se de figuras repetidas.

vt demonstratur per decimam sextam et decimam vndecimi. aequales etiam sunt anguli .akl. .ahc. per vigesimam nonam primi et per ean|dem aequales sunt anguli .akm. .ahe. ergo sub eisdem angulis spectabitur conus .abcde. vtrobique oculo posito et in .h. et in .k. Igitur per sextam suppositionem aequalis apparebit conus vbilibet oculo[96] in .ah. posito quae est communis sectio | planorum: eademque pars videbitur Quod est propositum. Igitur etc. [S51r] [O49r]

Theorema trigintesimum tertium. *Equaliter semper cono ab oculo distante sublimius quidem oculo posito minus apparet coni spectatum humilius vero maius.*
Retento priore diagrammate a signo .h. excitetur ipsi .ag. parallela .hrq. vt .q. sit sublimius quam .r. et .r. quam .h.

Dico oculis in .qrh. positis plus coni .abcde. ab oculo .q. spectari quam ab oculo .r. et ab oculo .r. plus quam ab oculo .h. sed minus videri.

96 **oculo,** oculi *SO*

como se demonstra pela décima sexta e pela décima do undécimo, e os ângulos AKL e AHC também são iguais, pela vigésima nona do primeiro, e, pela mesma [razão], os ângulos AKM e AHE são iguais, então o cone ABCDE ver-se-á sob os mesmos ângulos, quer se coloque o olho em H, quer se coloque em K. Então, pela sexta suposição, o cone aparecerá igual, e ver-se-á a mesma parte [dele], onde quer que se coloque o olho na reta AH, que é a interseção dos planos. Que é o que se pretende. Logo, etc.

Teorema trigésimo terceiro. *Se o cone estiver sempre à mesma distância do olho, e se se colocar o olho mais acima, a parte do cone que se vê aparece menor; [se se colocar o olho] mais abaixo, [a parte do cone que se vê aparece] maior.*

[Fig. 76] | Mantendo-se a figura anterior, a partir do ponto H levante-se HRQ, paralela a AG, de tal forma que Q esteja mais alto do que R e R [esteja mais alto] do que H.

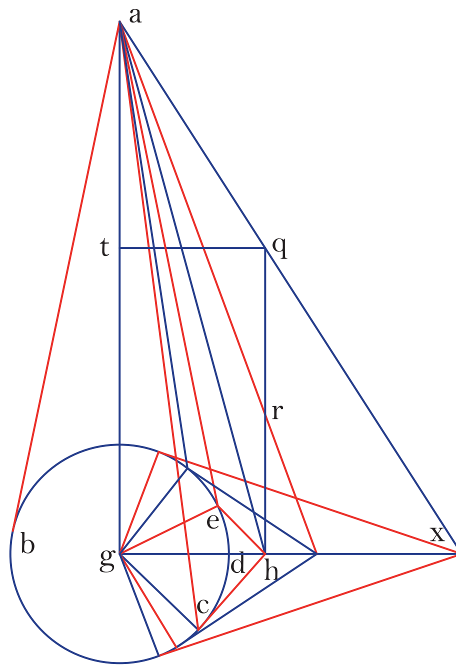


Fig. 76

Afirmo que, se se colocar o olho em Q, ou em R ou em H, se vê uma parte maior do cone ABCDE a partir do olho em Q do que a partir do olho em R, e [uma parte maior] a partir do olho em R do que a partir do olho em H; mas que ela aparece menor.

Connectantur enim .ar. .aq. et quoniam parallelas .ga. .hq. connectunt rectae lineae .gh. .ar. .aq. erunt in eodem plano cum ipsis parallelis per 7.^{am} vndecimi. Et quoniam minor est vtraque et .hr. et .hq. quam .ga. ergo non erunt parallelae .gh. .ar. .aq. per trigesimam quartam primi.

Vel ducatur a signo .q. parallela ipsi .hg. per trigesimam primam primi que sit .qt. Quoniam itaque parallelae sunt .gh. .qt. et in eas incidit recta linea .qh. ergo per vigesimam nonam primi facit duos angulos .tqh. .ghq. duobus rectis aequales, est[97] autem .ghq. rectus ex hypotesi. rectus igitur. et .tqh. adiuncto .tqa. totus .hqa. recto maior est: sunt autem per decimam tertiam primi elementorum duo anguli .aqh. .hqx. duobus rectis aequales, re|liquus igitur .hqx. recto minor est. at .qhx. rectus [S51v] est. Quare duo .xqh. .qhx. duobus rectis minores, quare per quintum postulatum elementorum concurrunt .aq. .gh. sit in signo .x. Sic probabuntur .ar. .gh. concurre-re sit in .s. Et per precedentem coni .abcde. apparebit eadem pars in .r. et in .s. et sub aequali | angulo. Sed in .s. plus videtur quam in .h. minus autem apparet videri per [O49v] trigesimam primam huius. Igitur ab oculo .r. plus coni videtur quam ab .h. sed minus apparet videri. Eadem ratione et ab oculo .q. tantum videtur quantum ab oculo .x. et aequum apparet. Sed ab oculo .x. plus videtur quam ab oculo .s. et minus apparet ab oculo tamen .s. videtur quantum ab oculo .r.[98] per praecedentem et tantumdem apparet ergo ab oculo .q. plus videtur quam ab oculo .r. sed minus apparet. Igitur etc.

Theorema trigesimum quartum. *In circulo si a centro ad angulos rectos quedam agatur recta linea ipsius circuli plano, et in ipsa ponatur oculus circuli dimetientes aequales apparent.*

Sit circulus .abcd. cuius centrum .e. a quo excitetur .ef. perpendicularis plano .abcd. per vndecimam vndecimi et in .f. ponatur oculus.

Dico dimetientes vt .acdb. apparere aequales.

Connectantur enim .af. .df. .bf. .cf. Et quoniam rectus est vterque .fea. .fed. per secundam definitionem vndecimi aequales erunt per quartum postulatum aequalia etiam sunt latera .ea. .ed. per decimam quintam definitionem primi et commune est latus .ef. ergo per quartam primi ba|sis .af. basi .df. est aequalis et angulus .afe. angulo [S52r] .dfe. Eadem ratione aequus est angulus .efb. angulo .efc.

97 **est,** & [=et] *SO*
98 **.r.,** .k. *SO*

Ligue-se A a R e A a Q. Uma vez que as linhas retas GH, AR e AQ ligam as paralelas GA e HQ, elas estarão no mesmo plano em que se encontram estas paralelas, pela sétima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Uma vez que, tanto HR, como HQ são menores do que GA, então GH, AR e AQ não serão paralelas, pela trigésima quarta do primeiro.

Ou então: a partir do ponto Q, trace-se uma paralela a HG, pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], e seja QT. Visto que GH e QT são paralelas e nelas cai a linha reta QH, então, pela vigésima nona do primeiro, [ela] faz os dois ângulos TQH e GHQ iguais a dois retos. Mas GHQ é reto, por hipótese; logo, TQH também é reto. Se se acrescentar TQA, o [ângulo] todo HQA é maior do que um reto. Mas, pela décima terceira do primeiro dos *Elementos*, os dois ângulos AQH e HQX são iguais a dois retos. Então, o restante HQX é menor do que um reto. Mas QHX é reto. Por esta razão, os dois ângulos XQH e QHX [somados] são menores do que dois retos. Por esta razão, pelo quinto postulado dos *Elementos*, AQ e GH são concorrentes, seja no ponto X. Assim se provará que AR e GH, são concorrentes; seja em S. Pela precedente, aparecerá, tanto em R, como em S, a mesma parte do cone ABCDE e sob um ângulo igual. Mas em S vê-se uma parte maior [do cone] e que parece menor do que em H, pela trigésima primeira deste [tratado]. Então, vê-se uma parte maior do cone, mas que parece ver-se menor, a partir do olho R, do que a partir de H. Pela mesma razão, a partir do olho Q também se vê tanto quanto [se vê] a partir do olho X, e [o que se vê] aparece igual. Contudo, vê-se uma parte maior [do cone], mas que aparece menor, a partir do olho X do que a partir do olho S. Pelo contrário, a partir do olho S vê-se tanto quanto [se vê] a partir do olho R, pela precedente, e [o que se vê] aparece igual. Logo, a partir do olho Q vê-se uma parte maior [do cone] do que a partir do olho R, mas que aparece menor. Logo, etc.

Teorema trigésimo quarto. *Num círculo, se se traçar uma linha reta perpendicular ao plano do próprio círculo a partir do centro, e se nela se puser o olho, os diâmetros do círculo aparecem iguais.*

[Fig. 77] | Seja ABCD o círculo com centro E. A partir dele, levante-se EF perpendicular ao plano ABCD, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Ponha-se o olho em F.

Afirmo que os diâmetros AC e DB aparecem iguais.

Ligue-se A a F, D a F, B a F e C a F. Uma vez que ambos os [ângulos] FEA e FED são retos, pela segunda definição do undécimo; [então,] eles serão iguais, pelo quarto postulado. Mas os lados EA e ED também são iguais, pela décima quinta definição do primeiro, e EF é um lado comum; logo, pela quarta do primeiro, a base AF é igual à base DF, e o ângulo AFE [é igual] ao ângulo DFE. Pela mesma razão, o ângulo EFB é igual ao ângulo EFC.

Coniungendo igitur duos .afe. .efc. alios etiam duos .bfe. .efd. totus .afc. toti .bfd. aequalis est. Quare per sextam suppositionem aequales apparent dimetientes .ac. .bd. Igitur, etc.

Theorema trigesimum quintum. *Et si que ex centro excitatur non fuerit ad angulos rectos ipsi plano, aequalis autem fuerit ei quae ex centro dimetientes ipsi aequales* | *apparebunt.* [O50r]

Sit circulus .abcd. cuius centrum sit .e. in sublimi vero ponatur .f. oculus et sit linea .fe. aequalis ipsi .ae. semidiametro.

Dico ab oculo .f. aequales spectari dimetientes .ac. .bd.

Connectantur .fa. .fb. .fc. .fd. .fe. et centro .e. spacio vero .ea. describatur circulus in plano .afc. eodem .e. signo interuallo .eb. describatur

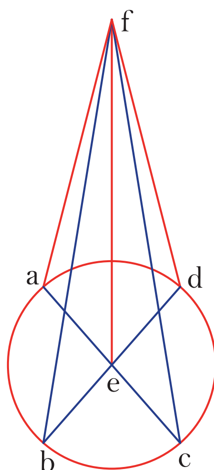


Fig. 77

Então, se se juntar os dois [ângulos] AFE e EFC e [se se juntar] os outros dois [ângulos] BFE e EFD, o [ângulo] todo AFC é igual ao [ângulo] todo BFD. Por esta razão, pela sexta suposição, os diâmetros AC e BD aparecem iguais. Logo, etc.

Teorema trigésimo quinto. *Se a [reta] que se levanta a partir do centro [do círculo] não for perpendicular ao plano [do círculo], mas for igual ao raio, os diâmetros aparecerão iguais.*

[Fig. 78] | Seja ABCD o círculo com centro E. Coloque-se o olho F no alto. Seja a linha FE igual ao semidiâmetro AE.

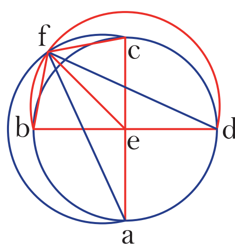


Fig. 78

Afirmo que se vê os diâmetros AC e BD iguais, a partir do olho F.

Ligue-se F a A, F a B, F a C, F a D e F a E. Com centro E e raio EA descreva-se um círculo no plano AFC. No mesmo ponto E e com raio EB, descreva-se um círculo no

circulus in plano .fbd. Quoniam itaque aequales ponuntur .ef. .ec. ipsi .ea. per signa .fc. transibit circulus .afc. estque .afc. angulus semicirculi et proinde rectus per trigesimam primam tertii et per eandem rectus est .bfd. quare aequales sunt per quartum postulatum duo anguli .afc. .bfd. Igitur aequales apparent dimetientes .ac. .bd. per 6.[am] suppositionem. Quod fuit probandum.

Additio. *Si quae ex centro excitatur neque fuerit ad angulos rectos ipsi plano neque aequalis semidiametro circuli fecerit tamen duos angulos super duas diametros aequales ipsae diametri aequales apparebunt.*

| Sit circulus .abcd. cuius centrum .e. diametri vero .ab. .cd. erigaturque ex centro .ef. [S52v] non aequa semidiametro ponaturque in .f. oculus sintque anguli sub erecta et diametris contenti aequales hoc est .fec. angulus aequalis sit angulo .fea. vel angulus .feb. angulo .fed. vel angulus .feb. angulo .fec. quomodocunque fuit.

Dico quod aequales apparent diametri.

Sint itaque aequales anguli .fec. .fea. (Quia idem probabitur quibuscunque positis aequalibus) Quoniam igitur .ec. .ea. aequales sunt et .ef. communis, angulusque .fec. angulo .fea. ergo per quartam primi .fc. .fa. aequales sunt, angulus etiam .efc. angulo .efa. At quoniam .fec. .fea. aequales sunt. Illis | [O50v] ergo demptis ab aequalibus angulis ipsis scilicet .fea. .feb. et ipsis .fec. .fed.

plano FBD. Uma vez que se põe EF e EC iguais a EA, o círculo AFC passará pelos pontos F e C. Mas AFC é um ângulo de semicírculo; consequentemente, é reto, pela trigésima primeira [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Pela mesma [proposição], BFD é reto. Por esta razão, os dois ângulos AFC e BFD são iguais, pelo quarto postulado. Então, os diâmetros AC e BD aparecem iguais pela sexta suposição. O que se quis provar.

Aditamento. *Se a reta que se levanta a partir do centro não for perpendicular ao plano [do círculo] nem igual ao semidiâmetro do círculo, mas fizer ângulos iguais nos dois diâmetros, os diâmetros aparecerão iguais.*

[Fig. 79] | Seja ABCD o círculo com centro E. Sejam AB e CD os diâmetros. A partir do centro, levante-se EF, não igual a um semidiâmetro [do círculo]. Ponha-se o olho em F. Sejam iguais os ângulos compreendidos entre a reta levantada e os diâmetros; isto é, seja o ângulo FEC igual ao ângulo FEA; ou [seja] o ângulo FEB [igual] ao ângulo FED; ou [seja] o ângulo FEB [igual] ao ângulo FEC, seja como for.

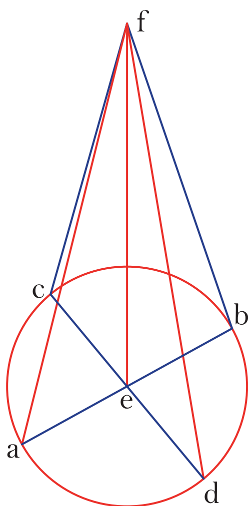


Fig. 79

Afirmo que os diâmetros aparecem iguais.

Sejam iguais os ângulos FEC e FEA (porque o mesmo provar-se-á, estabelecida a igualdade de quaisquer [dois] ângulos). Uma vez EC e EA são iguais e EF é comum, e o ângulo FEC [é igual] ao ângulo FEA, então, pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], FC e FA são iguais, e o ângulo EFC também [é igual] ao ângulo EFA. Mas, uma vez que FEC e FEA são iguais, então, subtraídos estes de ângulos iguais, a saber: de FEA e FEB [somados], e de FEC e FED

(vtrique enim per decimam tertiam primi duobus rectis aequales sunt) reliqui .feb.[99] .fed. aequales manebunt, quare etiam per quartam primi .fb. .fd. aequales sunt. Quoniam itaque .fc. .fa. aequales sunt, similiter et .fb. .fd. ac[100] .cd. ipsi .ab. ergo per octauam primi elementorum .afb. angulus aequalis est .cfd. angulo, et per sextam suppositionem aequales apparent diametri. Quod fuit probandum.

Theorema trigesimum sextum. *Si quae ab oculo ad centrum procidens circuli, neque ad angulos rectos fuerit ipsius circuli plano, neque etiam ei quae ex centro fuerit aequalis neque equos cum his que ex centro comprehendat angulos, sed aut maior aut minor ea que ex centro fuerit diametri ipse inaequales apparebunt.*
Sit circulus .abcd. cuius centrum .e. diametres autem .ab. .cd. sitque erecta .ef. maior semidiametro sitque oculus in .f. non faciat etiam .ef. cum diametris vllos aequos angu|los quod neque .fec. aequalis sit angulo .fea. nec angulus .feb. angulo .fec. nec [S53r] angulus .feb. cum angulo .fed. non sint etiam .fea. .fed. anguli aequales.

Dico quod tunc diametri inaequales apparebunt.

Connectantur .fc. .fa. .fb. .fd. Si itaque .ab. .cd. aequales spectentur erunt anguli .afb. <.cfd. aequales per 6am suppositionem> circunscribatur illi circulus per quintam quarti elementorum. qui sit .afgb. Cumque alter duorum

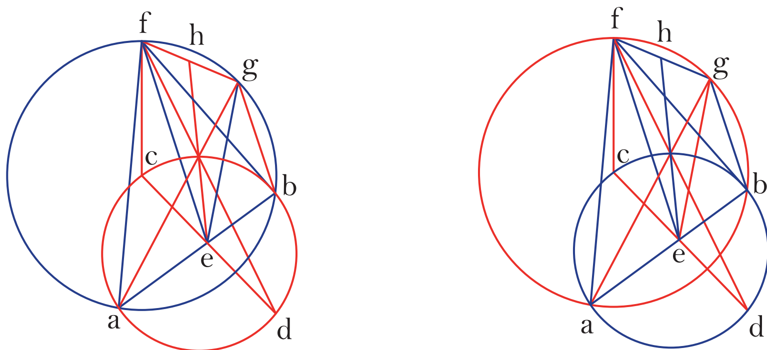
---

99 **.feb.,** .fea. *SO*
100 **ac,** .ac. *SO*

[somados] (pois cada par é igual a dois retos, pela décima terceira do primeiro), os restantes FEB e FED permanecerão iguais. Por esta razão, pela quarta do primeiro, FB e FD também são iguais. Ora, uma vez que FC e FA são iguais; e [uma vez que], da mesma forma, FB e FD são iguais; e, além disso, CD [é igual] a AB, então, pela oitava do primeiro dos *Elementos*, o ângulo AFB é igual ao ângulo CFD. Então, pela sexta suposição, os diâmetros aparecem iguais. O que se quis provar.

Teorema trigésimo sexto. *Se a reta que se estende do olho para o centro do círculo não for perpendicular ao plano do círculo, nem for igual ao raio [do círculo], nem compreender ângulos iguais com os raios, mas for maior ou menor do que o raio, os diâmetros aparecerão desiguais.*

[Fig. 80 e 81] | Seja ABCD o círculo, com centro E. Sejam AB e CD os diâmetros. Levante-se EF [a partir do centro], maior do que um raio. Esteja o olho em F. EF não faça ângulos iguais com os diâmetros: [ou seja,] nem o ângulo FEC seja igual ao ângulo FEA, nem o ângulo FEB [seja igual] ao ângulo FED, nem sejam iguais [os ângulos] FEA e FED.



Figs. 80 e 81[24]

Afirmo que, então, os diâmetros aparecerão desiguais.

Ligue-se F a C, F a A, F a B e F a D. Se AB e CD forem vistos iguais, [então,] os ângulos AFB e [CFD serão iguais, pela suposição sexta deste tratado, e CFD e AFB serão triângulos]. Em seu redor[25], circunscreva-se um círculo pela quinta [proposição] do quarto [livro] dos *Elementos*, seja AFGB. Uma vez que, em cada par

24 Trata-se de figuras repetidas, em que a segunda corrige pontualmente a primeira.

25 Ou seja, em redor do triângulo AFB.

angulorum in triangulo .fcd. puta vel .fdc. uel .fcd minor est recto (alias enim in triangulo duo anguli duobus angulis rectis essent aequales, quod est contra decimam septimam primi) ponatur quod sit ille .fcd. angulus eodem enim modo sicut vno postulato ita et reliquo postulato probabitur. ad lineamque .ab. et ad signum in ea .a. ipsi .fcd. angulo aequalis ponatur per vigesimam tertiam primi .gab. | et protendatur .ag. quo secet circunferentiam circuli .fgba. in .g. signo. connectanturque .gb. eruntque per decimam septimam tertii elementorum anguli .afb. .agb. aequales at .afb. angulus aequus est angulo .cfd. ergo per primam communem sententiam .cfd. .agb. aequales sunt adinuicem. At quoniam angulo .gab. aequus est angulus .fcd. angulus autem .agb. angulo .cfd. latusque .cd. suppositum angulo .f. lateri ab supposito angulo .g. ergo per vigesimam sextam primi elementorum angulus .gba. angulo .cdf. aequalis est et .gb. ipsi .fd. et .fc. ipsi .ga. Rursum quoniam .fc. .ga. aequales sunt .ce. autem ipsi .ae. per decimam quintam primi definitionem et angulus .fce. angulo .gae. vt positum est erunt per 4.am primi Elementorum .fe. .eg. aequales, et angulus .fec. angulo .gea. At quoniam .ge. cadit super .ab. faciet per 10.am 3. primi duos angulos .gea. .geb. duobus rectis aequales per eandem quoniam cadit super .cd. erunt .fec. .fed. duobus rectis equales, et per quartum postulatum anguli .gea. .geb. equales sunt angulis | .fec. <.fed.> demptis ergo .fec. .gea. equalibus reliqui .fed. .geb. aequales sunt. [O51r] [S53v]

Dico itaque quod .fg. sunt diuersa signa.

Si enim vnum et idem esset .eg. ipsa .fe. alias enim duae rectae superficiem concluderent. et .ga. ipsa .fa. angulusque .gea. angulus .fea. est autem .gea. ante probatus aequalis angulo .fec. ergo per primam animi conceptionem .fea. angulus aequus est angulo .fec. (erit enim .fea. angulus idem cum .gea.) quod est contra primam hypotesim non est igitur .g. ipsum signum .f.

Cumque sint diuersa connectantur recta linea .fg. seceturque bifariam per decimam primi in signo .h. et connectantur .he. cumque .ge. .ef. vt ante probatum est sint aequales erit .efg. isoscheles et per quintam primi .efg. .egf. anguli aequales adinuicem at .gh. ipsi .fh. etiam aequalis est. ergo per quartam primi .ehg. angulus aequalis est .ehf. angulo et per decimam tertiam eiusdem vterque | rectus et .eh. [O51v] ipsi .fg. est ad angulos rectos ac per corollarium primae tertii elementorum in ipsa .eh. centrum erit circuli .fgba. Quod non erit ipsum .e. tunc enim .ef. .ea. quae sunt

de ângulos no triângulo FCD, um é menor do que um reto, por exemplo: ou FCD ou FDC (com efeito, de outra maneira, no triângulo, dois ângulos seriam iguais a dois ângulos retos, o que é contra a décima sétima do primeiro), [então,] ponha-se que ele[26] seja o ângulo FCD (a prova será idêntica, quer se postule que um quer se postule o outro). Na linha AB, e no seu ponto A, ponha-se o ângulo GAB igual ao ângulo FCD, pela vigésima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Estenda-se AG até que corte a circunferência do círculo FGBA no ponto G. Ligue-se G a B. Pela décima sétima do terceiro dos *Elementos*, os ângulos AFB e AGB serão iguais. Mas o ângulo AFB é igual ao ângulo CFD; logo, pela primeira noção comum, CFD e AGB são iguais. Ora, uma vez que o ângulo FCD é igual ao ângulo GAB, e o ângulo AGB [é igual] ao ângulo CFD, e o lado CD, subtenso pelo ângulo F, [é igual] ao lado subtenso pelo ângulo G, então, pela vigésima sexta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo GBA é igual ao ângulo CDF, GB [é igual] a FD, e FC [é igual] a GA. Novamente, uma vez que FC e GA são iguais, e CE [é igual] a AE, pela décima quinta definição do primeiro, e o ângulo FCE também é igual ao ângulo GAE, como se pôs[27], [então,] FE e EG serão iguais, e o ângulo FEC [será igual] ao ângulo GEA, pela quarta do primeiro dos *Elementos*. Mas, uma vez que GE cai em AB, [então,] pela décima terceira do primeiro, fará os dois ângulos GEA e GEB [somados] iguais a dois retos. Pela mesma [proposição], uma vez que [FE] cai em CD, [os dois ângulos] FEC e FED [somados] serão iguais a dois retos. Pelo quarto postulado, os ângulos GEA e GEB [somados] são iguais aos ângulos FEC e FED [somados]. Então, subtraídos os ângulos iguais FEC e GEA, os restantes FED e GEB são iguais.

Afirmo que F e G são pontos diferentes.

Se EG fosse uma e a mesma [reta] que FE, duas retas encerrariam uma área, e GA seria a mesma reta que FA e o ângulo GEA seria o mesmo ângulo que FEA. Mas provou-se que GEA é igual ao ângulo FEC; logo, pela primeira noção comum, o ângulo FEA é igual ao ângulo FEC (pois o ângulo FEA será o mesmo que GEA) o que é contra a primeira hipótese. Portanto, G não é o ponto F.

Uma vez que são [pontos] diferentes, ligue-se F a G, por meio de uma linha reta. Seja ela bissetada no ponto H, pela décima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Ligue-se H a E. Uma vez que GE e EF são iguais, como se provou antes, [então,] EFG será isósceles, e, pela quinta do primeiro, os ângulos EFG e EGF são iguais. Mas GH também é igual a FH; logo, pela quarta do primeiro, o ângulo EHG é igual ao ângulo EHF. Pela décima terceira do mesmo, ambos são retos. EH é perpendicular a FG. Além disso, pelo corolário da primeira do terceiro dos *Elementos*, o centro de FGBA estará na [reta] EH. Este [centro] não será E, pois EF e EA, que são

---

26 Ou seja, o ângulo menor do que um reto.

27 Pouco antes dissera-se que o ângulo GAB era igual ao ângulo FCD, que correspondem aos ângulos agora indicados GAE e FCE.

ex centris adinuicem aequales essent cuius oppositum positum est in prima hypotesi. Est igitur .ab. non per centrum extensa quam secat .he. bifariam ergo per tertiam tertii vterque angulorum .hea. .heb. rectus est. est etiam .ehg. angulus probatus rectus .he. igitur cadens in rectas lineas .fg. .ab. facit duos angulos intrinsecos rectos ergo per vigesimam octauam primi parallelae sunt. cumque in eas incidat .eg. ergo per vigesimam 9.[am] eiusdem anguli .geb. .egf. alternati aequales sunt. Est autem ante probatus angulus .egf. aequus angulo .efg. quare per primam communem sententiam .efg. .geb. aequales sunt. In easdem .fg. .ab. cadit recta linea .ef. ergo per | eandem vigesimam nonam .fea. .egf. aequales sunt. Sed .egf. aequalis .geb. ergo per [S54r] primam animi conceptione .fea. .geb. aequales sunt, probati etiam sunt .geb. .fed. aequales. Quare .fea. .fed. etiam aequales sunt per primam animi conceptionem. Cuius oppositum positum est in prima hypotesi minime igitur .cd. .ab. aequales spectantur. Quod fuit ab initio probandum.

Theorema trigesimum septimum. *Curruum rote quandoque circulares quandoque contractae apparent.*

Sit currus rota .abcd. Dico eam quandoque apparere rotundam et quandoque contractam.

Ponatur oculus in .f. Si itaque .fe. ducta ab oculo ad centrum rote fuerit perpendicularis super rotam tunc vt ostensum est in trigesimo quarto theoremate diametri aequales spectabuntur et exinde tota rota circularis. Si autem non fuerit ad angulos rectos fuerit tamen .fe. aequalis semidiametro per trigesimum quintum etiam diametri aequales spectabuntur et exinde circulus | apparebit. Si autem angulos cum [O52r] diuersis diametris aequos angulos fecerit per addita ad trigesimam quintam adhuc diametri aequales apparebunt. At si non sit aequalis semidiametro, nec ad angulos rectos non faciat etiam angulos cum diuersis diametris aequales ex praecedente tunc diametri inequales apperebunt et ideo rota ipsa contracta apparet.

Theorema trigesimum octauum. *Si magnitudo quaepiam sublimis ad subiectum planum ad angulos rectos extiterit positusque fuerit oculus in aliquo signo ipsius plani et permutatum fuerit visile in circuli circunferentia visile semper equaliter spectabitur.*

| Sit circulus in cuius centro .c. ponatur oculus sitque .ab. magnitudo perpendicularis subiecto plano, et permutetur .ab. magnitudo in .de. semper tamen perpendicularis subiecto plano circa centrum .c. [S54v]

raios, seriam iguais, tendo-se assumido o oposto disto na primeira hipótese. Então, é AB, estendida fora do centro, que HE bisseta. Portanto, pela terceira do terceiro, ambos os ângulos HEA e HEB são retos. Mas provou-se que o ângulo EHG também é reto. Então, HE, ao cair nas linhas retas FG e AB faz os dois ângulos internos retos. Portanto, pela vigésima oitava do primeiro, elas são paralelas. Uma vez que nelas cai EG, então, pela vigésima nona do mesmo, os ângulos alternos GEB e EGF são iguais. Mas provou-se anteriormente que o ângulo EGF é igual ao ângulo EFG. Por esta razão, pela primeira noção comum, EFG e GEB são iguais. Nas mesmas [retas] FG e AB cai a linha reta EF; logo, pela mesma vigésima nona, FEA e EGF são iguais. EGF é igual a GEB; logo, pela primeira noção comum, FEA e GEB são iguais. Também se provou que GEB e FED são iguais. Por esta razão, FEA e FED também são iguais, pela primeira noção comum. Contudo, na primeira hipótese assumiu-se o contrário disto. Portanto, CD e AB não se veem iguais. O que se quis provar desde o início.

Teorema trigésimo sétimo. *As rodas dos carros aparecem, por vezes circulares, por vezes comprimidas*[28]*.*
Seja ABCD a roda de um carro. Afirmo que ela aparece por vezes redonda, por vezes, comprimida.

Ponha-se o olho em F. Assim, se FE for traçada do olho para o centro da roda [e] perpendicular à roda, então, como se mostrou no trigésimo quarto teorema, os diâmetros observar-se-ão iguais e, em consequência, a roda [aparecerá] toda ela circular. Se FE não for perpendicular, mas for igual ao semidiâmetro, [então,] pelo trigésimo quinto [teorema deste tratado], os diâmetros também se observarão iguais e, em consequência, aparecerá um círculo. Se fizer ângulos iguais com os diferentes diâmetros, [então,] pelo aditamento à trigésima quinta, os diâmetros aparecerão iguais na mesma. Mas se não for igual ao semidiâmetro, nem perpendicular, nem fizer ângulos iguais com os diferentes diâmetros, [então,] pela [proposição] anterior, os diâmetros aparecerão desiguais e por isso, a roda aparecerá comprimida.

Teorema trigésimo oitavo. *Se uma qualquer grandeza elevada for perpendicular ao plano subjacente, e se o olho se puser num ponto qualquer desse plano, e se o visível for deslocado na circunferência de um círculo, o visível ver-se-á sempre igual.*
[Fig. 82] | Seja um círculo em cujo centro C se ponha o olho. Seja AB uma grandeza perpendicular ao plano subjacente, e desloque-se a grandeza AB para DE, mas sempre perpendicular ao plano subjacente e em torno do centro C.

28 Esta demonstração não é acompanhada de figura, porque as anteriores servem neste caso.

Dico .ab. aequaliter apparere sibi ipsi, et in .a. et in .d.

Connectantur enim .cb. .ce. .ac. .dc. eritque rectus angulus .cab. Item .cde. per secundam definitionem vndecimi et proinde aequales sunt anguli .cab. .cde. per quartum[101] postulatum elementorum. Aequalia etiam sunt latera .ca. .cd. per decimam quintam definitionem primi elementorum. Item aequalia sunt .ab. .de. per octauam communem sententiam. Igitur basis .cb. basi .ce. est aequalis et angulus .acb. angulo .dce. per quartam primi. Quare aequales apparent magnitudines .ab. .de. per sextam suppositionem. Igitur .ab. in .ed. translata semper aequalis apparet. Quod erat probandum.

Theorema trigesimum nonum. *Si vero visile ad subiectum planum ad angulos fuerit rectos permutatus autem fuerit oculus in circuli circunferentia centrum | habente signum* [O52v] *circa quod connectitur[102] magnitudo ipsi plano visile semper aequaliter apparebit.*
Sit visile .cb. directum et ad angulos rectos ad subiectum planum permuteturque oculus in circuli circunferentia cuius centrum .b.

101 **quartum,** quartam *SO*
102 **connectitur,** conuertitur *SO*

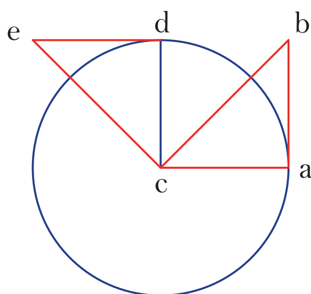


Fig. 82

Afirmo que AB aparece igual a si mesma, tanto em A, como em D.

Ligue-se C a B, C a E, A a C e D a C. CAB será um ângulo reto, tal como CDE, pela segunda definição do undécimo [livro dos *Elementos*]. Em consequência, os ângulos CAB e CDE são iguais, pelo quarto postulado dos *Elementos*. Os lados CA e CD também são iguais, pela décima quinta definição do primeiro dos *Elementos*. Da mesma forma, AB e DE são iguais, pela oitava noção comum. Então, a base CB é igual à base CE e o ângulo ACB [é igual] ao ângulo DCE, pela quarta do primeiro. Por esta razão, as grandezas AB e DE aparecem iguais, pela sexta suposição. Então, AB deslocada para DE, aparece sempre igual. O que se queria provar.

Teorema trigésimo nono. *Se um visível for perpendicular ao plano subjacente, e o olho for deslocado na circunferência do círculo que tem por centro o ponto no qual a grandeza se liga ao plano referido, o visível aparecerá sempre igual.*

[Fig. 83] | Seja CB o objeto visível, a direito e perpendicular ao plano subjacente. Desloque--se o olho na circunferência do círculo com centro B.

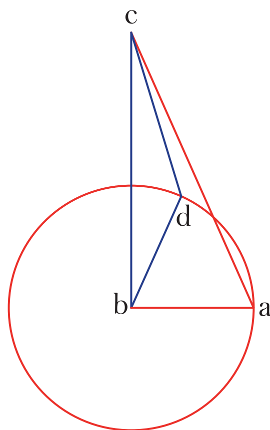


Fig. 83

Dico .bc. semper aequaliter spectari.

Connectantur .ba. .bd. .ca. .cd. Et quoniam .ba. aequalis est ipsi .bd. per decimam quintam definitionem elementorum et .bc. communis angulus autem .cba. aequalis angulo .cbd. per secundam definitionem vndecimi elementorum erit per quartam primi angulus .cab. aequalis angulo .cdb. At sub illis videtur .cb. ergo per sextam sup|positionem aequalis[103] videtur semper .bc. quod erat probandum. [S55r]

Theorema quadragesimum. *Si spectata magnitudo ad subiectum planum neutiquam ad angulos rectos fuerit, mutatumque fuerit visile in circuli circunferentia inaequaliter semper spectabitur.*

Sit spectata magnitudo .ab. non perpendicularis ad subiectum planum oculus autem sit .e. in subiecto plano, moueaturque .ab. in circunferentia circuli cuius centrum .e.

Dico .ab. continuo inaequaliter spectari.

Sit nempe circulus cuius centrum .e. descriptus .acf. ponanturque .dc. .gf. (siue moueatur .ab. vsque in .c.f. signo) <neutiquam> ad angulos rectos ipsi plano in circunferentia circuli et connectantur .ea. .ec. .ef. per trigesimam primam vero primi elementorum sit .eh. parallela excitata ipsi .ba. quae per trigesimam eiusdem parallela erit ipsis .dc. .gf. (sunt enim .ab. .dc. .gf. per sextam vndecimi elementorum parallelae adinuicem) sitque .eh. tam parua <quam .ba.> perpendicularis ab .h. ducta in subiectum planum per vndecimam vndecimi cadat intra circulum que sit .hk. connectantur .ka. .ke. que extendatur vsque in .p.

103 **aequalis,** aequales *SO*

Afirmo que BC se observa sempre igual.

Ligue-se B a A, B a D, C a A e C a D. Uma vez que BA é igual a BD, pela décima quinta definição [do primeiro livro] dos *Elementos*, e BC é comum, e o ângulo CBA é igual ao ângulo CBD, pela segunda definição do undécimo dos *Elementos*, [então,] pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], o ângulo CAB será igual ao ângulo CDB. Mas é sob estes que se vê CB; logo, pela sexta suposição, BC vê-se sempre igual. O que se queria provar.

Teorema quadragésimo. *Se a grandeza observada não for perpendicular ao plano subjacente, e o visível for deslocado na circunferência do círculo, ver-se-á sempre desigual.*

[Figs. 84 e 85] | Seja AB a grandeza observada, não perpendicular ao plano subjacente. Seja E o olho no plano subjacente. Mova-se AB na circunferência do círculo com centro E.

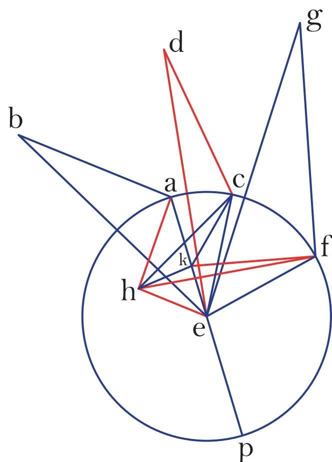


Fig. 84

Fig. 85

Afirmo que AB se observa continuamente desigual.

Descreva-se o círculo ACF com centro E. Ponha-se DC e GF não perpendiculares ao plano na circunferência do círculo (ou: mova-se AB para aos pontos C e F). Ligue-se E a A, E a C e E a F. Pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, levante-se EH paralela a BA. Pela trigésima do mesmo, ela será paralela a DC e a GF (pois AB, DC e GF são paralelas entre si, pela sexta do undécimo dos *Elementos*). Seja EH tão pequena quanto BA. Que a perpendicular traçada a partir de H para o plano subjacente, pela undécima do undécimo, caia no interior do círculo, e seja HK. Ligue-se K a A e K a E. Estenda-se esta [última] até P.

Connectantur etiam .kc. .kf. .ha. .hc. .hf. Quoniam itaque .k. non est centrum | [O53r] circuli (alioqui namque .hk: esset perpendicularis in centro .e. cumque .ba. .he. sint parallelae et angulus .hka. siue .hea. <rectus sit> per decimam enim definitionem primi vterque rectus est, et per vigesimam nonam eiusdem angulus .bae. rectus quod est contra hypothesim) et ab eo procidunt lineae .ka. .kp. .kc. .kf. ergo per septimam tertii elementorum maxima est .kp. minima .ka. .kc. maior quam .ka. .kf. autem maior quam vel | .kc. vel .ka. quare quadratum .kc.[104] maius est quadrato .ka. appo- [S55v] sitoque communi quadrato lineae .hk. erunt duo quadrata .hk. .kc. maiora duobus quadratis .hk. .ka. Sed quoniam angulus .hka. angulo .hkc. est aequalis vterque enim rectus per secundam definitionem vndecimi duo quadrata .hk. .ka. quadrato .ha. aequalia sunt. Ac per eandem quadrata .hk. .kc. aequalia sunt quadrato .hc. ergo quadratum .hc. maius est quadrato .ha. et exinde linea .hc. linea .ha. maior est, per idem probabis .hf. maiorem vel .hc. vel .ha. ergo per vigesimam quintam primi Elementorum angulus .hea. angulo .hec. minor est angulusque .hec. minor erit angulo .hef. ac a fortiori .hea.[105] minor est angulo .hef. Et quoniam parallelae sunt .he. .ba. in quas incidit linea .ae. per vigesimam nonam ergo primi elementorum anguli .bae. .hea. duobus rectis sunt aequales. Sunt et per idem .hef. .gfe. anguli duobus rectis aequales. dempto igitur ab angulis .hea. .bae. angulo .hea. qui minor est angulo .hef. dempto etiam ab angulis .feh. .gfe. angulo .hef. maiore angulo .hea. remanebit angulus .bae. maior angulo .gfe. Eodem modo dempto ab angulis .dce. .hec. angulo .hec. remanebit angulus .dce. maior angulo .gfe. et minor angulo .bae.

Centro igitur .f. spacio autem .fg. in plano .efg. circulus describatur qui vel includet signum .e. vel non. Non includat primo ponaturque ad signum .f. in plano .efg. per vigesimam tertiam primi elementorum angulo .bae. | aequalis angulus [O53v] .efm. Sitque .fm. producta quousque occurrat circunferentiae circuli, quam secet in .m. connectanturque .em. signa. Quoniam igitur .ba. .ae. lineae equales sunt duabus .dc. .ec. per hypotesim et decimam quintam definitionem angulus | autem [S56r] .bae. angulo .dce. maior per vigesimam quartam primi elementorum basis .be. maior erit basi .de. Ac per idem .be.[106] maior erit quam .ge. et .de. maior quam .ge. et protrahatur .ef. quousque secet circulum qui est in plano .efg. sitque sectio in .o. Tunc quoniam .ba. .mf. aequales sunt (vtraque enim aequalis ipsi .fg.) .ea. etiam ipsi .ef. angulusque .bae. angulo .mfe erit per quartam primi elementorum basis .em. basi .be. aequalis. At .be. probata est maior quam .ge. ergo .em. maior est quam .eg. Cumque .e. signum sit extra circulum ab eoque procidunt rectae

104 **.kc.,** .kf. *SO*
105 **.hea.,** .hae. *SO*
106 **.be.,** .he. *SO*

Ligue-se K a C, K a F, H a A, H a C e H a F. Uma vez que K não é o centro do círculo (de outro modo, HK seria perpendicular no centro E, e, sendo BA e HE são paralelas, e o ângulo HKA, ou o HEA, reto – pois são retos, pela décima definição do primeiro – [então,] o ângulo BAE também seria reto, pela vigésima nona do mesmo, o que é contra a hipótese) e dele se estendem as linhas KA, KP, KC e KF, então, pela sétima do terceiro dos *Elementos*, KP é a [linha] maior e KA a [linha] menor; KC [é] maior do que KA; KF [é] maior do que KC ou KA. Por esta razão, o quadrado de KC é maior do que o quadrado de KA. Somado o quadrado da linha HK, comum, [então,] os dois quadrados de HK e KC [somados] serão maiores do que os dois quadrados de HK e KA [somados]. Mas, uma vez que o ângulo HKA é igual ao ângulo HKC, pois ambos são retos, pela segunda definição do undécimo, [então,] os dois quadrados de HK e KA [somados] são iguais ao quadrado de HA. Pela mesma [proposição], os quadrados de HK e KC [somados] são iguais ao quadrado de HC. Logo, o quadrado de HC é maior do que o quadrado de HA. Em consequência, a linha HC é maior do que a linha HA. Pelo mesmo [raciocínio], provarás que HF é maior do que HC ou HA. Então, pela vigésima quinta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo HEA é menor do que o ângulo HEC, e o ângulo HEC será menor do que o ângulo HEF, e, *a fortiori*, [o ângulo] HEA é menor do que o ângulo HEF. Uma vez que HE e BA são paralelas e nelas cai a linha AE, então, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*, os ângulos BAE e HEA são iguais a dois retos. Pelo mesmo [raciocínio], os ângulos HEF e GFE são iguais a dois retos. Então, subtraído dos ângulos HEA e BAE o ângulo HEA, que é menor do que o ângulo HEF, e subtraído dos ângulos FEH e GFE o ângulo HEF, maior do que o ângulo HEA, restará o ângulo BAE, maior do que o ângulo GFE. Do mesmo modo, subtraído o ângulo HEC dos ângulos DCE e HEC, restará o ângulo DCE, maior do que o ângulo GFE e menor do que o ângulo BAE.

Com centro F e raio FG, descreva-se um círculo no plano EFG. Este incluirá o ponto E, ou não. Em primeiro lugar, não inclua [o ponto E]. Ponha-se o ângulo EFM igual ao ângulo BAE no ponto F, no plano EFG, pela vigésima terceira [proposição] do primeiro dos *Elementos*. Prolongue-se FM até à circunferência do círculo, cortando-a em M. Liguem-se os pontos E e M. Uma vez que as linhas BA e AE são iguais às duas [linhas] DC e EC, por hipótese e pela décima quinta definição, e uma vez que o ângulo BAE é maior do que o ângulo DCE, então, pela vigésima quarta do primeiro dos *Elementos*, a base BE será maior do que a base DE. Pelo mesmo [raciocínio], BE será maior do que GE e DE será maior do que GE. Prolongue-se EF até que corte o círculo que está no plano EFG, seja o corte em O. Uma vez que BA e MF são iguais (pois ambas são iguais a FG), e EA é igual a EF, e o ângulo BAE [é igual] ao ângulo MFE, então, pela quarta do primeiro dos *Elementos*, a base EM será igual à base BE. Mas provou-se que BE era maior do que GE; logo, EM é maior do que EG. Uma vez que E é um ponto fora do círculo e dele se estendem as linhas

lineae .eo. .em .eg. per conuersam primae partis octauae elementorum tertii .em. propinquior est diametro .eo. est enim probata maior ipsa .eg. quare cadit inter duas lineas .ef. .eg. et proinde diuidit angulum .gef. per quartum corrogatum. Angulus igitur .mef.[107] minor est angulo .gef. Sed quoniam .ba. .mf. aequales sunt vt ante ostensum est, consimiliter autem et .ea. et .ef. angulusque .bae. angulo .mfe.[108] erit per quartam primi angulus .bea. angulo .mef. aequalis est autem .mef. angulus probatus minor[109] angulo .gef. ergo .bea. angulus est angulo .gef. minor. Sub .bea. videtur .ba. sub .gef. videtur .gf. ergo .gf. maior spectatur quam .ba. per consequens inaequaliter spectantur.

Si autem .e. signum cadat intra circulum tunc argue per conuersam septimae tertii elementorum quod propinquior sit .em. quam .eg. ipsi .eo. et ob id inter .ef. et .eg. cadens .em. diuidit angulum et procedit demonstratio. Consimiliter ostendes quod .dc. .gf. inaequaliter spectantur, posito nempe angulo .efm. aequali angulo .ecd. et deducta demonstratione vt prius. Quod autem .ba. | inaequaliter spectentur [O54r] probabis describendo circulum in plano .edc. et ponendo an|gulum .ecm. aequalem [S56v] angulo .eab. et sic de singulis et demonstratio procedit.

Theorema quadragesimum primum. *Est aliquis locus in quo oculo manente visilique permutato aequum semper visile apparet.*

Sit magnitudo .ab. oculus vero .c. Connectantur per primum postulatum .cb. .ca. eritque triangulus .acb. circum quem

107 **.mef.,** .mfe. *SO*
108 **.bae. angulo .mfe.,** .bea. angulo .mef. *SO*
109 **minor,** aequalis *SO*

retas EO, EM e EG, [então,] pela conversa da primeira parte da oitava do terceiro dos *Elementos*, EM está mais próxima do diâmetro EO, pois se provou ser maior do que EG. Por esta razão, cai entre as duas linhas EF e EG. Em consequência, divide o ângulo GEF, pelo quarto corrogado. Então, o ângulo MEF é menor do que o ângulo GEF. Mas, uma vez que BA e MF são iguais, como se mostrou antes, e uma vez que, da mesma forma, EA e EF [são iguais], e [uma vez que] o ângulo BAE [é igual] ao ângulo MFE, [então,] pela quarta do primeiro, o ângulo BEA será igual ao ângulo MEF. Mas provou-se que o ângulo MEF era menor do que o ângulo GEF; logo, o ângulo BEA é menor do que o ângulo GEF. Sob BEA vê-se BA e sob GEF vê-se GF; logo, GF observa-se maior do que BA; em consequência, vêem-se desiguais.

[Figs. 86 e 87] | Se o ponto E cair dentro do círculo, então argumenta, pela conversa da sétima [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*, que EM está mais próxima de EO do que EG, e que, por isso, ao cair entre EF e EG, ME divide o ângulo [GEO] e ter-se-á a demonstração. Da mesma forma mostrarás que DC e GF se veem desiguais, colocado o ângulo EFM igual ao ângulo ECD e deduzida a demonstração como anteriormente. Que BA [e CM] se observam desiguais, provarás descrevendo o círculo no plano EDC e pondo o ângulo ECM igual ao ângulo EAB e assim de cada item[29] e a demonstração procederá.

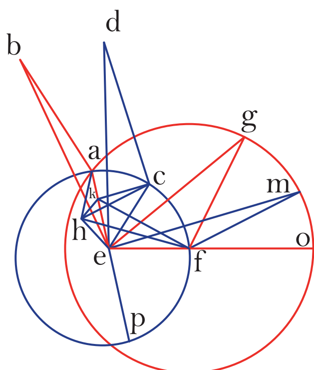


Fig. 86

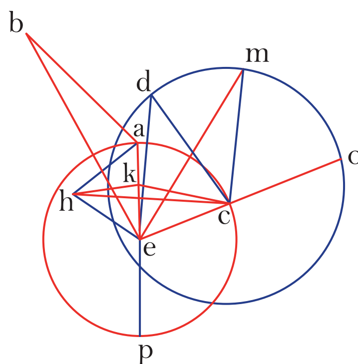


Fig.87

Teorema quadragésimo primeiro. *Existe um lugar onde, permanecendo o olho imóvel e deslocado o visível de lugar, o visível aparece sempre igual.*

[Fig. 88] Seja AB uma grandeza, e C, o olho. Ligue-se, pelo primeiro postulado, C a B e C a A. Formar-se-á o triângulo ACB. Descreva-se um círculo em torno dele, pela

29 Ou seja, e assim por diante, seguindo os passos da demonstração imediatamente anterior.

per quintam quarti elementorum circulus describatur coaptetur autem per primam eiusdem lineae .ab. aequalis .dh. et connectantur .dc. .hc.

Tunc dico quod .ab. .dh. siue .ab. mota in circulo .cab. aequalis semper spectatur.

Quoniam enim per vigesimam[110] sextam tertii elementorum. anguli qui in aequalibus circulis circunferentiis aequalibus subtenduntur aequales sunt .acb. .dch. aequales erunt. At sub illis videntur .hd. .ab. ergo per sextam suppositionem huius .hd. .ab. aequales spectantur. Idem probabis vbicunque ponatur .ab. in circulo .ahb. connexis semper extremitatibus lineae cum .c. Datus itaque est locus .c. in quo oculo manente visile .ab. permutatum semper aequale spectatur.

Aliter idem probabitur.

Sit .ed. visile, oculus autem in .c. producatur per signum .c. planum ad quod .ed. perpendicularis sit per adnotata a nobis in quartam vndecimi elementorum (vel sic si magis[111] protrahatur .ed. per secundum postulatum in rectum in infinitum supra quam per decimam secundam primi elementorum ducatur perpendicularis .cb.) connectanturque .ce. .cd.[112] Ad signumque .b. per decimam secundam vndecimi elementorum ad subiectum planum .ecb. perpendicularis erigatur .bk. connectanturque .ck. triangulus itaque erit .cbk. Quoniam | igitur .eb. recta linea ad duas .cb. [S57r] .bk. rectas lineas in communi sectione stat ad angulos rectos, ad earundem planum per quartam vndecimi elementorum ad angulos rectos erit .eb. | igitur ad planum [O54v] .cbk. ad angulos rectos est quod erat faciendum. Producatur ergo planum .cbk. in continuum et directum, centroque .c. interuallo .cb. per tertium postulatum circulus describatur[113] in plano .cbk.

110 **vigesimam,** trigesimam *SO*
111 **magis,** maius *SO*
112 **.cd.,** .cb. *SO*
113 **describatur,** describetur *SO*

quinta [proposição] do quarto [livro] dos *Elementos*. Ajuste-se [no mesmo círculo], pela primeira do mesmo, a linha DH, igual à AB. Ligue-se D a C e H a C.

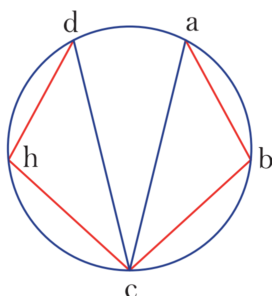


Fig. 88

Afirmo que AB e DH (ou: AB deslocada no círculo CAB) se veem sempre iguais.

Uma vez que, pela vigésima sexta do terceiro dos *Elementos*, os ângulos que, em círculos iguais, são subtensos por circunferências iguais, são iguais, [então,] [os ângulos] ACB e DCH serão iguais. Mas é sob eles que se vê HD e AB; logo, pela sexta suposição deste [tratado], HD e AB vêem-se iguais. O mesmo provarás onde quer que se coloque AB no círculo AHB, se se ligar sempre as extremidades da linha com C. Assim sendo, fica dado um lugar C onde, permanecendo o olho imóvel e deslocado o visível AB, este se vê sempre igual.

Prova-se o mesmo de outra maneira.

[Figs. 89 e 90] | Seja ED o objeto visível. Esteja o olho em C. Estenda-se pelo ponto C um plano ao qual ED seja perpendicular, pelo aditamento que fizemos à quarta [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*. Ou então, assim: estendendo-se ED infinitamente a direito, pelo segundo postulado, trace-se CB perpendicular a ela, pela décima segunda do primeiro dos *Elementos*. Ligue-se C a E e C a D. No ponto B, pela décima segunda do undécimo dos *Elementos*, levante-se BK perpendicular ao plano subjacente ECB. Ligue-se C a K. Assim, CBK será um triângulo. Uma vez que a linha reta EB assenta perpendicularmente na interseção das duas linhas retas CB e BK, então, pela quarta do undécimo dos *Elementos,* EB será perpendicular ao plano delas; portanto, é perpendicular ao plano CBK. O que se queria fazer. Então, prolongue-se o plano CBK continuamente a direito. Com centro C e raio CB, pelo terceiro postulado, descreva-se um círculo no plano CBK.

Dico tunc quod .c. locus inuentus est in quo oculo manente ac visili permutato[114] aequum semper visile apparet.

Quod sic ostendo, permutetur .eb. vsque ad .r. punctum circunferentiae circuli semper ad angulos rectos siue sit .gr. ipsi .eb. aequalis a qua per tertiam primi elementorum ipsi .ed. aequalis abscindatur .gh. eritque per tertiam communem sententiam .hr. ipsi .db. aequalis. Connectantur .cr. .ch. .cg. .ce. .cd. Et quoniam .eb. magnitudo ad subiectum planum est ad angulos rectos positusque oculus in .c. signo ipsius[115] plani. permutatur autem .eb. in circuli circunferentia[116] ergo per trigesimam octauam huius aequaliter .eb. semper spectatur. cumque .gr. ipsi <.eb.> congruat aequalis videtur .gr. .eb. est igitur per conuersionem sextae suppositionis huius angulus .bce. angulo .rcg. Rursus quoniam per eandem trigesimam octauam .rh. .db. aequales spectantur, aequus erit angulus .dcb. angulo .rch. quibus ablatis ab angulis .ecb. .gcr. per tertiam communem sententiam elementorum manent anguli .hcg. .ecd. aequales et ob hoc per sextam suppositionem .ed. .gh. aequales spectantur. Sic probabis quod oculo manente in .c. visili vero permutato in circunferentia circa .c. aequum semper spectabitur. Quod erat probandum.

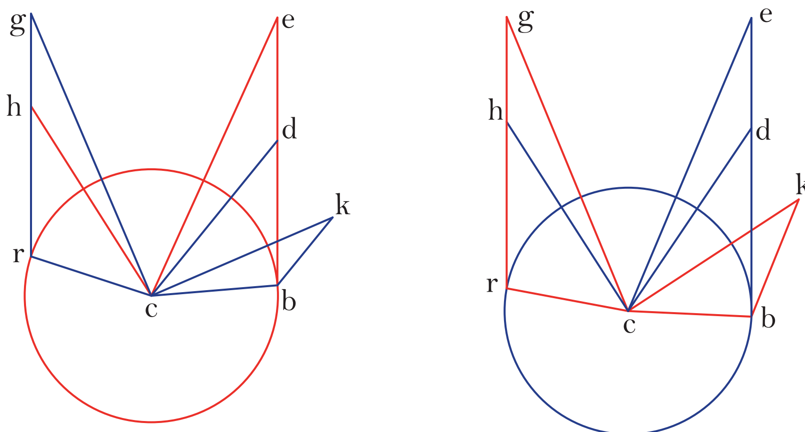
Theorema quadragesimum secundum. | *Est aliquis locus in quo oculo permutato visili vero manente aequale semper visile apparet.* [S57v]

Sit .ab. visile permanens, oculus autem .c. connectantur .ca. .cb. eritque triangulus .cab. circa illum itaque describatur circulus per quintam quarti elementorum.

114 **permutato,** permanente *SO*

115 **ipsius,** ipsi *SO*

116 **circunferentia,** circunferentiae *SO*



Figs. 89 e 90[30]

Afirmo então que se descobriu o lugar C, onde, permanecendo imóvel o olho e deslocando-se o visível de lugar, o visível aparece sempre igual.

O que mostro da seguinte maneira. Desloque-se EB para o ponto R da circunferência do círculo, sempre perpendicularmente (ou: seja GR igual a EB). Desta [reta GR], corte-se GH igual a ED, pela terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Pela terceira noção comum, HR será igual a DB. Ligue-se C a R, C a H, C a G, C a E e C a D. Uma vez que a grandeza EB é perpendicular ao plano subjacente, e o olho foi posto no ponto C desse plano, e EB se desloca na circunferência do círculo, então, pela trigésima oitava deste, EB observa-se sempre igual. Como GR é congruente com EB, [então,] GR e EB vêem-se iguais. Logo, por conversão da sexta suposição deste, o ângulo BCE [é igual] ao ângulo RCG. Novamente, uma vez que, pela mesma trigésima oitava, RH e DB se observam iguais, o ângulo DCB será igual ao ângulo RCH. Tirados estes dos ângulos ECB e GCR, [então,] pela terceira noção comum dos *Elementos*, ficam os ângulos HCG e ECD iguais. Por isso, pela sexta suposição, ED e GH vêem-se iguais. Assim provarás que, permanecendo o olho em C, e deslocado o visível na circunferência em torno de C, [o visível] ver-se-á sempre igual. O que se queria provar.

Teorema quadragésimo segundo. *Há um lugar onde, deslocando-se o olho e permanecendo imóvel o visível, o visível aparece sempre igual.*

[Fig. 91] | Seja AB o visível que permanece imóvel e C o olho. Ligue-se C a A e C a B. CAB será um triângulo. Descreva-se um círculo em torno dele, pela quinta [proposição] do quarto [livro] dos *Elementos*.

30 Trata-se de figuras repetidas.

Dico quod vbicunque oculus .c. moueatur | in circunferentia .bca. aequale semper visile .ab. spectari. [O55r]

Moueatur in .h. connectantur .ha. .hb. erunt per vigesimam septimam tertii elementorum anguli .ahb. .acb. et quotquot in circunferentia .acb. aequales sub illis vero spectatur .ab. aequalis igitur semper apparet .ab. per sextam suppositionem, igitur datus est locus in quo etc.

Aliter idem ostendere.

Sit .ab. magnitudo, oculus vero .c. producatur .ab. in continuum et rectum sitque perpendicularis super subiectum planum vt in precedenti factum est. sitque sic producta .ah. centro igitur .h. interuallo autem .hc. (sit enim .c. signum plani super quod .ah. perpendicularis est) describatur circulus .cdef.

Dico quod vbicumque permutetur oculus in circunferentia circuli .cfed. aequalem semper spectari .ab.

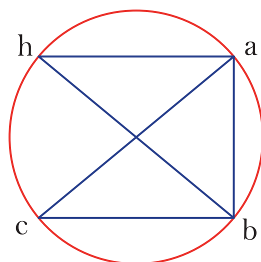


Fig. 91

Afirmo que seja qual for o lugar para onde o olho C se desloca na circunferência BCA, o visível AB se observa sempre igual.

Mova-se [o olho] para H e ligue-se H a A e H a B. Pela vigésima sétima do terceiro dos *Elementos*, os ângulos AHB e ACB, e quaisquer outros na circunferência ACB, serão iguais. Mas é sob eles que se vê AB; logo, AB aparece sempre igual, pela sexta suposição. Logo, foi dado um lugar onde, etc.

Mostrar o mesmo de outra maneira.

[Fig. 92] | Seja AB uma grandeza e C o olho. Prolongue-se AB continuamente a direito e seja perpendicular a um plano subjacente, como se fez na anterior. Tenha sido prolongada desta maneira AH. Com centro H e raio HC (seja C um ponto do plano ao qual AH é perpendicular) descreva-se o círculo CDEF.

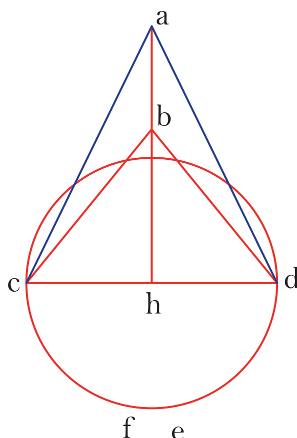


Fig. 92

Afirmo que para onde quer que se desloque o olho na circunferência do círculo CFED, AB se vê sempre igual.

Permutetur in .d. connectanturque .ca. .cb. .ch. .dh. .db. .da. Et quoniam visile .ah. ad subiectum planum perpendiculare est permutaturque oculus in circuli circunferentia habente pro centro .h. circa quod voluitur oculus ergo per trigesimam nonam visile .ah. semper aequale spectatur anguli igitur .adh. .ach. per conuersam sextae suppositionis huius aequales sunt per eandem trigesimam nonam et conuersam sextae suppositionis anguli .bch. .bdh. aequales sunt quibus demptis a prioribus per tertiam communem sententiam | relicti anguli .adb. .acb.[117] aequales erunt sub [S58r]
illis vero spectatur .ab. .ab. igitur per sextam suppositionem semper aequalis apparet oculo permutato in circunferentia circuli .cfed. quod fuit probandum.

Theorema quadragesimum tertium. *Est aliquis locus in quo oculo permutato et visili permanente, inaequaliter visile apparet.*

Sit magnitudo .bc. oculus autem .a. producatur .bc. in continuum et rectum vsque in .d. connectanturque .ab. .ad. .ac. | circa triangulum .bad. describatur circulus per [O55v]
quintam propositionem[118]. quarti.

Dico quod si oculus moueatur in circunferentia .bad. .bc. continuo inaequaliter spectari.

Moueatur gratia exempli in .g. connectanturque .gb. .gc. producantur autem .ac. .gc. quousque occurrant circunferentiae circuli .ac. quidem in .h. .gc. vero in .f. duae illae .ac. .gc. sic productae sese secabunt, alias enim .ac. .gc. esset vna et eadem recta linea cuius oppositum positum est. cadetque ob id .h. signum inter .fd. signa, et erit circunferentia .bh. maior circunferentia .bf. Sed per trigesimam tertiam sexti elementorum. eadem est ratio circunferentiarum et angulorum in eis deductorum siue ad centrum siue ad circunferentiam. maior igitur est angulus .hab. angulo .fgb. sub angulo quidem .hab. spectatur <magnitudo .bc.> ab oculo in .a. existente

117 **.acb.,** .abc. *SO*
118 **propositionem,** suppositionem *SO*

Desloque-se [o olho] para D. Ligue-se C a A, C a B, C a H, D a H, D a B e D a A. Uma vez que o visível AH é perpendicular ao plano subjacente e o olho se desloca na circunferência do círculo que tem por centro H, em torno do qual o olho gira, então, pela trigésima nona [proposição deste tratado], o visível AH observa-se sempre igual. Então, os ângulos ADH e ACH são iguais, pela conversa da sexta suposição deste [tratado]. Pela mesma trigésima nona [este tratado] e pela conversa da sexta suposição deste [tratado], os ângulos BCH e BDH são iguais. Subtraídos estes dos anteriores, os restantes ângulos ADB e ACB serão iguais, pela terceira noção comum. Mas é sob eles que se vê AB. Então, pela sexta suposição, ao deslocar-se o olho na circunferência do círculo CFED, AB aparece sempre igual. O que se quis provar.

Teorema quadragésimo terceiro. *Existe um lugar onde, deslocando-se o olho e permanecendo imóvel o visível, o visível aparece desigual.*

[Fig. 93] | Seja BC uma grandeza e A o olho. Prolongue-se BC continuamente a direito até D. Ligue-se A a B, A a D e A a C. Descreva-se um círculo em torno do triângulo BAD, pela quinta proposição do quarto [livro dos *Elementos*].

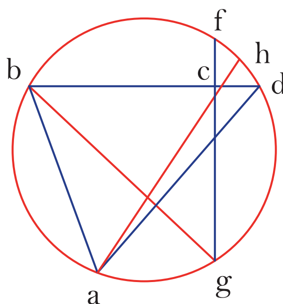


Fig. 93

Afirmo que se o olho se mover na circunferência BAD, BC se observa continuamente diferente.

Mova-se, por exemplo, para G. Ligue-se G a B e G a C. Prolongue-se AC e GC, até que encontrem a circunferência do círculo: AC, em H, e GC, em F. Estas duas linhas AC e GC, prolongadas assim, intersectar-se-ão; caso contrário, AC e GC constituiriam uma e a mesma linha reta; o que é o contrário do que se pôs. Por isso, o ponto H cairá entre os pontos F e D, e a circunferência BH será maior do que a circunferência BF. Mas, pela trigésima terceira do sexto dos *Elementos*, a razão das circunferências e a [razão] dos ângulos nelas traçados, quer ao centro, quer na circunferência, é igual. Então, o ângulo HAB é maior do que o ângulo FGB. Ora, é sob o ângulo HAB que se observa a grandeza BC a partir do olho [que está situado] em

sub angulo vero .fgb. eadem .bc.[119] magnitudo spectatur dum oculus est in .g. in .a. igitur maior spectatur .bc. quam in .g. et sic continuo minor spectabitur mouendo oculum ad partes .d. maior autem mouendo ad partes .b. continuo igitur inaequaliter spectatur quod erat probandum.

Aliter idem ostenditur et facilius.
Sit vt prius magnitudo visilis .ab. oculus autem .c. connectantur | .ac. .bc.[120] producaturque .ac. in continuum rectumque in infinitum. [S58v]

Dico quod si oculus moueatur per illam lineam .ba. continuo inaequalem apparere.

Moueatur gratia exempli in .g. (eodem enim modo probabitur vbicunque ponatur) et connectantur .gb. quoniam itaque triangulus est .gbc. cuius vnum latus .gc. producitur ergo per decimam sextam primi elementorum, maior est exterior angulus .bca. interiori et sibi opposito .bgc. sub .bca. videtur .ba. quando oculus est in .c. sub .bgc. autem quando oculus est in .g. per quartam igitur suppositionem maior spectatur in .c. quam in .g. quare inaequaliter sicque continuo oculo moto ad partes .g. semper | remouendo minor spectatur. ad <partes .a.> approximando maior. Igitur locus est in quo oculo permutato visilique permanente inaequaliter visile .ab. apparet. quod fuit ostendendum. [O56r]

Theorema quadragesimum quartum. *Idem contingit et si parallela[121] fuerit linea ipsi spectatae magnitudini in qua oculus permutatur.*
Sit magnitudo .bc. quecumque cui sit .ag. parallela[122] diuidatur .cb.[123] bifariam per decimam primi elementorum in signo .h. ab .h. signo excitetur perpendicularis super .cb. per vndecimam primi producatur quousque secet .ag. (secabit enim cum sint .bc. .ag. parallele quare in eodem plano et perpendicularis super alteram per vigesimam nonam primi elementorum) Sit ergo punctus sectionis .a. connectantur .ab. .ac.

---

119 **eadem .bc.,** eadem .ab. *SO*
120 **.bc.,** .ab. *SO*
121 **parallela,** parallelus *SO*
122 **parallela,** parallele *S,* parallelae *O*
123 **.cb.,** .ab. *SO*

A, e é sob o ângulo FGB que se observa a mesma grandeza BC quando o olho está em G. Então, BC observa-se maior em A do que em G. Assim, ver-se-á continuamente menor, movendo-se o olho para o lado de D, e continuamente maior, movendo-o para o lado de B. Então, vê-se continuamente diferente. O que se queria provar.

Mostra-se o mesmo de outra maneira e mais facilmente.
[Figs. 94 e 95] | Seja AB a grandeza visível, como anteriormente, e C, o olho. Ligue-se A a C e B a C. Prolongue-se AC continuamente a direito e infinitamente.

Fig. 94

Fig. 95

Afirmo que, se o olho se mover naquela linha, BA aparece continuamente diferente.

Mova-se, por exemplo, para G (provar-se-á do mesmo modo, onde quer que se coloque o olho). Ligue-se G a B. Uma vez que GBC é um triângulo, e GC é o prolongamento de um dos seus lados, então, pela décima sexta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo externo BCA é maior do que o interior e oposto BGC. Sob BCA, vê-se BA quando o olho está em C; sob BGC, [vê-se BA] quando o olho está em G. Então, pela quarta suposição [deste tratado], [BA] vê-se maior em C do que em G. Por esta razão, [vê-se] diferente. Assim, movendo-se o olho para o lado de G, e afastando-o sem parar, [AB] vê-se continuamente menor; ao aproximá-lo para o lado de A, [AB] vê-se [continuamente] maior. Então, existe um lugar onde, deslocando-se o olho e permanecendo imóvel o visível, o visível AB aparece diferente. O que se quis provar.

Teorema quadragésimo quarto. *O mesmo sucede ainda que a linha na qual o olho se desloca seja paralela à grandeza observada.*
[Fig. 96] | Seja BC uma grandeza qualquer, à qual seja paralela AG. Bissete-se BC no ponto H, pela décima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Do ponto H, levante-se uma perpendicular a BC, pela undécima do primeiro, e seja prolongada até cortar AG (cortá-la-á, porque BC e AG são paralelas – e por isso estão no mesmo plano, e ela [também é] perpendicular à segunda delas, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*). Seja A o ponto de interseção. Ligue-se A a B e A a C.

eritque triangulus circum quem per quintam quarti describatur circulus transibitque .ha. per corrogatum primae tertii elementorum per centrum circuli illius. Cum itaque in parallelas .bc. .ag. cadit recta linea .ah. erunt per vigesimam | nonam primi elementorum anguli .bha. .hag. duobus rectis aequales, est autem angulus .bha rectus, quare et reliquus .hag. rectus et ob id per decimam sextam tertii elementorum .ga. contingit circulum, moueaturque continuo oculus in .ga. recta linea. [S59r]

Dico quod .bc. continuo inaequaliter spectatur.

Moueatur in .d. a puncto .a. quod erit extra circulum. cum contingit .ga. tantum in puncto .a. connectantur .bd. .dc. secabit vtraque circulum. Sit punctus sectionis .cd. cum circulo .f. connectantur .bf. signa. quoniam ergo trigonus est .bdf. cuius vnum latus .df. producitur in continuum et directum. ergo per decimam sextam primi elementorum angulus .bfc. angulo .bdf. siue .bdc. maior est. Sunt autem per vigesimam septimam tertii anguli .bfc. .bac. adinuicem aequales, angulus ergo .bdc. sub quo videtur .bc. quando oculus et in .d. minor est angulo .bac sub quo videtur| [O56v] .bc. quando oculus est in .a. maiorque spectatur .bc. in .a. quam in .d. per quartam suppositionem.

Dico consimiliter quod si remotius ponatur oculus vt in .e. quod inaequaliter spectatur in .e. et in .d. Connectantur enim .eb. .ec. ipsique .cd. per trigesimam primam primi per .b. signum parallela[124] ducatur quae sit .bk. et per eandem tertii. per idem signum .b. parallela ducatur ipsi .ce. quae sit .bg. parallelograma igitur sunt .bc. .kd .bc. .eg. Estque per trigesimam quartam primi elementorum bis repetitam .bc. equalis ipsi .kd. et similiter ipsi .ge. et per primam communem sententiam .ge. .kd. adinuicem aequalis. Sunt autem in eadem recta linea .ga. ergo per quartam huius inaequaliter spectatur et .ge. quoniam remotior spectatur minor quam .kd. et od id per conuersam sextae suppositionis huius minor est angulus .gbe. an|gulo .kbd. Quoniam vero in parallelas rectas lineas .kb. .dc.[125] [S59v]

---

124 **parallela,** parallelae *SO*
125 **.kb. .dc.,** .bc. .kd. *SO*

[ABC] será um triângulo. Descreva-se um círculo em torno dele, pela quinta do quarto. Pelo corrogado da primeira do terceiro dos *Elementos*, HA passará pelo centro daquele círculo. Uma vez que a linha reta AH cai nas paralelas BC e AG, [então,] pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*, os ângulos BHA e HAG serão iguais a dois retos. Mas o ângulo BHA é reto; por esta razão, também o restante HAG é reto. Por isso, pela décima sexta do terceiro dos *Elementos*, GA é tangente ao círculo. Mova-se continuamente o olho na linha reta GA.

Fig. 96

Afirmo que BC se observa continuamente diferente.

Mova-se [o olho] do ponto A para D, que estará fora do círculo, uma vez que GA é tangente [ao círculo] apenas no ponto A. Ligue-se B a D e D a C. Ambas estas linhas cortarão o círculo. Seja F o ponto de interseção de CD com o círculo. Ligue-se os pontos B e F. Uma vez que BDF é um triângulo com lado DF prolongado continuamente a direito, então, pela décima sexta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo BFC é maior do que o ângulo BDF, ou BDC. Mas os ângulos BFC e BAC são iguais, pela vigésima sétima do terceiro. Então, o ângulo BDC, sob o qual se vê BC quando o olho está em D, é menor do que o ângulo BAC, sob o qual se vê BC quando o olho está em A, e BC vê-se maior em A do que em D, pela quarta suposição [deste tratado].

Da mesma forma, afirmo que, se se colocar o olho mais afastado, como em E, [BC] se observa desigual em E e em D. Ligue-se E a B e E a C. Pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], trace-se uma paralela a CD, pelo ponto B; seja BK. Pela mesma [proposição] do terceiro, pelo mesmo ponto B, trace-se uma paralela a CE, seja BG. Então BCKD e BCEG são paralelogramos. Pela trigésima quarta do primeiro dos *Elementos* duas vezes tomada, BC é igual a KD, e, da mesma maneira, a GE. Pela primeira noção comum, GE é igual a KD. Mas estão na mesma linha reta GA. Então, pela quarta [proposição] deste [tratado], [GE e KD] vêem-se desiguais, e GE, porque mais afastado, vê-se menor do que KD. Por isso, pela conversa da sexta suposição deste [tratado], o ângulo GBE é menor do que o ângulo KBD. Ora, uma vez que a linha reta BD cai nas linhas retas parale-

recta incidit linea .bd. erunt per vigesimam nonam primi anguli alternati .kbd. .bdc. adinuicem aequales. Sed minor est angulus .gbe. quam .kbd. ergo et .bec. angulus qui est aequalis angulo .gbe. minorem angulo .bdc. aequali angulo .kbd. et ob id .bc. minor spectatur oculo in .e. existente quam in .d. quod fuit ostendendum. Et sic ostendes quod si oculus continuo moueatur versus partes .g. spectabitur .bc. minor, moto rursus oculo .a. ad partes .a. spectabitur continuo maior.

Theorema quadragesimum quintum. *Est aliquis locus in quo aequales magnitudines inaequales apparent.*

Sint .ab. .bc. magnitudines aequales diuidaturque .bc. bifariam in .e. per decimam primi centro itaque .e. interuallo .be. siue .ec. per tertium postulatum circulus describatur qui .bdc. ponaturque oculus in .d. signo cicunferentiae.

Dico tunc .ab. .bc. | inaequaliter spectari. [O57r]

Connectantur enim .ad. .db. .dc. Cumque angulus .bdc. angulus sit in semicirculo per trigesimam primam tertii elementorum rectus est. Est autem angulus .adb. minor angulo .bdc. alias enim rectus esset aut recto maior. quod si primum per decimam quartam primi elementorum .adc. esset recta linea et ob id duae rectae lineae .adc. .abc. superficiem concluderent quod est contra decimam suppositionem elementorum. Si secundum cum .adc. sit triangulus erit vnus eius angulus .adc. maior duobus rectis quare trianguli tres anguli maiores erunt duobus rectis quod est contra trigesimam secundam primi elementorum relinquitur ergo angulus .adb. minor recto et angulo .bdc.[126] Sub angulis | autem .adb. .bdc. spectatur .ab. .bc. [S60r] aequales magnitudines ergo per quartam et quintam suppositiones inaequales spectantur inuentusque est locus .d. in quo etc.

---

126 **.bdc.,** .bac. *SO*

las KB e DC, os ângulos alternados KBD e BDC serão iguais, pela vigésima nona do primeiro. Mas o ângulo GBE é menor do que o ângulo KBD; logo, também o ângulo BEC, que é igual ao ângulo GBE, é menor do que o ângulo BDC, igual [por sua vez] ao ângulo KBD. Por isso, BC observa-se menor a partir do olho situado em E do que a partir do olho situado em D. O que se quis mostrar. Assim mostrarás que, se o olho se mover continuamente para o lado de G, BC ver-se-á menor; se o olho A se mover para o lado de A, ver-se-á continuamente maior.

Teorema quadragésimo quinto. *Existe um lugar onde grandezas iguais aparecem desiguais.*

[Fig. 97] | Sejam AB e BC grandezas iguais. Bissete-se BC em E, pela décima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Descreva-se o círculo BDC com centro E e raio BE, ou EC, pelo terceiro postulado. Ponha-se o olho no ponto D da circunferência.

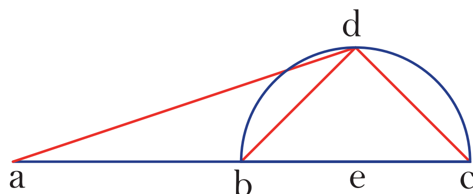


Fig. 97

Afirmo que AB e BC se observam desiguais.

Ligue-se A a D, D a B e D a C. Uma vez que o ângulo BDC é um ângulo de semicírculo, ele é reto, pela trigésima primeira do terceiro dos *Elementos*. Mas o ângulo ADB é menor do que o ângulo BDC, caso contrário, ele seria reto ou maior do que um reto. No primeiro caso, pela décima quarta do primeiro dos *Elementos*, ADC seria uma linha reta, e, por isso, as duas linhas retas ADC e ABC encerrariam uma superfície, o que é contra a décima suposição dos *Elementos*. No segundo caso, como ADC é um triângulo, um dos seus ângulos, ADC, será maior do que dois retos; por esta razão, os três ângulos do triângulo serão maiores do que dois retos, o que é contra a trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*. Resta, pois, que o ângulo ADB é menor do que um reto e do que o ângulo BDC. Mas sob os ângulos ADB e BDC vêem-se as grandezas iguais AB e BC; logo, pela quarta e pela quinta suposição, observam-se desiguais; e foi descoberto o lugar D onde etc.

Aliter.
Sint .ab. .dc. aequales magnitudines perpendiculares[127] eidem plano connectanturque .ac. signa et a signo .c. excitetur perpendicularis .ce. super planum .dc. .ab. per duodecimam, vndecimi ponaturque oculus in .e.

Dico .ab. .dc. inaequales spectari.

Connectantur enim .ae. eritque triangulus cuius angulus .eca. rectus est per definitionem perpendicularis. quare maior angulo .cae. vel angulo .cea. per trigesimam secundam primi. At maiori angulo maius latus subtenditur per decimam nonam eiusdem primi. maius itaque est latus .ae. quam latus .ac. magisque distat .ab. quam .cd. quare per quintam huius .dc. maior apparebit quam .ab. inaequaliter igitur spectatur. Datus ergo est locus .e. in quo aequales magnitudines .ab.cd. inaequaliter spectantur quod fuit faciendum.

Theorema quadragesimum sextum. *Est aliquis locus communis in quo inaequales magnitudines aequales apparent.*
Sint .ab. .bc. inaequales magnitudines positae in recta linea .ac.[128] Sit alia recta linea .de. minor ipsa .ab. fiatque per | vndecimam sexti. sicut .ab. ad .bc. ita .ed. ad .df. com- [O57v] prehendant autem .ed. .df. angulum et connectantur .ef. signa eritque triangulus .edf. Ad rectam vero lineam .ac. ad signumque eius .a. per vigesimam tertiam primi elementorum angulo .def. aequalis ponatur .bag. per secundam autem eiusdem primi ponatur .ag. aequalis ipsi .de. et .ah. ipsi .ef. cum enim .ab. maior sit quam .bc. etiam erit .ed. maior quam .df.[129] quare a fortiori .df.[130] minor est quam .ab. et .connectantur .gh. | signa [S60v] eritque per quartam primi elementorum .hg. aequalis ipsi .df. per trigesimam primam eiusdem primi ad signum .c. ponatur parallela ipsi .hg. quae sit .ck. per vigesimam

127 **perpendiculares,** perpendicularis *SO*
128 **.ac.,** .ec. *SO*
129 **.df.,** .ef. *SO*
130 **.df.,** .ef. *SO*

De outra maneira.

[Fig. 98] | Sejam AB e DC grandezas iguais perpendiculares ao mesmo plano. Liguem-se os pontos A e C. Do ponto C, levante-se CE perpendicular no plano DCAB, pela duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Ponha-se o olho em E.

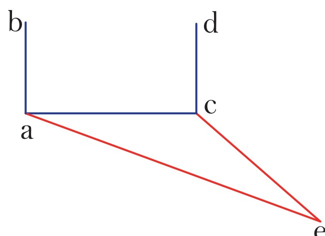


Fig. 98

Afirmo que AB e DC se veem desiguais.

Ligue-se A a E. [AEC] será um triângulo cujo ângulo ECA é reto, pela definição de perpendicular. Por esta razão, [ECA] é maior do que o ângulo CAE ou do que o ângulo CEA, pela trigésima segunda do primeiro. Mas o lado maior é subtenso pelo ângulo maior, pela décima nona do mesmo primeiro. Então, o lado AE é maior do que o lado AC, e AB está mais distante do que CD. Por esta razão, pela quinta [proposição] deste [tratado], DC aparecerá maior do que AB; portanto, vê-se desigual. Então foi dado um lugar E onde as grandezas iguais AB e CD se veem desiguais. O que se quis fazer.

Teorema quadragésimo sexto. *Existe um lugar em comum no qual grandezas desiguais aparecem iguais.*

[Figs. 99 e 100] | Sejam AB e BC grandezas desiguais postas numa linha reta AC. Seja uma outra linha reta DE, menor do que AB. Faça-se, pela undécima [proposição] do sexto [livro dos *Elementos*] AB:BC=ED:DF. Que ED e DF compreendam um ângulo. Liguem-se os pontos E e F. EDF será um triângulo. Pela vigésima terceira do primeiro dos *Elementos*, na linha reta AC, e no seu ponto A, ponha-se o ângulo BAG igual ao ângulo DEF. Pela segunda do mesmo primeiro, ponha-se AG igual a DE e AH igual a EF. Uma vez que AB é maior do que BC[31], ED também será maior do que DF; portanto, *a fortiori*, DF é menor do que AB. Liguem-se os pontos G e H. Pela quarta do primeiro dos *Elementos*, HG será igual a DF. Pela trigésima primeira do mesmo primeiro, ponha-se uma paralela a HG no ponto C, seja CK. Então, pela

31 Este é um pressuposto que não foi explicitado até este momento da prova.

nonam[131] igitur eiusdem angulus .ahg. aequalis erit angulo .ack. in parallelas enim .hg. .ck. recta incidit linea .ac. quoniam vero .hag. .ahg. sunt duo anguli trianguli .ahg. erunt ipsi per decimam septimam primi minores duobus rectis. Suntque anguli .hag. .ack. illis aequales vt iam probatum est. illi ergo etiam erunt minores duobus rectis. quare per quintum postulatum .ag. .ck. productae tandem concurrunt. Sit concursus in .k. signo et connectantur .kb.

Dico tunc quod oculo posito in .k. .ab. .bc. inaequales magnitudines aequales apparent. quod sic patet. Quoniam .ag. .ed. aequales posite sunt. et .ah. ipsi .ef. etiam aequalis posita est angulusque ad .a. signum angulo .def. per quartam primi vt iam probatum est. erunt bases .hg. .df. aequales, et angulus .d. angulo .g. et angulus ad .f.[132] angulo ad .h.[133] Sunt ergo trianguli .ahg. .edf. aequianguli per quartam ergo. sexti. elementorum sicut .de. ad .df. ita .ag. ad .gh. Sed sicut .ed. ad .df. ita erat .ab. ad .bc. ergo per vndecimam quinti sicut .ag. ad .gh. ita .ab. ad .bc. quoniam vero .hg. .kc. parallelae sunt et in eas incidit recta linea .agk. erit per vigesimam nonam[134] primi elementorum angulus .agh. aequalis angulo .akc. probati etiam sunt duo anguli .ahg. .ack. aequales, estque .cag. communis. sunt ergo .ahg. .ack. triangula aequiangula. ob id per quartam sexti elementorum proportionalia | habent latera quae circum [O58r] aequales angulos sicut igitur .ag. <ad> .gh. sic .ak. ad .kc. sicut autem .ag. ad .gh. ita probata est .ab. ad .bc. sicut igi|tur per vndecimam quinti .ak. ad .kc. ita .ab. ad .bc. [S61r] Quoniam vero .kb. secat lineam .ac.[135] in .b. et basis segmenta .ab. .bc. probata sunt habere eandem rationem quam reliqua ipsius trianguli latera ergo per secundam partem tertiae[136] sexti elementorum. angulus. .cka. bifariam diuiditur. et proinde anguli .akb. .bkc. aequales sunt. Sub illisque spectantur .ab. .bc. (est enim oculus in .k.) ergo per sextam suppositionem huius .ab. .bc. aequales spectantur quod erat ostendendum.

---

131 **nonam,** octauam *SO*
132 **ad .f.,** .edf. *SO*
133 **ad .h., adh.** *SO*
134 **nonam,** octauam *SO*
135 **.ac.,** .ab. *SO*
136 **tertiae,** tertiam *SO*

vigésima nona do mesmo, o ângulo AHG será igual ao ângulo ACK, pois a linha reta AC cai nas paralelas HG e CK. Mas, uma vez que HAG e AHG são dois ângulos do triângulo AHG, [então,] pela décima sétima do primeiro, eles serão menores do que dois retos. Os ângulos HAG e ACK são iguais àqueles, como já se provou. Então, também estes são menores do que dois retos. Por esta razão, pelo quinto postulado, AG e CK, prolongadas, são concorrentes. Seja o concurso no ponto K. Ligue-se K a B.

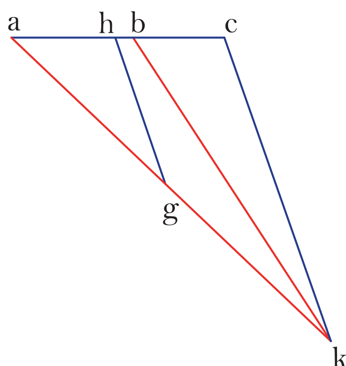


Fig. 99

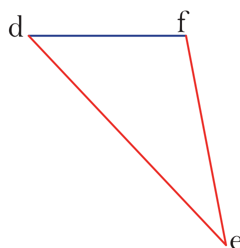


Fig. 100

Afirmo então que se se colocar o olho em K, as grandezas desiguais AB e BC aparecem iguais. O que fica claro assim. Uma vez que AG e ED se puseram iguais, e AH também se pôs igual a EF, e o ângulo no ponto A, [se pôs igual] ao ângulo DEF, [então,] pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], como já se provou, as bases HG e DF serão iguais, e o ângulo em D [será igual] ao ângulo em G, e o ângulo em F [será igual] ao ângulo em H. Então, os triângulos AHG e EDF são equiângulos. Portanto, pela quarta do sexto dos *Elementos*, DE:DF=AG:GH. Mas ED:DF=AB:BC; logo, pela undécima do quinto, AG:GH=AB:BC. Mas, uma vez que HG e KC são paralelas e nelas cai a linha reta AGK, então o ângulo AGH será igual ao ângulo AKC, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*. Também se provou que os dois ângulos AHG e ACK são iguais. CAG é comum. Então, os triângulos AHG e ACK são equiângulos. Por isso, pela quarta do sexto dos *Elementos*, têm os lados que compreendem os ângulos iguais proporcionais; logo, AG:GH=AK:KC. Mas AG:GH=AB:BC, como se provou; logo, pela undécima do quinto, AK:KC=AB:BC. Mas, uma vez que KB corta a linha AC em B, e se provou que os segmentos AB e BC da base têm a mesma razão que os restantes lados do triângulo, então, pela segunda parte da terceira do sexto dos *Elementos*, o ângulo CKA é bissetado. Consequentemente, os ângulos AKB e BKC são iguais. Mas é sob eles que se vê AB e BC (pois o olho está em K); logo, pela sexta suposição deste, AB e BC vêem-se iguais. O que se queria mostrar.

Idem contingit si parallelae sunt magnitudines illae inaequales quod scilicet est locus in quo aequales appareant.
Sint .ab. .cd. inaequales magnitudines parallelae perpendiculares ad subiectum planum quodcunque connectantur .bd. Sit alia linea .fg.[137] quecunque minor tamen ipsa .ab. sicutque .cd. ad .ab. ita fiat .fh.[138] ad .gf. per vndecimam sexti, eritque euersim .ab. ad .cd. sicut .gf. ad .fh. per corrogatum <ad> decimam nonam quinti et comprehendant .gf. .fh. angulum

Connectantur demum .gh. signa. Ad lineam autem .bd. ad signumque in ea .b.[139] dato angulo .fgh. aequalis ponatur qui sit .dbk. per vigesimam tertiam primi elementorum in superficie illa ad quam .ab. .cd. perpendiculares sunt et abscindatur a .bk. linea in infinitum producta ipsi .gf. aequalis quae sit .bl. per tertiam eiusdem primi et per eandem a linea .bd. quae maior est linea .gh. aequalis ipsi .gh. abscindatur, que sit .bm. reliqua ergo .ml. per quartam primi elementorum reliquae .fh. aequalis erit, et angulus .gfh. angulo .blm. et angulus .bml. angulo .fhg. Sunt igitur .fhg. .bml. aequiangula. quare per quartam sexti elementorum latera habent proportionalia et sicut | .fg. ad .fh. ita .bl. ad .lm. | sed .gf. ad .fh. probata est sicut .ab. ad .cd. ergo per vndecimam quinti .bl. ad .lm. est sicut .ab. ad .cd. Ad signum autem .d. parallela ponatur .ml. per trigesimam primam primi in plano .blm. producto sitque .dk. et concurret .bl. producta, cum .dk. vt in precedenti demonstratione ostensum est. Cum igitur parallelae sint .ml. .dk. et in eas cadat recta linea .bk. per vigesimam nonam primi elementorum anguli .blm. .lkd. aequales sunt per eandem vigesimam [S61v] [O58v]

137 **.fg.,** .hg. *SO*
138 **.fh.,** .gh. *SO*
139 **.b.,** .k. *SO*

O mesmo sucede se as grandezas desiguais forem paralelas, ou seja, que há um lugar onde aparecem iguais.

[Figs. 101 e 102] | Sejam AB e CD grandezas paralelas desiguais perpendiculares a um plano subjacente qualquer. Ligue-se B a D. Seja outra linha qualquer FG, mas menor do que DB. Faça-se CD:AB=FH:GF, pela undécima [proposição] do sexto [livro dos *Elementos*]. Será, *invertendo*, AB:CD=GF:FH, pelo corrogado à décima nona do quinto. Que GF e FH compreendam um ângulo.

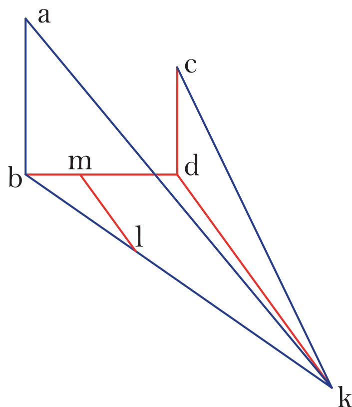


Fig. 101

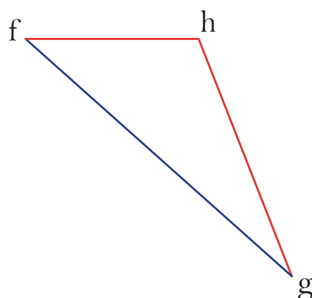


Fig. 102

Liguem-se, por fim, os pontos G e H. Naquela superfície à qual são perpendiculares AB e CD, na linha BD, e no seu ponto B, ponha-se um ângulo igual ao ângulo dado FGH, pela vigésima terceira do primeiro dos *Elementos*, seja DBK. Pela terceira do mesmo primeiro, corte-se, da linha BK, prolongada infinitamente, uma linha igual a GF, seja BL. Pela mesma [proposição], da linha BD, que é maior do que a linha GH[32], corte-se uma [linha] igual a GH, seja BM. Então, pela quarta do primeiro dos *Elementos*, a restante ML será igual à restante FH, e o ângulo GFH ao ângulo BLM, e o ângulo BML ao ângulo FHG. Então, FHG e BML são equiângulos. Por esta razão, pela quarta do sexto dos *Elementos*, têm os lados proporcionais, e FG:FH=BL:LM. Mas provou-se que GF:FH=AB:CD; logo, pela undécima do quinto, BL:LM=AB:CD. No ponto D ponha-se uma paralela a ML, pela trigésima primeira do primeiro, no plano BLM, prolongado. Seja DK. Que o prolongamento de BL seja concorrente com DK, como se mostrou na demonstração anterior. Como ML e DK são paralelas e nelas cai a linha reta BK, então, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*, os ângulos BLM e LKD são iguais. Pela mesma vigésima

32 Tal como na demonstração anterior, este é um pressuposto que não foi explicitado até este momento da prova.

nonam anguli .bml. .mdk. aequales sunt. estque .mbl. vtrique triangulo .mbl. .bdk. communis, aequiangula igitur sunt triangula .mbl. .bdk. Eadem est ergo proportio .bl. ad .lm. quae .bk. ad .kd. sed sicut .bl. ad .lm. sic probata est .ab. ad .cd. ergo per 11.^{am} quinti .bk. ad .kd.[140] sicut .ab. ad .cd. permutatim itaque per 16.^{am} eiusdem .ab. ad .bk. sicut .cd. ad .dk. Est autem angulus .abk. aequalis angulo .cdk. vterque enim rectus per 2.^{am} definitionem 11.^{mi} quare per sextam sexti elementorum triangula .abk. .cdk. aequales habebunt angulos sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur. quare erit angulus .akb. aequalis angulo .ckd. Sub illis autem spectantur .ab.cd. inaequales[141] ergo per sextam suppositionem aequales spectantur. quod fuit probandum.

Theorema quadragesimum septimum. *Aliqui sunt loci in quibus bine magnitudines inaequales in idem compositae vtrique inaequalium aequales apparent.*
Sint .ab. .bc. inaequales magnitudines in idem compositae describaturque super vtramque illarum semicirculi vtraque diuisa bifariam et per tertium postulatum super .ab. quidem descriptus sit .afb. semicirculus super .bc. | autem sit .bgc. descri- [S62r]
batur etiam super tota .abc. semicirculus qui sit .akc. sintque .f. .k. .g. diuersa signa a signis .a. .b. .c. .k. in circunferentia .ac.f. in circunferentia .ab.g. in circunferentia .bc. connectantur .ak. .kc. .af. .fb. .bg. .gc. | [O59r]

Dico tunc quod si oculus ponatur in .k. et in .f. signis quod tota .ac. aequalis spectabitur ipsi .ab. Si autem in .k. et .g. .ac. aequalis spectabitur ipsi .bc. per trigesimam primam enim tertii elementorum .afb. .akc. sunt recti quare per quartum postulatum aequales sed sub illis videntur .ab. .ac. oculo existente in .k. et .f. ergo per sextam suppositionem .ab. .ac. aequales spectantur. quod est primum.

140 **.kd.,** .ld. *SO*
141 **inaequales,** inaequalis *SO*

nona, os ângulos BML e MDK são iguais. [O ângulo] MBL é comum a ambos os triângulos MBL e BDK. Então, os triângulos MBL e BDK são equiângulos. Portanto, BL:LM=BK:KD. Mas provou-se que BL:LM=AB:CD; logo, pela décima primeira do quinto, BK:KD=AB:CD. Assim, *permutando*, pela décima sexta do mesmo, AB:BK=CD:DK[33]. Mas o ângulo ABK é igual ao ângulo CDK, pois ambos são retos, pela segunda definição do décimo primeiro. Por esta razão, pela sexta do sexto dos *Elementos*, os triângulos ABK e CDK terão os ângulos iguais, sob os quais os lados com a mesma razão são subtensos. Por esta razão, o ângulo AKB será igual ao ângulo CKD. Mas é sob estes que se vê AB e CD. Logo, desiguais vêem-se iguais, pela sexta suposição. O que se quis provar.

Teorema quadragésimo sétimo. *Há lugares nos quais duas grandezas desiguais compostas numa só aparecem iguais a cada uma das desiguais.*

[Fig. 103] | Sejam AB e BC grandezas desiguais compostas numa. Descrevam-se semicírculos em torno de cada uma delas. Bissectem-se ambas. Pelo terceiro postulado, descreva-se o semicírculo AFB em torno de AB, e [o círculo] BGC em torno de BC. Descreva-se também um semicírculo em torno de toda a ABC, seja AKC. Sejam F, K e G pontos distintos dos pontos A, B e C; K, na circunferência AC; F, na circunferência AB; G, na circunferência BC. Ligue-se A a K, K a C, A a F, F a B, B a G e G a C.

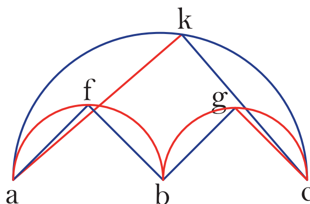


Fig. 103

Afirmo então que, se se puser o olho nos pontos K e F, toda a AC se verá igual a AB; se se puser [o olho] em K e G, que AC se verá igual a BC. Pela trigésima primeira do terceiro dos *Elementos*, [os ângulos] AFB e AKC são retos. Por esta razão, pelo quarto postulado, são iguais. Mas é sob eles que se veem AB e AC quando o olho está em K e F; logo, pela sexta suposição, AB e AC vêem-se iguais. O que é o primeiro [desiderato].

33 Em rigor, Melo alterna e inverte: BK:KD=AB:CD, logo BK:AB=KD:CD (*alternando*); BK:AB=KD:CD, logo, AB:BK=CD:KD (*invertendo*).

Per idem erunt ambo anguli .akc. .bgc. recti, et ob hoc aequales, sub illis autem videntur .bc. .ac. oculo existente in .k. et in .g. ergo per sextam suppositionem aequales spectantur quod est secundum[142]. probata igitur est propositio[143].

Problema primum. Propositio 48. *Locos inuenire a quibus aequalis magnitudo dimidium apparet siue quarta pars, et vniuersaliter in data ratione in qua et angulus secatur.*

Sit magnitudo .ab.

Dico quod reperire est locus in quo dimidia apparet supra .ab.

Describatur semicirculus in quo sit angulus .acb. qui per trigesimam primam tertii erit rectus. Diuidatur ille bifariam per nonam primi elementorum et ponatur ipsi .ab. aequalis linea. quaecumque[144] .gd. ac[145] per trigesimam tertiam tertii Elementorum

---

142 **secundum,** primum *SO*
143 **propositio,** proposito *SO*
144 **quaecumque** *O***,** quicunque *S*
145 **ac,** .ac. *SO*

Pelo mesmo [raciocínio], ambos os ângulos AKC e BGC são retos e, por isso, iguais. Mas é sob eles que se veem BC e AC quando o olho está em K e em G; logo, pela sexta suposição, vêem-se iguais. O que é o segundo [desiderato]. Logo, foi provada a proposição.

Problema primeiro. Proposição quadragésima oitava. *Descobrir os lugares a partir dos quais uma grandeza aparece igual à sua metade, ou à quarta parte, e universalmente numa dada razão, na qual também se corta o ângulo.*

[Figs. 104-106] | Seja AB a grandeza [dada].

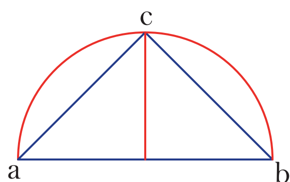


Fig. 104

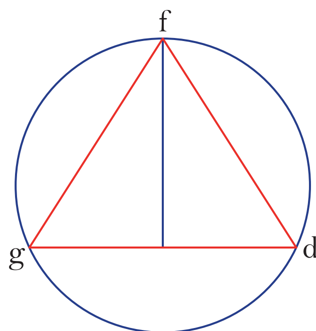


Fig. 105

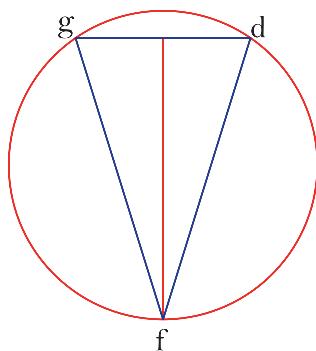


Fig. 106

Afirmo que é possível encontrar um lugar onde aparece como a sua metade.

Em torno de AB descreva-se um semicírculo no qual esteja o ângulo ACB, que será reto, pela trigésima primeira [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Seja ele bissetado, pela nona do primeiro dos *Elementos*. Ponha-se uma linha qualquer GD, igual a AB. Pela trigésima terceira do terceiro dos *Elementos*, em

super .gd. recta linea describatur portio circuli continens angulum aequalem angulo dato rectilineo dimidio scilicet ipsius .acb. sitque sectio illa .gfd.[146] angulus autem in illa contentus sit .gfd. qui ex hypotesi[147] aequalis erit angulo dato dimidio scilicet ipsius .acb. Positis igitur oculis in .c. et .f. si|gnis spectabitur .gd. in duplo minor ipsa .ab. duplo enim minori angulo spectatur. quanuis tamen aequales sint. [S62v]

Eodem modo ostendetur quod videbitur .gd. sicut quarta pars diuidendo scilicet angulum .gfd. in duo aequalia et operando vt prius consimiliter patet de octaua decima sexta. trigesima secunda. 64.ª et ita continuo in proportione dupla. Quoniam etiam ostendimus angulum rectum diuidi posse in tres partes aequales in trigesima secunda primi elementorum operando vt prius dabimus locos in quibus magnitudo spectetur vt tertia pars et proinde diuidendo vnumquemque eorum in duo aequalia | continuo videbitur vt sexta. vt duodecima. vt vigesima quarta. vt quadragesima octaua et ita continuo ascendendo. [O59v]

Theorema 48.ᵐ Propositio 49.ª *Equali celeritate delatorum in eademque recta linea existentium propinquum oculo postremum preire putabitur, permutatis autem precedens subsequi, et subsequens precedere putabitur.*
Sint .c. et .d. in eadem[148] recta linea .ae. moueanturque aequali celeritate .c. in .h. et .d. in .f.

146 **.gfd.,** .gdf. *SO*
147 **hypotesi,** hypotesim *SO*
148 **eadem,** eodem *SO*

torno da linha reta GD, descreva-se um arco de círculo contendo um ângulo igual a metade do ângulo retilíneo dado, ou seja, a metade de ACB. Seja aquele arco GFD, e seja GFD o ângulo nela contido. Por hipótese, ele será igual a metade do ângulo dado, ou seja, a metade de ACB. Então, colocados os olhos[34] nos pontos C e F, GD ver-se-á duas vezes menor do que AB, pois se vê num ângulo duas vezes menor, embora [ambas as grandezas] sejam iguais.

Do mesmo modo, mostrar-se-á que GD se verá como [se fosse] a quarta parte [de AB]; a saber, dividindo o ângulo GFD em dois iguais e procedendo como anteriormente. O mesmo fica claro a respeito da oitava [parte], e da décima sexta, e da trigésima segunda, e da sexagésima quarta e assim continuamente em proporção dupla. Uma vez que também mostrámos que o ângulo reto pode ser dividido em três partes iguais na trigésima segunda do primeiro dos *Elementos*, procedendo como anteriormente, daremos os lugares nos quais a grandeza se verá como a terça parte. Em consequência, dividindo cada um daqueles [ângulos] em dois iguais continuamente, ver-se-á [AB] como a sua sexta [parte], duodécima, vigésima quarta, quadragésima oitava e assim aumentando continuamente.

Teorema quadragésimo oitavo. Proposição quadragésima nona. *De objetos que se encontram na mesma linha reta e se movem com velocidade igual, julgar-se-á que o mais próximo do olho vai à frente do mais afastado; virando-se tudo ao contrário, julgar-se-á que o que ia à frente vai atrás e que o que ia atrás vai à frente.*

[Fig. 107] | Estejam C e D na mesma linha reta AE. Movam-se com igual velocidade: C para H, e D para F.

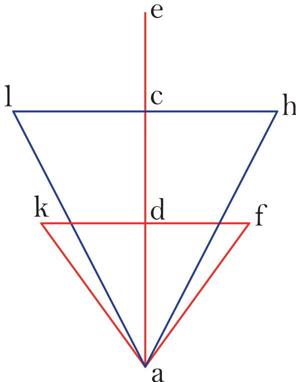


Fig. 107

34 Não «ambos os olhos», mas um olho em cada um dos dois pontos e em momentos diferentes.

Dico quod oculo in .a. posito .d. precedere putabitur .c. vero subsequi.

Quoniam enim per quartam huius ab oculo .a. minor spectatur .ch. quam .df. cum .c. et .d. in aequali tempore aequalia spacia pertranseant, erit per conuersam quintae suppositionis angulus .cah. minor angulo .daf. propior igitur est .ah. ad partes dexteras ipsi .ac. ad quam vtraque .ch. .df. perpendicularis est quam .af. est ergo .af. dexterior quam .ah. per dicta in duodecimo theoremate huius putabiturque ob hoc mobile .d. in signo .f. precedere mobile .c. in .h. signo. Eo conuerso si .c. moueatur in .l. et .d. in .k. ad partes sinistras .l. erit | sicut prius radius .ak. magis [S63r] sinister, et .al. magis dexter prius ergo apparebit .c. esse in signo .l. quam .d. in signo .k. et ob hoc .c. praeire putabitur et .d. subsequi. Quod erat ostendendum.

Theorema 49.m Propositio 50.[<a>] *Si aliquibus delatis et pluribus celeritate inaequali conferatur vero ad eadem et oculus <quae conferuntur> oculo quidem aeque celeriter delato stare quae vero tardius in contrarium ferri quae autem celerius precedere existimabuntur.*

Sint .abc. delata corpora et oculus .d. in eadem recta linea moueanturque ad easdem partes sed inaequaliter vt in dato tempore moueatur oculus .d. in .h. .a. autem mobile velocius in .e.[149] .b. eadem celeritate cum oculo in .f. et .c. tardius in .g. | [O60r]

Dico quod <ab> oculo .d. videbitur .b. stare .a. progredi et .c. regredi.

149 **.a. autem mobile velocius in .e.,** *rep. SO*

Afirmo que, posto o olho em A, se julgará que D vai à frente e C vai atrás.

Uma vez que CH se vê menor do que DF a partir do olho A, pela quarta deste [tratado] (como C e D percorrem distâncias iguais em tempo igual), [então,] o ângulo CAH será menor do que o ângulo DAF, pela conversa da quinta suposição. Portanto, do lado direito, AH está mais próximo de AC, à qual são perpendiculares CH e DF, do que AF. Então, AF é [um raio] mais à direita do que AH, pelo que ficou dito no décimo segundo teorema deste [tratado]. Por isso, julgar-se-á que o móvel D no ponto F está à frente do móvel C no ponto H. Tudo virado ao contrário, se C se mover para L, e D para K, no lado esquerdo de L; [então,] como anteriormente, o raio AK será [um raio] mais à esquerda e AL mais à direita. Logo, parecerá que C está no ponto L antes de D estar no ponto K. Por isso, julgar-se-á que C está à frente e D atrás. O que se queria mostrar.

Teorema quadragésimo nono. Proposição quinquagésima. *Se, deslocando-se alguns objetos, e vários com velocidades diferentes, o olho também se mover para o mesmo lado, os objetos que se movem à mesma velocidade que o olho parecerão permanecer imóveis; os mais lentos parecerão mover-se no sentido contrário, e os mais rápidos parecerão ir mais à frente.*

[Fig. 108] | Numa mesma linha reta, sejam A, B e C os corpos deslocados, e D o olho. Movam-se para o mesmo lado, mas com velocidades diferentes, de tal forma que, num dado tempo, o olho em D se mova para H, A [se mova] mais velozmente [do que o olho] para E, B [se mova] com a mesma velocidade que o olho para F, e C [se mova] mais lentamente [do que o olho] para G.

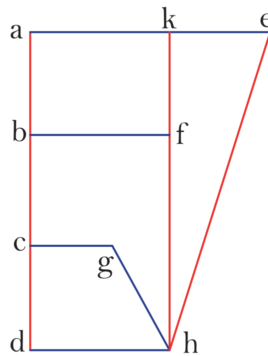


Fig. 108

Afirmo que, a partir do olho em D, se verá B permanecer no mesmo sítio, [se verá] A ir mais à frente, e [se verá] C ficar para trás.

Posito enim oculo .d. in signo .h. incidant radii .hf. .hg. .he. Et quoniam aequas et parallelas .bf. .dh. connectunt .bd. .fh. ergo per trigesimam tertiam primi .bd. .fh.[150] aequales et parallelae sunt non apparet igitur .b. ipsi oculo .d. magis dextrum vel sinistrum nec prius aut posterius quam .f. oculo .h. eundem enim angulum efficiunt in linea .dh. facientem interuallum prioris et posterioris. Igitur .f. videbitur quiescere.

Secet autem linea .hf. lineam .ae. in signo .k. aequales erunt .ak. .dh. sed maior est .ae. quam .dh. (maius enim ex hypotesi spacium pertransit .a. quam .d.) ergo etiam maior est .ae. quam .ak. Et proinde signum .e. et radius .he. prior erit quam .hk. ergo .a. cum prius esset simul cum oculo nunc vero praecedat positum in .e. videtur progredi. Eadem ratione .c. videtur regredi siue retrocedere. Si aliquibus ergo delatis et plu|ribus etc.[151] quod est propositum. [S63v]

Theorema quinquagesimum. *Si aliquibus delatis differat quippiam aliud non delatum, non delatum in contrarium ferri putabitur.*

Sit .a. oculus et .b. corpus quiescens, moueaturque .a. in .c.

Dico .b. apparere ferri in contrarium.

Ab oculo enim .c. emittatur radius .cd. parallelus ipsi .ab. per trigesimam primi et producatur .ac. in .e. procidatque radius .cb.

Igitur per vigesimam nonam primi anguli .dce. .bae. aequales sunt, quos efficiunt .ab. .cd. visus cum linea .ae. qua definitur prius et posterius. Quare neutrum prius apparet. altero neque .b. scilicet ipsi .a. neque .d. ipsi .c. Posterius autem apparet .b. quam .d. posteriore igitur radio .b. videtur quam .d. quare retroferri posterius enim quam prius videtur. Igitur si aliquibus delatis etc.

Hinc est quod nauigantibus et remigantibus in flumine videntur salices et alia huiuscemodi retrocedere.

150 **.bd. .fh.,** .bf. .dh. *SO*
151 **etc.,** rê *SO*

Posto o olho D no ponto H, incidam os raios HF, HG e HE. Uma vez que BD e FH ligam as linhas iguais e paralelas BF e DH, então, pela trigésima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], BD e FH são iguais e paralelas. Então, B não aparece ao olho em D mais à direita ou mais à esquerda, nem mais anterior ou posterior, do que F ao olho em H, pois fazem o mesmo ângulo na linha DH, e este tem a mesma abertura em relação ao anterior e ao posterior. Então, F parecerá estar quieto.

Que a linha HF corte a linha AE no ponto K. AK e DH serão iguais. Mas AE é maior do que DH (pois A percorre um espaço maior do que D, por hipótese); logo, AE também é maior do que AK. Em consequência, o ponto E e o raio HE será mais anterior do que HK. Então, A parece avançar, uma vez que antes estava a par com o olho e agora, posto em E, o precede. Pela mesma razão, C parece voltar para trás, ou retroceder. Então, deslocando-se alguns objetos, vários etc. O que se propôs.

Teorema quinquagésimo. *Deslocando-se algumas coisas e uma outra diferentemente não se mover, pensar-se-á que a que não se move se desloca no sentido contrário.*

[Fig. 109] | Seja A o olho e B o corpo em repouso. Que A se mova para C.

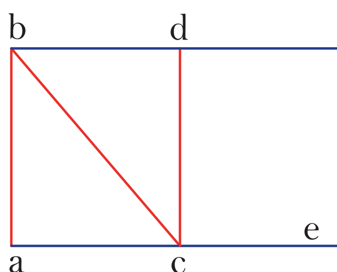


Fig. 109

Afirmo que B parece mover-se no sentido contrário.

Do olho em C, estenda-se o raio CD, paralelo a AB, pela trigésima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Prolongue-se AC para E. Estenda-se o raio CB.

Então, pela vigésima nona do primeiro, são iguais os ângulos DCE e BAE, que os raios visuais AB e CD fazem com a linha AE, na qual se determina o [que é] anterior e posterior. Por esta razão, nenhum aparece anterior ao outro; ou seja, nem B [parece anterior] a A, nem D [parece anterior] a C. Mas B aparece posterior a D; logo, B vê-se por um raio mais posterior do que D. Por esta razão, parece retroceder ficando mais posterior do que anterior. Logo, se, deslocando-se algumas coisas, etc.

Daqui resulta que as árvores e outras coisas do mesmo género parecem retroceder para os que navegam ou remam num rio.

| **Theorema quinquagesimum primum.** *Oculo prope spectatum accedente spectatum augeri putabitur.* [O60v]
Sit .ab. spectatum sitque oculus .e. a quo procidant radii .ae. .eb. ponaturque .cd. aequalis et parallela ipsi .ab. per trigesimam <primam> et secundam primi elementorum. taliter quod .c. sit punctum lineae .ae. Rursum ipsi lineae .ce. ponatur aequalis .af. per tertiam primi elementorum. Quoniam igitur angulus .baf. angulo .dce. aequalis est per vigesimam nonam primi elementorum et .ab. ipsi .cd. et .af. ipsi .ce. erit per quartam primi elementorum angulus .afb. aequalis angulo .ced. At angulus .ced. angulo .aeb. maior est | (per quartam enim huius .ab. minor spectatur [S64r] ipsa .cd.) ergo angulus .afb. maior est angulo .aeb. maior igitur videtur .ab. in .f. quam in .e. quod voluimus.

Vel breuius sic.
Magnitudo .ab. ad oculum .c. accedat in .de.

Teorema quinquagésimo primeiro. *Se o olho se aproximar do objeto observado, julgar-se-á que o objeto observado aumenta.*

[Fig. 110] | Seja AB o objeto observado. Seja E o olho. Dele, estendam-se os raios EA e EB. Ponha-se CD igual e paralela a AB, pela trigésima primeira e pela segunda [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], de tal forma que C seja um ponto da linha AE. Novamente, ponha-se a linha AF igual à linha CE, pela terceira do primeiro dos *Elementos*. Uma vez que o ângulo BAF é igual ao ângulo DCE, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*, e AB [é igual] a CD, e AF [é igual] a CE, [então,] pela quarta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo AFB é igual ao ângulo CED. Mas o ângulo CED é maior do que o ângulo AEB (pois, pela quarta deste [tratado], AB é observada menor do que CD); logo, o ângulo AFB é maior do que o ângulo AEB. Então, AB vê-se maior em F do que em E. O que queríamos [provar].

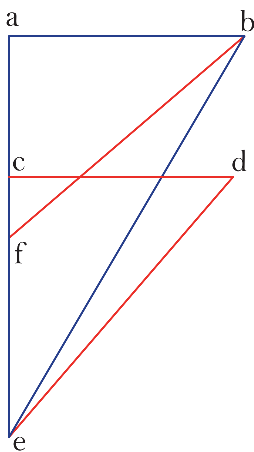


Fig. 110

Ou, de forma mais breve, assim:

[Fig. 111] | A grandeza AB aproxime-se do olho C, [deslocando-se] para DE.

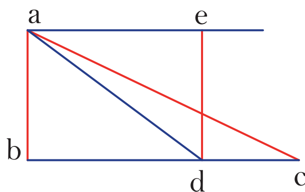


Fig. 111

Dico eam videri crescere.

Quoniam enim aequales magnitudines .ab. .de. sunt inaequaliter expositae .de. apparebit maior per quintam huius. Quare et .ab. cum ad .de. peruenerit maior apparebit. quam prius videtur ergo crescere quando ad oculum accedit. Quod est propositum.

Theorema quinquagesimum secundum. *Equali celeritate delatorum quae longius distant tardius ferri videntur.*

Sint .a. et .c. quae aequali celeritate deferantur .a. quidem in .b. .c. vero in .d. sitque oculus in puncto .e. a quo oculo plus distet .c. quam .a.

Dico quod .c. tardius ferri putabitur.

Quoniam enim .a. et .c. aeque velociter mouentur. aequalia spacia que sunt .ab. et .cd. eodem tempore pertransibunt. et quoniam .ab. propinquius sit visui videbitur. per quartam huius maior quam .cd. et per conuersam quartae suppositionis huius erit .aeb. angulus maior angulo .ced. Sed .a. delatum videtur quidem .ab. spacium pertransire .c. vero spacium .cd. et iam ostensum est .ab. spacium maius apparere oculo quam spacium .cd. .c. igitur minorem quantitatem videtur pertransire quam .a. tardius igitur videtur moueri.

Afirmo que ela parecerá aumentar.

Uma vez que as grandezas AB e DE se encontram a diferentes distâncias do olho, DE aparecerá maior, pela quinta [proposição] deste [tratado]. Por esta razão também AB, ao chegar a DE, aparecerá maior do que antes. Então parece aumentar quando se aproxima do olho. Que é o que se propôs [demonstrar].

Teorema quinquagésimo segundo. *De coisas deslocadas com igual velocidade, as que estão mais distantes parecem mover-se mais lentamente.*

[Fig. 112 e 113] | Sejam A e C os objetos deslocados com velocidade igual; A para B; C para D. Esteja o olho no ponto E. Esteja C mais distante do olho do que A.

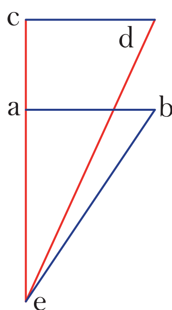


Fig. 112

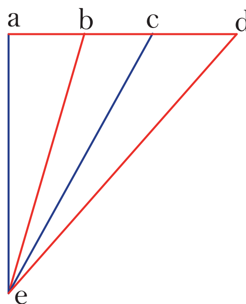


Fig. 113

Afirmo que se pensará que C se desloca mais lentamente.

Uma vez que A e C se movem à mesma velocidade, percorrerão no mesmo tempo espaços iguais, que são AB e CD. Como AB está mais próximo do rosto, [então,] pela quarta [proposição] deste [tratado], ver-se-á maior do que CD[35]. Pela conversa da quarta suposição deste, o ângulo AEB será maior do que o ângulo CED. Mas o objeto deslocado A parece percorrer o espaço AB, e C [parece percorrer] o espaço CD. Já se mostrou que o espaço AB aparece maior ao olho do que o espaço CD. Então, C parece percorrer uma quantidade menor do que A. Portanto, parece mover-se mais lentamente.

35 O texto da prova aplica-se a dois casos diferentes, que estão patentes nas duas figuras que ilustram esta demonstração: num caso, as grandezas AB e CD estão colocadas na mesma linha reta e todos os pontos de ambas são colineares, no segundo caso, as duas linhas são paralelas e as suas extremidades pertencem a uma reta com origem no olho.

| **Theorema quinquagesimum tertium.** *Oculo translato quae longius spectantur destituí videntur.* [O61r]
Sit .ab. magnitudo quae videatur ab oculo .c. qui transmutetur remotius vt in .d.

Dico[152] magnitudinem .ab. apparere destitui submitti atque contrahi.

Quoniam enim | prius apparet magnitudo .ab. sub angulo .acb. et deinde sub angulo .adb. et per decimam sextam primi maior est .acb angulus angulo .adb. apparet igitur per quartam et quintam suppositiones .ab. prius maior et deinde minor. videtur. itaque contrahi et humilior fieri atque destitui et subsidere ipsa magnitudo .ab. Patetque propositum. [S64v]

Theorema quinquagesimum quartum. *Auctae magnitudines propius oculo produci putantur.*
Sit magnitudo .ab. oculus vero .c. a quo procidant radii .ca. .cb. et producatur .ab. vsque in signum .g.[153]

Dico quod .bg.[154] propior apparebit oculo quam .ab.

152 **Dico,** duo *SO*
153 **in signum .g., in** .fg. *SO*
154 **.bg.,** .ag. *SO*

Teorema quinquagésimo terceiro. *Deslocado o olho, coisas observadas mais longe parecem desaparecer.*

[Fig. 114] | Seja AB uma grandeza e seja vista a partir do olho C, transferido para mais longe, seja para D.

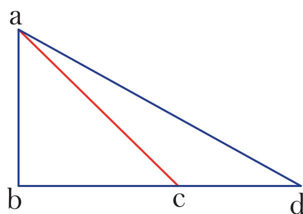


Fig. 114

Afirmo que a grandeza AB parece desaparecer, desvanecer-se ou diminuir.

Uma vez que a grandeza AB aparece primeiro sob o ângulo ACB, e, de seguida, sob o ângulo ADB, e [uma vez que], pela décima sexta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], o ângulo ACB é maior do que o ângulo ADB, então, pela quarta e pela quinta suposição [deste tratado], AB aparece primeiro maior e, em seguida, menor. Assim, a grandeza AB parece diminuir e tornar-se mais pequena ou ainda desaparecer e desvanecer-se. Fica claro o que se propôs.

Teorema quinquagésimo quarto. *Grandezas que aumentam de tamanho parecem aproximar-se do olho.*

[Fig. 115] | Seja AB a grandeza. Seja C o olho. Estendam-se, a partir deste, os raios CA e CB. Prolongue-se AB até G.

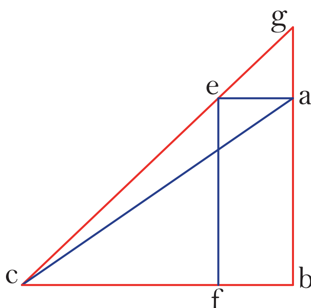


Fig. 115

Afirmo que BG aparecerá ao olho mais próxima do que AB.

Per signum enim .a. ducatur parallela ipsi .cb. contingens radium .cg. in puncto .e. et perficiatur parallelogramum .abfe. Quoniam igitur propius est .e. oculo[155] .c. quam sit .a. propior erit radius .cg. quam .ca. videtur ergo .g. oculo vicinius quam .a. Sed videtur .gb. sub eisdem radiis .cg. et .cb. sub quibus videretur magnitudo .ab. translata in .ef. viciniorem oculo locum. Contractius etiam apparet interuallum parallelarum .gb.ef. in signo .g. quam in signo .a. per sextam huius. Igitur omni ratione videtur vicinior .bg. quam .ba. Igitur.

Aliter.

Sit magnitudo .ab. oculus vero .c. a quo procidant radii .ca. .cb.

Dico vt prius.

Ponaturque .ef. magnitudo aequalis et parallela ipsi .ba. per trigesimam et secundam primi elementorum connectantur .ce. signa producanturque sicut .ce. et .ba. et concurrant in puncto[156] .g. concurrent enim, cum enim angulus .cfe. sit aequalis angulo .cba. et angulus .cfe. cum angulo .ecf. per decimam septimam primi sit minor duobus rectis. erit etiam angulus .cba. | cum angulo .ecf. minor duobus [S65r] rectis. per quintum ergo postulatum | concurrent. Quoniam igitur .bg. sub eodem [O61v] angulo[157] videtur, sub quo ipsa .ef. propinquior visui et radius .ce. sit superior radio .ca. videbitur .g. produci ad visum et propior quam .a.

155 **oculo,** per oculo *SO*
156 **puncto,** prô *SO*
157 **angulo,** radio *SO*

Pelo ponto A, trace-se uma paralela a CB, tangente ao raio CG no ponto E[36], e constitua-se o paralelogramo ABFE. Como E está mais próximo do olho C do que A, então, o raio CG está mais próximo do que CA. Logo, G vê-se mais perto do olho do que A. Mas GB vê-se sob os mesmos raios CG e CB, sob os quais se veria a grandeza AB deslocada para EF, [que é um] lugar mais próximo do olho. Além disso, a distância das paralelas GB e EF aparece mais estreita no ponto G do que no ponto A, pela sexta [proposição] deste [tratado]. Logo, por todas as razões, BG vê-se mais próximo do que BA, logo [etc.].

De outra maneira

[Fig. 116] | Seja AB uma grandeza e C o olho; a partir deste, estendam-se os raios CA e CB.

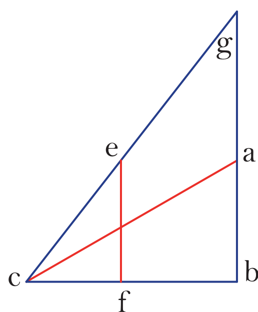


Fig. 116

Afirmo o mesmo que antes.

Ponha-se a grandeza EF igual e paralela a BA, pela trigésima e pela segunda [proposições] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Liguem-se os pontos C e E e prolongue-se, tanto CE, como BA. Sejam concorrentes no ponto G (serão concorrentes, porque o ângulo CFE é igual ao ângulo CBA; e, uma vez que os ângulos CFE e ECF somados são menores do que dois retos, pela décima sétima do primeiro, os ângulos CBA e ECF somados também serão menores do que dois retos; logo, pelo quinto postulado, serão concorrentes). Uma vez que BG se vê sob o mesmo ângulo sob o qual se vê EF, que está mais próxima do rosto, e uma vez que o raio CE está mais elevado do que o raio CA, então G parecerá aproximar-se do rosto e ficar mais perto do que A.

36 Subentende-se que se traçou previamente o raio visual CG.

Quod autem .ce. radius sit superior radio .ca. patet cum enim .ef. .ba. sint aequales magnitudines et parallelae spectabitur .ab. minor ipsa .ef. per sextam huius, et ob hoc minor est angulus .acb. angulo .ecf. quare .cb. .ce. latera continentia angulum .ecf. maiorem plus distant lateribus .ac. .cb. continentibus angulum .acb. minorem ex definitione anguli maioris et cum sint in eadem superficie sequitur .ce. plus distare a .cb. quam .ca. quod est propositum. Igitur auctae magnitudines propius etc.

Theorema quinquagesimum quintum. *Quecunque in eodem non iacent interuallo neque parallela in extremis posita, neque adinuicem posita mediis neque in rectas existentia lineas totam figuram, quandoque conuexam mouentem, quandoque eam curuam efficiunt.*
Sit .abc. circunferentia quae videatur ab oculo .e. non sit autem .e. in eodem plano cum ipsa .abc.

Dico totam figuram apparere quandoque conuexam quandoque curuam.

Ab oculo enim .e. procidentes visus in circunferentiam[158] .abc. facient conum vel igitur circulus .abc. erit plenus corpore et tunc videbitur curuum vel circulus .abc. erit cauatus et tunc superficies coni erit caua. Sed melius forsan et conuenientius intelligetur hoc modo quod sequitur.

Aliter.
Sint .abc. signa in plano non in recta linea nec in parallelis. Sitque .f. oculus in sublimi a quo perpen|dicularis demittatur .fe. in planum subiectum per vndecimam [S65v]
vndecimi et connectantur .fa. .fb. .fc. .ea. .eb. .ec.

Quoniam igitur .eb. maior est ipsa .ea. (capio enim .b. signum remotius ab .e. quam sit .a. aut .c.) et etiam quam .ec. et duo □ □ .be. .ef. | aequa sint □ .fb. per quad- [O62r]
ragesimam septimam primi elementorum et per eandem quadragesimam septimam duo □ □ .fe. .ea. aequa sint □ .fa. cumque .eb. sit maior quam .ea. erit et .eb. □ maius □ .ea. est autem .fe. □ commune duo ergo □ □ .be. .ef. maiora sunt □ □ .ea. .ef. hinc relinquetur[159] □ .fb. maius □ .fa. Consimiliter ostendetur quod .fb. □ maius est □ .fc. et ob hoc linea .fb. est maior quam vel linea .fa. vel .fc. et ob id .abc. videbitur concaua. Opposito modo continget ponendo oculum in .k. et ducendo perpendicularem .km. cumque apparebit conuexa.

---

158 **circunferentiam,** circunferentia *SO*
159 **hinc relinquetur,** demptisque hinc inde □ .fe. relinquetur *SO*

Que o raio CE está mais elevado do que o raio CA fica claro [desta forma]: uma vez que EF e BA são grandezas iguais e paralelas, AB ver-se-á menor do que EF, pela sexta [proposição] deste [tratado]. Por isso, o ângulo ACB é menor do que o ângulo ECF. Por esta razão, os lados CB e CE que compreendem o ângulo maior ECF estão mais distantes um do outro do que os lados AC e CB que compreendem o ângulo menor ACB, pela definição de ângulo maior. Uma vez que se encontram na mesma superfície, segue-se que CE está mais distante de CB do que CA. O que se propôs. Portanto, grandezas aumentadas, etc.

Teorema quinquagésimo quinto. *Coisas que não se encontram à mesma distância, e não se encontram dispostas paralelas em relação às suas extremidades, nem estão dispostas [paralelas] em relação aos seus meios, nem estão em linhas retas, fazem uma figura toda que, ao mover-se, por vezes é convexa, outras vezes é côncava.*
Seja ABC uma circunferência e seja vista a partir do olho E, mas não esteja E no mesmo plano de ABC.

Afirmo que a figura toda aparece, por vezes convexa, por vezes côncava.

Os raios que se estendem do olho E para a circunferência ABC farão um cone. Então, ou o círculo ABC será um corpo preenchido, e então ver-se-á convexo, ou o círculo ABC será oco e então a superfície do cone será côncava. Mas talvez se perceba melhor e de forma mais apropriada do modo que se segue.

De outra maneira

[Fig. 117] | Sejam A, B e C pontos de um plano não colineares e não situados em linhas paralelas. Seja F o olho no alto, do qual se baixe a perpendicular FE ao plano subjacente, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Ligue-se F a A, F a B, F a C, E a A, E a B e E a C.

Uma vez que EB é maior do que EA e também do que EC (pois tomo o ponto B mais afastado de E, do que A ou C); e os dois quadrados de BE e EF [somados] são iguais ao quadrado de FB, pela quadragésima sétima do primeiro dos *Elementos*; e os dois quadrados de FE e EA [somados] são iguais ao quadrado de FA, pela mesma quadragésima sétima; e uma vez que EB é maior do que EA, também o quadrado de EB será maior do que o quadrado de EA; mas o quadrado de FE é comum, então os quadrados de BE e EF [somados] são maiores do que os quadrados de EA e EF [somados]. Em consequência, restará o quadrado de FB maior do que o quadrado de FA. Da mesma forma se mostrará que o quadrado de FB é maior do que o quadrado FC. Por isso, a linha FB é maior do que a linha FA ou FC. Por [Fig. 118] isso, ABC ver-se-á côncava. | Sucederá de maneira oposta, se se puser o olho em K e traçando a perpendicular KM, uma vez que [nesse caso] aparecerá convexa.

Theorema quinquagesimum sextum. *Quadrato existente si a contactu dimetientium ad angulos rectos quaedam excitata fuerit ad ipsius quadrati planum in ipsaque positus fuerit oculus, latera et dimetientes ipsius quadrati aequales apparebunt.*
Sit quadratum .dcbe. cuius dimetientes productae sese secent in puncto .f. a quo puncto .f. per duodecimam vndecimi erigatur perpendicularis ipsi quadrato quae sit .fa. ponaturque oculus in .a.

Dico aequales apparere dimetientes .bd. .ec. aequalia quoque latera vt .bc. .cd. .de. .be.[160]

Emittantur enim visus .ab. .ac. .ad. .ae. .af. et quoniam tria latera .eb. .bc. .ce. tribus lateribus .ed. .dc. .ce. sunt aequalia erunt per octauam primi anguli .bce. | .ecd. [S66r] aequales et quoniam aequalia sunt latera .ed. .dc. lateribus .dc. .cb. et angulus .edc. angulo .dcb. ex definitione quadrati: erit basis .ec. basi .db. per quartam primi aequalis et angulus .ecd. angulo .cbd. quare per primam communem sententiam aequales erunt anguli .fbc. .fcb. et aequalia latera .fb. .fc. per sextam primi. Similiter aequalia erunt .fc. .fd. .fe. Et quoniam aequales sunt anguli .afb. .afc. ambo scilicet[161] recti per secundam definitionem vndecimi aequalia quoque latera .cf. .bf. et commune latus .fa. ergo per quartam primi basis .ab. basi .ac. | est aequalis et angulus .baf. angulo .caf. [O62v]

160 **.bc. .cd. .de. .be,** .bd. .ec. *SO*
161 **scilicet,** .f. *SO*

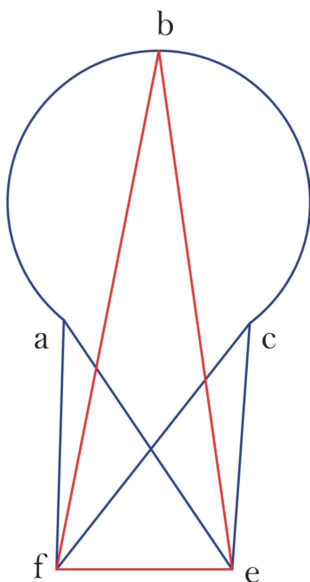


Fig. 117

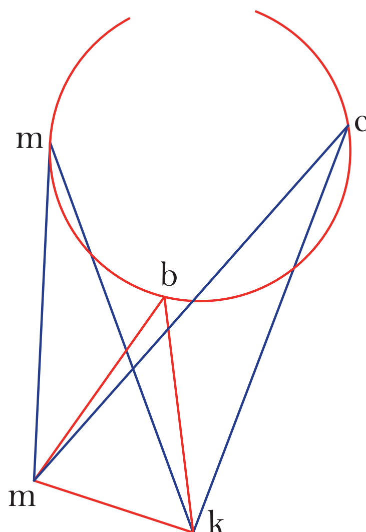


Fig. 118

Teorema quinquagésimo sexto. *Num quadrado dado, se, a partir do ponto de interseção dos diâmetros, se levantar uma perpendicular ao plano desse quadrado, e nela for colocado o olho, os lados e os diâmetros do quadrado aparecerão iguais.*

| Seja DCBE o quadrado. Os seus diâmetros, traçados, intersectem-se no ponto F.
[Fig. 119] Deste ponto F, pela duodécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], levante-se a perpendicular ao quadrado, seja FA. Ponha-se o olho em A.

Afirmo que os diâmetros BD e EC aparecem iguais, e que também os lados BC, CD, DE e EB aparecem iguais.

Estendam-se os raios visuais AB, AC, AD, AE e AF. Uma vez que os três lados EB, BC e CE são iguais aos três lados ED, DC e CE; [então,] pela oitava [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], os ângulos BCE e ECD serão iguais. Uma vez que os lados ED e DC são iguais aos lados DC e CB, e o ângulo EDC é igual ao ângulo DCB, pela definição de quadrado; [então,] a base EC será igual à base DB e o ângulo ECD, ao ângulo CBD, pela quarta do primeiro. Por esta razão, pela primeira noção comum, os ângulos FBC e FCB serão iguais. Assim, os lados FB e FC serão iguais, pela sexta do primeiro. Da mesma forma, FC, FD e FE serão iguais. Uma vez que os ângulos AFB e AFC são iguais (pois ambos são retos, pela segunda definição do undécimo), e os lados CF e BF também são iguais, e o lado FA é comum, então, pela quarta do primeiro, a base AB é igual à base AC, e o ângulo BAF ao ângulo CAF. Pela mesma razão, a base AE é igual à base AD, e cada uma delas, à base AC. Também

Eadem ratione aequalis est basis .ae. basi .ad. et vtraque basi .ac. aequales quoque anguli .eaf. .daf. totus ergo angulus .bad. toti .eac. equalis est equales igitur apparent dimetientes quod est primum.

Et quoniam equales sunt .ab. .ac. .ad. .ae. vt ostensum est et aequales bases .bc. .cd. .de. .eb. ergo per octauam primi aequales sunt anguli .bac. .cad. .dae. .eab. Aequalia igitur apparent latera .bc. .cd. .de. .be. quod est secundum. Quadrato igitur etc.

serão iguais os ângulos EAF e DAF. Então, o ângulo todo BAD é igual ao ângulo todo EAC. Portanto, os diâmetros aparecem iguais. O que é o primeiro [objetivo].

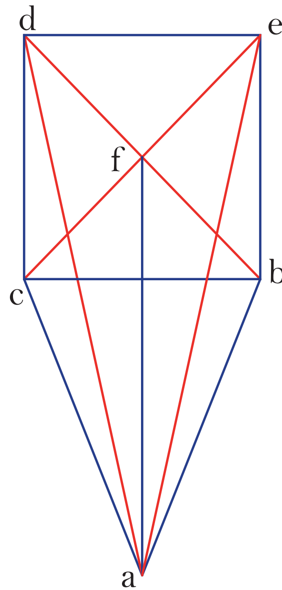


Fig. 119

Como AB, AC, AD e AE são iguais, como se mostrou, e são iguais as bases BC, CD, DE e EB, então, pela oitava do primeiro, os ângulos BAC, CAD, DAE e EAB são iguais. Portanto, os lados BC, CD, DE e BE aparecem iguais. O que é o segundo [objetivo]. Logo, se, de um quadrado, etc.

COMENTÁRIOS À *ESPECULÁRIA* DE EUCLIDES

| Ad eundem Emmanuelem Lusitanorum Regem Francisci de Mello in Euclidis Megarensis Speculariam Commentaria [S67r, O63r]

Promissi iam foenoris princeps clarissime priorem partem non qua debui, sed qua potui diligentia inter strepentes negotiorum occupationes exsolui, in qua mihi illud a te deprecari licet: complurima esse a nobis inuerso dicendi ordine atque praepostero cursu explicata, quippe que non accurata diligentia absolutioreque lima castigata sunt, sed immature atque praepropere in lucem emissa. Quare nec mihi succensere debes si in hac Euclidis Specularia interpretanda (que vt est aliis que de videndi ratione dicta sunt difficilior ita pluribus mendis inuersa atque perperam implexa legebatur) multa sine ordine atque vt primum mihi in mentem venerant exscripta deprompsi. Nec enim mihi in tantis negotiis festinanti ad haec perfectius excolenda otium datum est. Quod si quando contigerit haec forsan ad vmbilicum excribrata deducemus. Nunc interim de miraculis que in speculis apparere solent Euclides ipsum audies per nos iam plane Mathematices studiosis loquentem. Cuius nonnunquam dictionem sicubi minus dicendis commodam videbimus licentiosius forsan quam oblatratores vellent, sed vtilius resecabimus, et iam ipsum Euclidem audies.

| Euclidis Megarensis Specularia Bartholomeo Zamberto Interprete [S67v]

Visum[162] *rectam lineam esse, qua media cuncta extremis correspondent. Quaeque videntur per rectam lineam spectari, planum atque | receptum esse oportet.*

Ego lectores beneuoli non sum adeo arrogantis ingenii, vt me praedicta Postulata intelligere profitear, que hoc loco ab Euclide iis que nunc in medium adduximus subiiciuntur. quinetiam multa in iis esse que me fugiant, et que oculatiores me longeque doctiores non praeuideant libens agnosco. Ea tamen vti sequentibus sunt necessaria, ne inutilis hic labor noster videatur, interpretari tentabo, vt iuxta primatium Mathematicorum consuetudinem (que noster scopus est) haec Postulata ita suscipiantur, vt in his nullus haesitet, nec in aliam quam a nobis explicabitur sententiam expetantur, que vt spero nostra interpretatione peruiam vobis ad demonstrationes propositionum sequentium intelligendas facultatem efficient, que adeo corruptae [O63v]

162 **Visum**, Sisum *SO* [altera manus in margine *S* «V» addidit]

Para o mesmo Manuel Rei dos Lusitanos,
Comentários de Francisco de Melo à *Especulária* de Euclides

A primeira parte, ilustríssimo Príncipe, do juro já prometido, paguei-a, não com a atenção devida, mas com a que pude dispensar, por entre as ruidosas ocupações causadas pelos meus afazeres. Nela assiste-me o direito de te pedir perdão por isto: é que muitas coisas estão explicadas ao contrário e fora da ordem, porque não foram corrigidas com uma última leitura nem com uma revisão final, mas foram trazidas à luz prematura e precipitadamente. Por isso, não deves enfurecer-te contra mim se, ao explicar a *Especulária* de Euclides (que não só é mais difícil do que tudo o resto que se disse sobre a maneira de ver, mas também se lê corrompida por numerosos erros e desorganizada de forma enganadora), pus por escrito muita coisa desordenadamente e como me vinha à cabeça, pois ao tomar pressa em tão grande empresa não me foi dado o tempo livre para polir com mais cuidado esta obra. Se tal vier a acontecer, talvez terminemos o que está aqui reunido. Agora, entretanto, ouvirás o próprio Euclides a falar por intermédio de nós aos especialistas de Matemática sobre as coisas espantosas que costumam aparecer nos espelhos. Se virmos que por vezes a sua expressão é de alguma forma menos conveniente para o que tem de ser dito, limá-la-emos, provavelmente de forma mais livre do que o desejariam os difamadores, mas mais útil. E agora, ouvirás o próprio Euclides.

***Especulária* de Euclides de Mégara,**
segundo a interpretação de Bartolomeu Zamberto

É preciso que seja admitido e que seja claro que *um raio visual é uma linha reta, por meio da qual todos os pontos intermédios correspondem às extremidades, e que tudo aquilo que se vê é avistado por meio de uma linha reta.*

Eu, benevolentes leitores, não sou de engenho tão arrogante, que declare abertamente entender os postulados acima citados, e que neste lugar foram colocados por Euclides como fundamento do assunto que agora passámos a tratar. Pelo contrário, de bom grado reconheço haver muita coisa que, neles, me escapa e que pessoas mais perspicazes e bem mais doutas que eu não explicaram de antemão. Ainda assim, tentarei explicá-las, na medida em que são necessárias para o que vem a seguir, para que este nosso trabalho não pareça em vão, de forma que, de acordo com o hábito dos mais eminentes matemáticos (que é o nosso objetivo), estes postulados assim se possam tomar sem que ninguém fique reticente perante eles, nem procure outra alternativa que não a que apresentaremos. Estes postulados, por meio da nossa interpretação, assim o espero, melhorarão a vossa capacidade de entender as demonstrações das proposições seguintes, que a tal ponto se leem alteradas e

mendosaeque leguntur, vt ex his nulla vobis possit intelligendi ansa praeberi. Quare nouas omnino demonstrationes excogitare decreui, quas pro meo in studiosos omnes amore malui vobis communes facere, quam longa atque assidua diligentia expolire.

Propositi igitur Postulati (ut ad rem deueniam) prior pars quantum ipse coniicio visus diffinitio est quam sic intelligo. Visum rectam esse lineam[163] qua ordine quodam intercepta media inter visum remque visam dinoscuntur, siue enim visus ex oculis emicare, aut a visili ad oculos peruenire credamus, que instituto controuersia nihil confert. Visu tamen vt experimentis facile quis explorabit, non tantum extremum (hoc est visile) velut si saltu quodam visus in rem visam insiliret videtur, sed | [S68r] successu ordine quecunque intermedia sunt discernuntur, vtsi in recta linea visuque .abcd. 4 signa ordine posituque designes, oculumque in .a. statuas, qui .d. obiectum peruideat necessum est vt .bc. intermedia | eodem visu cernantur. [O64r]

Reliqua verba que his adiiciuntur premissam explicare videntur diffinitionem. Sed quia his tanquam postulato in aliam sententiam vtitur, longe aliter sentiendum est. Vnde vt hoc postulatum presenti instituto accommodemus, de iis que visu reflexo videntur intelligamus omne speculum situm in plano aliquo. At in proposito Speculum voco signum a quo reflexio fit. Si igitur in subiectum planum in quo Speculum situm est ab oculo, et obiecto visili per vndecimam vndecimi bis repetitam perpendiculares agantur necessum est illa tria signa, puta punctum reflexionis et duos actarum perpendicularium terminos, in eadem esse recta linea. Postulat ergo iuxta hanc expositionem in primis.

Postulatum primum. *Si ab oculo in subiectum planum in quo speculum situm est, et a visili bine perpendiculares agantur punctum reflexionis et terminos perpendicularium in eadem esse recta linea.*

Hoc Postulato in hanc sententiam vtitur in sequentis theorematis demonstratione. Quod vt plenius ex intelligatis multa altius repetenda sunt.

---

163 **lineam esse** *S*, esse lineam *O*

cheias de erros, que delas nenhuma oportunidade de entendimento vos pode ser oferecida. Por esta razão, decidi descobrir demonstrações completamente novas, que, devido à minha afeição para com todos os amantes do estudo, preferi dar-vos a conhecer, a polir com longa e persistente diligência.

Ora, voltando ao assunto, a primeira parte do postulado apresentado, tanto quanto eu próprio conjeturo, constitui a definição de raio visual, que entendo da maneira seguinte. Um raio visual é uma linha reta, por meio da qual se distingue tudo o que é intercetado e está entre o olhar e o objeto visto, numa determinada ordem, quer pensemos que os raios visuais avançam a partir dos olhos, quer pensemos que chegam aos olhos [provenientes] do objeto visível, controvérsia que não interfere com o que estamos a tratar. Por meio de um raio visual, como se poderá verificar facilmente por meio da experiência, não se vê apenas o extremo (ou seja, o objeto visível), como se o raio visual se lançasse na coisa avistada por meio de um salto, mas discerne-se tudo o que está no meio, por ordem de chegada.
[Fig. 120] | Por exemplo, se assinalares, numa linha reta (que é também um raio visual), os quatro pontos A, B, C e D, dispostos numa determinada ordem, e puseres em A um olho que veja o objeto D, é forçoso que os pontos intermédios B e C sejam vistos por meio do mesmo raio visual.



Fig. 120

As restantes palavras, acrescentadas a estas, parecem esclarecer a definição apresentada, mas como [Euclides] usa essas palavras como se fossem um postulado com sentido diferente, devemos entendê-las de outra maneira. Por isso, para acomodarmos este postulado ao que agora expomos, entendamos, a propósito das coisas que se veem por meio de um raio refletido, que todo o espelho se encontra num plano determinado (e aqui, chamo espelho ao ponto onde se dá a reflexão); então, se se traçarem, a partir do olho e do objeto visível, as perpendiculares ao plano subjacente em que se encontra o espelho, pela undécima [proposição] do undécimo [livro] tomada duas vezes, é forçoso que aqueles três pontos (a saber: o ponto de reflexão e os dois extremos das perpendiculares traçadas) estejam na mesma linha reta. De acordo com esta explicação, [Euclides] postula em primeiro lugar:

Postulado primeiro. *Se se traçarem duas perpendiculares, do olho e do objeto visível, para o plano subjacente em que está colocado o espelho, o ponto de reflexão e os extremos das perpendiculares estão na mesma linha reta.*

Usa [Euclides] este postulado na demonstração do teorema seguinte, com este sentido. Para que o entendais de forma mais completa, temos de ir buscar muitas coisas mais atrás:

Subrogatum primum. *Petimus igitur ipsius rei vise signum, non quocunque visu in illo incidente videri, sed vnico tantum.*
A quacunque enim oculi parte in rei vise signum quotlibet[164] visus emicant quare a variis rei vise signis visus in eodem oculi signo procidunt, quod si quocunque visu signa rei visilis videantur, et secundum eundem ordinem quem in oculo obseruant (ut in perspectiua dictum est) in eadem parte plura signa lo|co situque distantia viderentur, et sic confuse et minime distincte totius visilis partes discernerentur, quod non supponebatur. Vnico igitur visu vnicum signum necesse est videri. [S68v]

Subrogatum secundum. | *Secundo petimus. Visus et radios luminosi qui perpendiculares incidunt, aut in plano erecto ad perpendiculum reflectuntur, fortiores esse omnibus iis qui ab eisdem terminis precluduntur.* [O64v]
De iis enim qui[165] perpendiculariter incidunt nemo inficiabitur, quando hi soli in sese refringuntur aut inoffensi transeunt. De iis vero qui in plano ad perpendiculum erecto reflectuntur planum est eos ceteris fortiores esse qui eisdem[166] terminis intercipiuntur. Si quis enim speculum ex calibe planum conficiat, atque ad solis radios supponat experietur lucem fortiorem in erecto ad perpendiculum plano reflecti. Quod si ad alias etiam partes reflectatur, debilius obscuriusque lumen emicabit. Ita vt etiam lippis oculis lucem eam contuentes perferant. Sicut autem in reflexione lucis contingit, ita etiam in visibus reflexis euenire necessum est, vt a nobis demonstratum est propositione secunda corollarii in Euclidis perspectiuam. Hinc fit vt visio directa per visus fiat perpendiculariter supra oculum incidentes qui omnium sunt fortissimi. In reflexa per radios in plano ad perpendiculum erecto reflexos. Quum enim ex primo subrogato vnico tantum visu vnum signum videatur, et ex secundo ii sunt aliis fortiores, de quibus nunc dictum est. Natura autem secundum fortiores actiones nititur, necessum igitur est, vt visio omnis fiat secundum vnum ex iis duobus radiis.

Iam ex iis suaderi facile poterit Postulatum sicut a nobis explicatum est. Sit enim .e. speculum .a. oculus .b. obiectum visile per vndecimam vndecimi demittantur in subiectum planum .e. .ac. et | .bg. perpendiculares. Cum ergo .ac. et .bg. sint perpendiculares in subiectum planum in quo .e. paralele erunt per sextam vndecimi, quare per diffinitionem paralelorum erunt in eodem plano atque planum illud per definitionem [S69r]

164 **quotlibet** *S*, quodlibet *O*
165 **qui** *O*, que *S*
166 **eisdem**, eosdem *SO*

Subrogado primeiro. *Pedimos, portanto, que um ponto do objeto avistado não se vê por meio de qualquer raio visual que nele incida, mas apenas por meio de um único [raio visual].*

De qualquer parte do olho partem inúmeros raios visuais para um ponto do objeto avistado, por isso de vários pontos do objeto avistado estendem-se raios visuais para o mesmo ponto do olho. Ora, se os pontos do objeto visível forem vistos por meio de qualquer raio, e segundo a mesma ordem que respeitam no olho (como se disse na *Perspetiva*), [então,] no mesmo lado [do olho], ver-se-iam muitos pontos no mesmo lugar, na mesma posição e à mesma distância, e assim, as partes do objeto visível inteiro discernir-se-iam de forma confusa e não distinta, o que era contra a suposição inicial. Logo, é forçoso que um único ponto seja visto por meio de um único raio.

Subrogado segundo. *Pedimos em segundo lugar que os raios visuais e os raios luminosos que incidem perpendicularmente ou se refletem num plano traçado perpendicularmente, são mais fortes do que todos os [raios] que são definidos pelos mesmos extremos.* Quanto aos [raios] que incidem perpendicularmente, ninguém contestará [a afirmação], uma vez que só eles se refletem sobre si mesmos ou passam sem obstáculos. Quanto aos que se refletem num plano traçado perpendicularmente, é claro que estes são mais fortes do que os outros que são definidos pelos mesmos extremos. Com efeito, se alguém fizer um espelho plano de metal, e o colocar debaixo dos raios de sol, sentirá que uma luz mais forte se reflete no plano colocado perpendicularmente. No caso de se refletir para outros lados, a luz brilhará mais débil e obscura, de tal forma que mesmo quem tem os olhos inflamados consegue suportar aquela luz. Ora, assim como sucede com a reflexão da luz, assim também é necessário que aconteça com a reflexão dos raios visuais, como demonstrámos na segunda proposição do *Corolário* à *Perspetiva* de Euclides. Daqui sucede que a visão direta se faz por meio de raios visuais que incidem perpendicularmente no olho, que são os mais fortes de todos, e que na visão reflexa se faça por meio de raios refletidos no plano erguido perpendicularmente. Com efeito, uma vez que, pelo primeiro subrogado, um único ponto é visto por meio de um único raio visual, e estes de que agora se falou são mais fortes que os outros, pelo segundo [subrogado], e a natureza age segundo ações mais fortes, então, é forçoso que qualquer visão se faça segundo um destes dois raios.

De tudo isto, já se pode propor facilmente o Postulado, tal como o enunciámos. [Fig. 121] | Seja E o espelho, A o olho, B o objeto visível. Pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], baixem-se as perpendiculares ao espelho subjacente AC e BG. Uma vez que AC e BG são perpendiculares ao espelho subjacente em que se encontra E, então, pela sexta do undécimo, serão paralelas. Por esta razão, pela definição de paralelas, estarão no mesmo plano. E esse plano, pela definição

sextam vndecimi erectum erit [perpendiculariter] ad subiectum planum in quo .e. Quare per Corollarium statim deductum visus quo .b. videtur reflectitur in plano .ac. .bg. Sit | ergo visus .aeb. tria igitur signa .ceg. sunt in plano .acbg. et in plano a quo .e. [O65r] speculum ergo sunt in communi sectione vtriusque, que per tertiam, vndecimi est recta linea, quod fuit probandum.

Postulatum secundum. *Speculo in plano collocato, inspectoque aliquo sublimi, quod et ipsi plano ad angulos rectos existat, fient proportionalia vt inter speculum et spectantem recta linea, ad eam que inter speculum et id quod ad angulos rectos in plano fastigium, sic spectantis fastigii ad id quod ad angulos rectos in plano fastigium.*
Hoc mea sententia postulatum nec ex ipso verborum contextu euidens est, nec facile experimento planum esse poterit. Quare illud a nobis non ab re probandum erit, siquidem illud assequi poterimus, modo vnum nobis concedatur, quod facili experientia vnusquisque vestrum explorasse poterit. Speculo scilicet in plano collocato, inspectoque aliquo sublimi quod et ipsi plano ad angulos rectos existat, si fuerit quae inter speculum et spectantem recta linea intercipitur equalis illi que inter speculum et aspecti fastigium intercidit, erit aspicientis fastigium equale aspecti fastigio, vt si ab oculo .a. fastigium, aut perpendicularis decidat in subiectum planum in quo speculum .ac. ab obiecto vero visili siue inspecto .b. perpendicularis que eius est fatigium .bd. in subiectum planum in quo speculum | .e. fuerit .ce. ipsi .ed. [S69v] equalis erit .ac. ipsi .bd. equalis. Hoc idem postulatum experimento facile comprobari potest. Si enim in linea .bd. signum aliquod infra .b. aut supra statuatur, oculo in .a. posito, nullum ex iis spectabitur, si paulo superius sustuleris, aut infra demiseris.

Hoc igitur in hanc sententiam recepto, propositum secundum postulatum, | quod [O65v] omnino euidens esse negauimus, iam ostendamus superest. Esto igitur oculus .a.

sexta do undécimo, será perpendicular ao plano subjacente em que se encontra E. Por esta razão, pelo *Corolário* firmemente deduzido, o raio visual, por meio do qual se vê B, reflete-se no plano ACBG. Seja o raio visual AEB. Então, os três pontos C, E e G estão no plano ACBG e no plano em que se encontra o espelho. Logo, estão na interseção de ambos, a qual, pela terceira do undécimo, é uma linha reta. O que se quis provar.

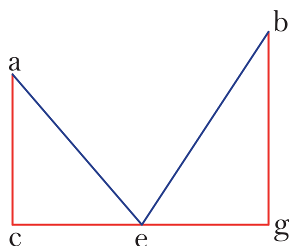


Fig. 121

Postulado segundo. *Colocado um espelho num plano e avistada uma altura perpendicular a esse plano, ter-se-ão as seguintes proporções: como a linha reta entre o espelho e o observador está para aquela entre o espelho e a altura perpendicular ao plano, assim [está a linha reta] da altura do obervador para a altura levantada perpendicularmente ao plano.*

Na minha opinião, este postulado não é claro na sua formulação verbal, nem poderá ser clarificado facilmente por meio de experiências. Por isso, não será descabido que o provemos; tanto mais que o poderemos conseguir, desde que nos seja concedido apenas uma coisa, que cada um de vós poderá verificar por meio de uma experiência fácil, a saber: colocado um espelho num plano, e avistada uma altura perpendicular ao dito plano, se a linha reta compreendida entre o espelho e o espectador for igual àquela que cai entre o espelho e a altura do que é observado, a altura do observador será igual à altura do que é observado. | Por exemplo: se, do olho A, a altura, ou perpendicular AC, cair no plano subjacente em que se encontra o espelho, e se, do objeto visível, ou avistado, B, a perpendicular BD, que é a altura deste [objeto visível, cair] no plano subjacente em que se encontra o espelho E, se CE for igual a ED; então, AC será igual a BD. Este mesmo postulado pode ser comprovado facilmente por experiência. Com efeito, se, na linha BD, se estabelecer um qualquer ponto abaixo ou acima de B, e se se colocar o olho em A, não se verá nenhum daqueles [pontos], mesmo que o ponhas pouco mais para cima, ou um pouco mais para baixo.

[Fig. 122]

Admitido isto com este significado, já só resta mostrarmos o segundo postulado apresentado, que dissemos não ser de todo evidente. | Seja A o olho;

[Fig. 123]

subiectum planum <.cd.>, in quo speculum .e. (semper autem in proposito speculum intelligo signum a quo reflexio visus efficit) obiectum visile esto .b. ab ipsis .a. et .b. signis fastigia siue perpendiculares demittantur .ac. et .bd. per vndecimam vndecimi bis repetitam. Dico eandem rationem esse .ce. ad .ed. que .ac. ad .bd.

Siquidem .ce. fuerit ipsi .ed. equalis, erit .ac. ipsi .bd. equalis, per id quod proxime nunc postulauimus atque ob id, eadem ratio .ce. ad .ed. que .ac. ad .bd. vtraque enim equalitatis ratio. Sit ergo secundo .ce. minor ipsa .ed. atque illi equalis esto .eg. perque ipsum .g. paralelus ipsi .bd.[167] agatur .gh. secans ipsum .eb. in .h. signo. Oculo igitur posito in .a. si .h. spectetur per priorem huius demonstrationis partem, cum .ce. sit equalis .eg. erit eadem ratione .ce. ad .eg. que .ac. ad .hg. Quum ergo sicut .ce. ad .eg. et .ac. ad .hg. erit vicissim per 16. quinti eadem ratione .ce. ad .ac.[168] que .eg. ad .gh. At quoniam .gh. paralela est ipsi .bd. in triangulo .bed. igitur per 29. primi angulus .ehg. equalis erit angulo .ebd. exterior interiori sibi opposito. et ob id etiam angulus .egh. equalis angulo .edb. Angulus autem .heg. communis. Duo igitur triangula .heg. .bed. equiangula sunt. Quare per quartam sexti eadem est ratio .eg. ad .gh. que .ed. ad .db. laterum que circa equales angulos consistunt. Est autem .eg. ad .gh. sicut .ce. ad .ac.[169] (ut proba|tum [S70r] est). Igitur per vndecimam quinti eadem est .ac. ad .ce. que .bd. ad .de. Vicissim igitur per 16. eiusdem erit .ac. ad .bd. sicut .ce. ad .ed. quod fuerat secundo probandum.Demum si fuerit .ce. maior .ed. si ab ipsa .ce. ipsi .ed. equalem abscindas .ke.[170] per tertiam primi et per .k. per 31.am eiusdem ipsi .ac. paralelam egeris, pauloque inuertas proximam demonstrationem, eodem modo probabis eandem esse rationem .ce. ad .ed. que .ac. ad .bd. quam tamen vobis relinquo deducendam. Atque in vniuersum | patet secundum postulatum a nobis hoc loco explicandum. [O66r] Que vero iis in littera adiiciuntur, tametsi vera sint nihil tamen ad illud comprobandum conducunt, quibus si in posterum egeamus, tempore et loco ea explicabimus

167 **.g. paralelus** *S*, parallelus .g. *O*
168 **.ce. ad .ac.**, .ac. ad .ce. *SO*
169 **.ce. ad .ac.**, .ac. ad .ce. *SO*
170 **.ke.**, .ce. *SO*

[CD,] o plano subjacente, onde se encontra o espelho E (neste tratado, entendo sempre que o espelho é o ponto onde se dá a reflexão do raio visual). Seja B o objeto visível. Dos pontos A e B, baixem-se as alturas, ou perpendiculares, AC e BD, pela undécima [proposição] do undécimo [livro], duas vezes tomada. Afirmo que CE:ED=AC:BD.

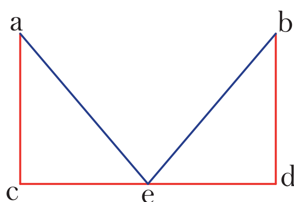


Fig. 122

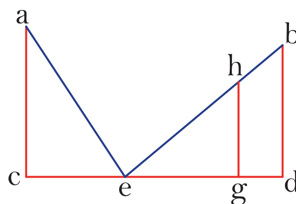


Fig. 123

Se CE for igual a ED, AC será igual a BD, pelo que acabámos de postular agora mesmo; por isso, CE:ED=AC:BD, pois ambas são razões entre igualdades. Portanto, em segundo lugar, seja CE menor do que ED, e seja EG igual à primeira [CE]. Por G, trace-se GH, paralela a BD, e secante a EB no ponto H. Se se colocar o olho em A e se avistar H, então, uma vez que CE=EG, será CE:EG=AC:HG, pela primeira parte desta demonstração. Como CE:EG=AC:HG; então, *alternando*, será CE:AC=EG:HG, pela décima sexta [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*]. Mas, uma vez que GH é paralela a BD no triângulo BED, então, o ângulo EHG será igual ao ângulo exterior oposto EBD, pela vigésima nona do primeiro. Por isso, também o ângulo EGH será igual ao ângulo EDB. E o ângulo HEG é comum. Então, os dois triângulos HEG e BED são equiângulos. Por esta razão, pela quarta do sexto, EG:GH=ED:DB (a razão dos lados que compreendem os ângulos iguais é igual). Mas EG:GH=CE:AC (como se provou). Então, AC:CE=BD:DE, pela undécima do quinto. *Alternando*, pela décima sexta do mesmo, AC:BD=CE:ED. O que se [Fig. 124] quisera provar em segundo lugar. | Finalmente, se CE for maior do que ED, se de CE cortares KE igual a ED, pela terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], e, por K, traçares uma paralela a AC, pela trigésima primeira do mesmo, e inverteres um pouco a última demonstração, do mesmo modo provarás que CE:ED=AC:BD, o que vos deixo para demonstrar. E o segundo postulado, que era nosso dever escrutinar neste lugar, fica claro em geral. Quanto às coisas acrescentadas no tratado, conquanto sejam verdadeiras, em nada servem para o confirmar[1]; se mais para a frente precisarmos delas, explicá-las-emos na altura e no lugar [devidos] e adicionaremos

1 Melo refere-se aos postulados 4-6 do texto original da *Catóptrica* (=*Especulária*) de Euclides, que opta por deixar de lado.

et conrogabimus que nostro instituto necessaria videbuntur. Nec enim potui hac tumultuaria editione omnia preuidisse.

His postulatis ab Euclide que posthac posito a nobis ordine, in eamque sententiam que a nobis explicata est citabuntur, non iniocundum erit pauca corrogare, que dicendis necessaria sunt et mihi nunc succurrunt.

Primum corrogatum. *Quanlibet rem breuissimo radio videri qui ad eam ex oculo producitur.*

Ex propositione quidem sexta Corolarii in Euclidis perspectiuam a nobis demonstratam arbitror, recto visu et minime flexo perpendiculari tamen visilis partes certa atque distincta visione cerni, ob eam puto causam quod is fortissimus sit qui ab ea parte oculi producitur. Omne enim naturale agens in propinquum atque ob id per breuiorem lineam celerius atque fortius agere receptum est. Quare fortiore vi debiliorem vincente[171] necesse est vt per pen|dicularem radium aut saltem per breuissimum vbi is offendente densiore medio reflectitur quecunque res certa atque distincta visione cernatur. [S70v]

Secundum corrogatum. *Certa distinctaque visione in speculis quecunque res videtur vbi vtriusque oculi visus in directum producti occurrunt.*

Hoc certe a doctissimo preceptore meo Petro Briseo multis experimentis frequenti consessu complurimis ex amicis nostris demonstratum est, et quoniam mihi alterius oculi acies a primis annis imminuta est | [O66v] illud minime potuit vllis mihi experimentis persuadere, tametsi vt equum erat aliorum omnium quibuscum versabar testimonio non refragarer, sed valde

171 **vincente**, vincentem *SO*

os corrogados que parecerem necessários à nossa empresa, pois não consegui antecipar tudo nesta edição feita à pressa.

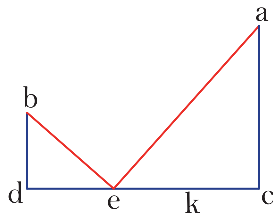


Fig. 124

A estes postulados de Euclides, que, daqui para a frente, serão citados, com o sentido que lhes atribuímos e na ordem que lhes demos, não será desapropriado acrescentar alguns corrogados, que são necessários ao que temos para dizer e que agora me acorrem ao espírito.

Primeiro corrogado. *Qualquer coisa vê-se por meio do raio mais curto que se estende do olho até ela.*
Penso que foi na proposição sexta do *Corolário* à *Perspetiva* de Euclides que demonstrámos que só por meio de um raio reto e não fletido, mas perpendicular, se veem as partes de um objeto visível com visão nítida e distinta, por esta razão (penso): porque este é o mais forte que se estende do lado do olho[2]. Com efeito, admitiu-se que todo o agente natural age mais rápida e robustamente com o que está próximo, e, por isso, [age] por meio da linha mais curta. Por esta razão, o mais robusto vencendo o mais fraco pela força, é necessário que seja por meio de um raio perpendicular, ou, pelo menos, quando este se quebra por oposição de um meio mais denso, por meio do raio mais curto, que tudo se vê com visão nítida e distinta.

Segundo corrogado. *Em espelhos, uma coisa vê-se com visão nítida e distinta, quando os raios visuais de cada olho, prolongados a direito, são concorrentes.*
Isto foi demonstrado sem margem para dúvidas pelo meu doutíssimo professor Pierre Brissot por meio de inúmeras experiências, perante uma plateia cheia de muitos dos nossos amigos. E, visto, que a capacidade de ver de um dos meus olhos se encontrava diminuída desde a minha juventude, não conseguiu persuadir-me por meio de quaisquer experiências, ainda que, como era justo, não pusesse em dúvida o testemunho de todos os outros com quem me encontrava, mas com ele concordasse

2 Na verdade, Melo provou-o na proposição quinta do seu *Corolário* à *Perspetiva*.

assentirem. Sed tandem quesiui ratione illud ostendere minime contemnenda, quoniam id experientia assequi non poteram. Nempe quecunque res in speculis videntur non plane in iis locis apparent vbi res visiles site sunt, sed intra speculum ipsum meare videntur. Nam et que retro posita sunt, ante nos stare et interuallo quodam post speculum sita esse apparent, quod in nostri vultus imagine perspectum habetur. Hinc ortam illam controuersiam crediderim, num imagines speculum subeant necne. Cum enim visus eas vltra speculum sitas esse diiudicet non alienum a ratione videbatur rerum imagines ea loca subire in quibus apparent, at certe in hac re tametsi visus fallatur. Constat tamen quamcunque rem ex speculis post speculum apparere, vbi visus (ni ex speculi densitudine flecteretur) in directum productus occurreret. At ex vtriusque oculi pupilla in idem signum duo visus emittuntur. Si ergo res apparet in recto visu post speculum producto si non in vtriusque occursu appareret, aut illi nusquam post signum reflexionis occurrerent[172] res vna in | pluribus locis sita videretur ab vnius quidem oculi visu dextra, ab altero vero leua. [S71r] Atque ex speculo quidem integro non nisi vnicum rei visilis conspectus[173] apparet, atque in vnico loco situm. Res igitur quelibet ex speculis visa ibi cernitur vbi ex vtroque oculo producti visus iunguntur.

Lemma prime propositionis. *Ad datam spheram ad datum in ea signum contingens planum ducere*

Sit enim sphera cuius centrum .c. in eaque signum .a. in conuexa superficie propositum est per datum signum .a. planum illam contingens | ducere. Inuento enim [O67r] sphere centro per secundam primi Theodosii quod positum est .c. Connectantur[174] .ca. signa atque ab ipso .a. in duobus diuersis planis per .ca. transeuntibus per vndecimam primi bis repetitam due perpendiculares excitentur .ab. et .ad.

172 **ocurrerent**, occurreret *SO*

173 **conspectus**, conspectum *S*, conspectiu *O*

174 **Connectantur** *O*, Conuertantur *S*

de bom-grado. No entanto, visto que o não conseguia comprovar por experiência, procurei mostrá-lo por meio de um argumento válido, a saber: que todas as coisas que se veem em espelhos não aparecem exatamente nos lugares onde as coisas visíveis se encontram, mas parecem avançar para dentro do próprio espelho, pois o que está atrás parece estar diante de nós, e parece estar situado a alguma distância para lá do espelho, o que é evidente no caso da imagem do nosso rosto. Penso que está aqui a origem daquela controvérsia: se as imagens penetram no espelho ou não? Com efeito, uma vez que o raio visual considera que [as imagens] estão situadas para lá do espelho, não pareceria absurdo que as imagens das coisas estivessem nos lugares em que aparecem. A verdade é que, apesar de o raio visual se enganar a este respeito, contudo, é claro que todas as coisas aparecem em espelhos para lá do espelho, no sítio onde o raio visual prolongado a direito as encontraria, se não se refletisse devido à densidade do espelho). Mas são dois os raios visuais emitidos das pupilas dos dois olhos para o mesmo ponto; logo, se a coisa aparece no raio visual direto prolongado para lá do espelho, se não aparecesse no ponto de encontro de ambos, ou estes não se encontrassem em nenhum sítio para lá do ponto de reflexão, a mesma coisa seria vista situada em muitos lugares; à direita, pelo raio visual de um olho, à esquerda pelo outro. Mas num espelho inteiro não aparece senão uma única visão da coisa visível, e situada num local único. Portanto, qualquer coisa vista em espelhos vê-se onde os raios visuais de cada olho, prolongados, se encontram.

Lema da primeira proposição. *Traçar um plano tangente a uma dada esfera num ponto dado nela.*

[Fig. 125] | Seja uma esfera, com centro C, e seja A um ponto nela, na superfície convexa. Propõe-se estender um plano tangente a ela no ponto dado A. Depois de se achar o centro da esfera, que se designou C, pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, liguem-se os pontos C e A. De A, levantem-se duas perpendiculares [a AC], AB e AD, em dois planos diferentes que passem por CA, pela undécima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], tomada duas vezes.

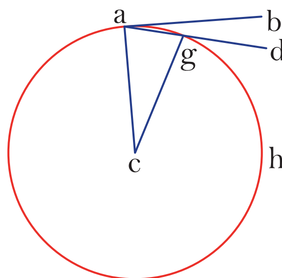


Fig. 125

Dico planum .dab. spheram contingere propositam in .a. signo.

Quoniam enim .ab. et .ad. recte linee sese secant in signo .a. Igitur in vno sunt plano per secundam vndecimi et per quartam eiusdem cum a signo sectionis .ad. et .ab. erecta sit .ac. ad angulos rectos erit .ac. perpendicularis ad subiectum planum .bad. quod in infinitum productum spheram non secabit.

Sin minus secet in .ga. quum non possit in duobus signis contingere per tertiam primi Theodosii producaturque recta linea .ga. in .d. connectanturque[175] .cg. triangulum igitur erit .cag. In vno igitur plano per secundam vndecimi quod spheram secat: communisque sectio circulus erit per primam Theodosii et per sextam eiusdem maior. eiusque centrum. Sphere proposite centrum erit, puta .c. Sit ergo circulus .agh. et quoniam .ca. erecta est <perpendicularis> ad subiectum planum .bad. ergo per secundam diffinitionem vndecimi erit .cagd. rectus. Quare .ad. per cor|ollarium decime sexte tertii circulum .agh. contingit in .a. signo tantum. Non [S71v] igitur in .g. circulum .agh. contingit. nec spheram igitur. cuius oppositum datum est. Planum igitur .bad. spheram non secat. sed contingit tantum in .a. quod erat probandum.

Propositio prima. *A planis conuexis cauisque speculis, visus in equalibus angulis refringuntur.*

Sit prius planum in quo speculum .c. planum atque ab oculo .a. visus .ac. refringitur in .b. obiectum, ab ipsisque .a. et .b. signis perpendiculares .ad. et .bg. ad subiectum planum in quo .c. agantur per vndecimam vndecimi bis repetitam. Erunt per primum a nobis postulatum .dcg. in eadem recta linea.

Dico ergo angulum .acd. equalem esse | angulo .bcg. [O67v]

Nam per secundum postulatum eadem est ratio .ad. ad .bg. que .dc. ad .cg. Quare per decimam sextam quinti vicissim erit .ad.[176] ad .dc. eademque .bg. ad .gc. Sunt autem anguli qui ad .d. et .g.

175 **Connectanturque** *O*, Conuertanturque *S*

176 **.ad.**, .ab. *SO*

Afirmo que o plano DAB é tangente à esfera dada no ponto A.

Com efeito, uma vez que as linhas retas AB e AD se intersectam no ponto A, então, estão num plano, pela segunda do undécimo. E, pela quarta do mesmo, uma vez que AC foi traçada perpendicularmente a AD e AB a partir do seu ponto de interseção; [então,] AC será perpendicular ao plano subjacente BAD, e este, se for prolongado infinitamente, não intersectará a esfera.

Caso contrário, que a corte em G e em A, uma vez que não lhe pode ser tangente em dois pontos, pela terceira do primeiro de Teodósio. Prolongue-se a linha reta GA para D e ligue-se CG. Então, CAG será um triângulo. Portanto, estará num plano, pela segunda do undécimo. Este [plano] corta a esfera, e a interseção será um círculo pela primeira de Teodósio. E, pela sexta do mesmo, [será] um [círculo] maior. E o seu centro será o centro da esfera dada, C. Seja, portanto, o círculo AGH. Uma vez que CA se encontra traçada [perpendicularmente] ao plano subjacente BAD; então, pela segunda definição do undécimo, [o ângulo] CAGD será reto. Por isso, conforme o corolário da décima sexta do terceiro, AD é tangente ao círculo AGH apenas no ponto A. Logo, não é tangente ao círculo AGH, nem à esfera, em G. Mas deu-se [como condição] o oposto disto. Então, o plano BAD não intersecta a esfera, mas é-lhe tangente apenas em A. O que se queria provar.

Proposição Primeira. *Em espelhos planos, convexos e côncavos, os raios visuais refletem-se em ângulos iguais.*

[Fig. 126] | Seja primeiro um plano, onde se encontra o espelho plano C. O raio visual AC, [que se estende] do olho A, reflete-se para o objeto B. Desses pontos A e B, tracem-se AD e BG perpendiculares ao plano subjacente, onde se encontra C, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], tomada duas vezes. Pelo nosso primeiro postulado, D, C e G estarão na mesma linha reta.

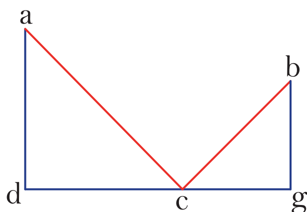


Fig. 126

Afirmo, pois, que o ângulo ACD é igual ao ângulo BCG.

Com efeito, pelo segundo postulado, AD:BG=DC:CG. Por isso, pela décima sexta do quinto, será, *alternando*, AD:DC=BG:GC. Mas os ângulos em D e G são

equales, quia vterque rectus per deffinitionem secundam vndecimi[177]. Perpendiculares enim ad subiectum planum in quo .c. acte sunt .ad. et .bg. et circa illos equales angulos latera sunt proportionalia: ergo per sextam sexti equiangula erunt triangula .acd. .bcg. Atque equalis angulus .acd. angulo .bcg. quod prius erat probandum.

Sit rursus conuexum speculum .abc. oculus .d. a quo visus in .b. productus reflectatur in .g.

Dico angulum .dba. equalem esse angulo .gbc.

Ad datam enim .abc. spheram ad datumque in ea signum .b. per lemma premissum, contingens planum ducatur. A signisque .d. et .g. in sublime positis ad subiectum planum vt in priore demonstratione perpendiculares demittantur .dh gl. erit vt statim probatum est .dbh. angulus | equalis angulo .gbl. a signo igitur .b. in plano in [S72r] quo .dh. et .gl. (sunt autem in eodem plano quoniam ad idem planum perpendiculares et paralele. Igitur per sextam vndecimi atque per diffinitionem paralelarum in eodem plano). Perpendicularis igitur educatur in .b. vtrinque[178] que per quintam primi Theodosii per centrum sphere transibit quod sit .k. communisque eius plani sectio per primam et sextam eiusdem primi Theodosii cum data sphera sit .abc. circulus maior. Angulus ergo .kbh.[179] rectus erit: per diffinitionem perpendicularis et equalis ob id angulo .kbl. a quibus si demas .abk. et kbc. angulos semicirculi equales fient anguli .abh. .cbl. per communem sententiam quibus si addantur .dbh. .gbl. erunt per communem sententiam anguli .dba. .gbc. equales, quod secundo probandum erat.

Demum sit cauum speculum .acb. visusque .dc. refractus in .g. obiectum planum contingens cauum speculum in .c. vt prius et perpen- [O68r] diculares| .dh gl. et .k. centrum sphere. Planum est ex premissa demonstratione angulos .hck. .kcl. rectos equales esse. A quibus demptis

177 **per deffinitionem secundam vndecimi** *S*, per 2am 11mi deffinitionem *O*
178 **utrinque**, vtrunque *SO*
179 **.kbh.**, .lbh. *SO*

iguais, porque cada um deles é reto, pela segunda definição do undécimo (pois AD e BG foram traçadas perpendicularmente ao plano subjacente onde se encontra C). E os lados que compreendem estes ângulos iguais são proporcionais. Então, pela sexta do sexto, os triângulos ACD, BCG serão equiângulos. E o ângulo ACD será igual ao ângulo BCG. O que se queria provar em primeiro lugar.

[Fig. 127] | Novamente, seja ABC o espelho convexo; D, o olho; e que o raio visual, [estendendo-se] deste para B, se reflita para G.

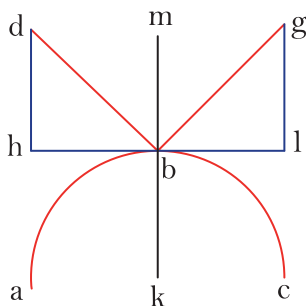


Fig. 127

Afirmo que o ângulo DBA é igual ao ângulo GBC.

Estenda-se um plano tangente à esfera dada ABC no ponto B dado nela, pelo lema anterior. Baixem-se as perpendiculares DH e GL dos pontos D e G, colocados acima, para o plano subjacente, tal como na demonstração anterior. Como se acabou de provar, o ângulo DBH será igual ao ângulo GBL. A partir do ponto B, no plano em que se encontram DH e GL (estas encontram-se no mesmo plano porque são perpendiculares ao mesmo plano e paralelas; logo, pela sexta do undécimo e pela definição de paralelas, estão no mesmo plano), trace-se uma perpendicular [a HL] em B para cada lado. Pela quinta do primeiro de Teodósio, ela passará pelo centro da esfera. Que este seja K. E que a interseção daquele plano com a esfera dada seja o círculo maior ABC, pela primeira e pela sexta do mesmo livro primeiro de Teodósio. Então, o ângulo KBH será reto, pela definição de perpendicular, e será, por isso, igual ao ângulo KBL. Se deles subtraíres os ângulos de semicírculo ABK e KBC, ficarão iguais os ângulos ABH e CBL, por noção comum. Se se lhes acrescentar DBH, GBL, os ângulos DBA, GBC serão iguais, por noção comum. O que se queria provar em segundo lugar.

[Fig. 128] | Finalmente, seja ACB o espelho côncavo, e DC o raio visual, refletido para o objeto G; e um plano tangente ao espelho côncavo em C, tal como anteriormente, e DH e GL as perpendiculares, e K o centro da esfera. É claro, pela demonstração anterior, que os ângulos retos HCK e KCL são iguais. Subtraídos a estes os

semicirculorum angulis erunt .ach. et .bcl. equales. Atque ex prima demonstratione erit angulus .dch. equalis angulo .gcl. demptis igitur .ach. et .bcl. equalibus erunt reliqui .dca. et .gcb. equales adinuicem: quod tertio fuerat probandum. Hec omnia ex secunda demonstratione magis nota sunt: quam vt rursus probari debeant: a planis igitur.

Primum corollarium. *Si linea circulum aut spheram contingat, equos vtrinque angulos efficiet.*

Secundum corollarium. *In planis quidem speculis perpendicularis erecta a signo reflexionis. In cauis vero et conuexis | línea recta que id signum cum centro connectit: in eodem est plano cum visu integro et refracto: et in vtranque partem educta angulum, qui a visu integro et refracto complectitur in duo equalia diuidit.* [S72v]

Prior huius corollarii pars ex demonstrationis ordine statim patet.

Posterior vero facile probatur, et prius in planis speculis. Tenta enim prima demonstrationis hypothesi, si a signo .c. ad subiectum planum

ângulos de semicírculos, [então, os ângulos mistos] ACH e BCL serão iguais. E, pela primeira demonstração, o ângulo DCH será igual ao ângulo GCL. Então, subtraídos os ângulos [mistos] ACH e BCL, os restantes ângulos DCA e GCB serão iguais um ao outro. O que se queria provar em terceiro lugar. Todas estas coisas foram explicadas na segunda [parte desta] demonstração e não é preciso demonstrá-las novamente; logo, em [espelhos] planos...

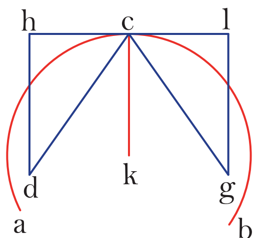
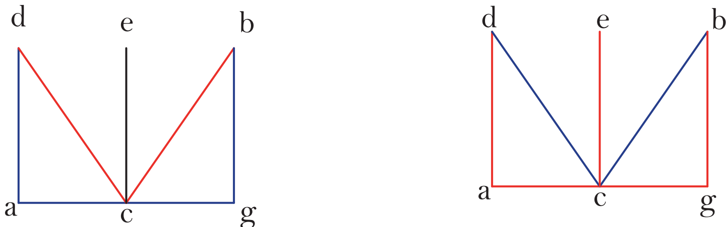


Fig. 128

Primeiro corolário. *Se uma linha for tangente a um círculo ou a uma esfera, fará ângulos iguais para ambos os lados.*

Segundo corolário. *A perpendicular levantada do ponto de reflexão (em espelhos planos) ou a linha reta que liga aquele ponto ao centro (em espelhos côncavos e convexos) está no mesmo plano em que se encontra o raio inteiro e o raio refletido; e, se for traçada para ambos os lados, bisseta o ângulo formado pelo raio inteiro e pelo raio refletido.*

[Figs. 129 e 130] | A primeira parte deste corolário fica desde logo evidente a partir do encadeado da demonstração.



Figs. 129 e 130[3]

Quanto à segunda parte, prova-se facilmente, e, em primeiro lugar, em espelhos planos. Mantida a primeira hipótese da demonstração, se se traçar a perpendicular CE

3 Trata-se de figuras repetidas.

perpendicularis agatur .ce. per duodecimam vndecimi erit per deffinitionem secundam eiusdem angulus .eca. equalis angulo .ecg. puta vterque rectus. Quare subductis .acd. et .bcg. equalibus relinquentur equales anguli .dce.[180] .ecb. quod fuit probandum.

Eodem modo paucis additis si planum contigens speculum conuexum aut cauum ducatur ex demonstrationis parte secunda et tertia. Idem in conuexis et cauis speculis ostendetur auxilio prioris partis huius corollarii.

Corollarium tertium. *Si ab oculo procidant duo visus in diuersa obiecta reflexi atque | ob id in diuersis planis, <in planis> quidem speculis perpendicularis ab oculo in subiectum planum speculum demissa. In cauis vero et in conuexis recta línea ab oculo ad centrum speculi deducta: communis vtriusque plani sectio erit.* [O68v]

Sit enim prius planum speculum .fgh. et ab oculo .a. procidant visus .ab. in .c. .ad. in .e. refracti. Ab oculo vero .a. perpendicularis in subiectum planum demittatur .af.

Dico .af. <esse> communem sectionem duorum planorum .abc. .ade.

Ab ipso enim .a. per tertiam decimam vndecimi vnica tantum .af. recta linea demitti potest ad angulos rectos. Est autem .af. in plano .abg. | per demonstrationem [S73r] prime huius et ob id etiam erit in plano .ade. ergo erit in communi vtriusque plani sectione quod quidem est recta linea .af. per tertiam vndecimi quod fuerat primo probandum.

Sit rursus conuexum speculum .fgh. et ab oculo .a. procidant visus reflexi vt prius. Manifestum est ex demonstratione planum in quo visus .abc. est per centrum speculi transire atque eius cum sphera sectio per primam

---

180 **.dce.**, .ace. *SO*

do ponto C até ao plano subjacente, pela décima segunda [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], o ângulo ECA será igual ao ângulo ECG, pela segunda definição do mesmo, pois cada um é reto. Por isso, subtraídos os [ângulos] iguais ACD e BCG, restarão os ângulos iguais DCE e ECB. O que se pretendia provar.

Da mesma maneira, com algumas adições (se se traçar um plano tangente ao espelho convexo ou côncavo, conforme as segunda e terceira partes da demonstração), provar-se-á o mesmo em espelhos convexos e côncavos, recorrendo à primeira parte deste corolário.

Terceiro Corolário. *Se dois raios visuais se estenderem do olho e se refletirem para objetos diferentes, estando, além disso, em planos diferentes;* [*ter-se-á que*] *a perpendicular baixada do olho para o espelho plano subjacente (em espelhos planos) ou a linha reta traçada do olho para o centro do espelho (em* [*espelhos*] *côncavos e convexos), será a interseção de um e outro plano.*

[Fig. 131] | Em primeiro lugar, seja FGH o espelho plano e, do olho A, estendam-se os raios visuais AB, refletido para C, e AD, refletido para E. Do olho A, baixe-se AF, perpendicular ao plano subjacente.

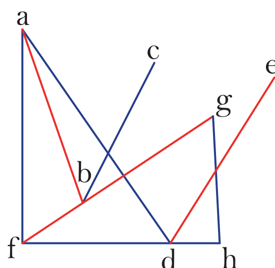


Fig. 131

Afirmo que AF constitui a interseção dos dois planos ABC e ADE.

Com efeito, pela décima terceira [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], de A apenas se pode baixar uma única linha reta perpendicularmente, [que é] AF. Mas AF está no plano ABG pela demonstração da primeira deste [tratado]; e, por isso, também estará no plano ADE. Logo, estará na interseção de ambos os planos, que é a linha reta AF, pela terceira do undécimo. O que se queria provar em primeiro lugar.

[Fig. 132] | Novamente, seja FGH o espelho convexo e, do olho A, estendam-se os raios visuais, refletidos como anteriormente. É manifesto, por demonstração, que o plano em que se encontra o raio visual ABC passa pelo centro do espelho, e que a sua interseção com a esfera será um círculo, pela primeira [proposição] do

primi Theodosii erit circulus, qui sit .gbf. ob id etiam planum in quo .ade. per centrum eiusdem transit. sitque communis sectio circulus .gdh. centrum autem speculi .k. connectanturque .ak. erunt igitur .ak. signa in plano .abc. vt predictum est. et in plano .ade. quare erunt in communi sectione que recta linea erit .ak. quod fuit probandum. Eadem omnino in cauis speculis erit demonstratio.

Premissa huius Theorematis ostensio, quantum ex Theonis reliquiis coniicere potui, reposita et[181] hoc loco latius est a nobis explicata. Sed quoniam ea secundo Euclidis postulato nititur quod non facile ab omnibus conceditur. Aliam excogitauimus non minus concinnam huius Theorematis demonstrationem premissa longe faciliorem: ad quam exponendam prius hoc a nobis Lemma ostendetur.

| **Lemma.** *Si a duobus signis in sublime positis bine recte linee ad vnum in subiecta recta linea, aut circuli conuexa superficie signum demittantur: equales angulos vtrinque efficientes, minime omnium erunt que ab eisdem signis ad aliud quodcumque in subiecto plano signum producuntur.* [O69r]

Esto enim vt ab .ab. signis in subiectam rectam lineam .cd. atque ad eius signum .e. bine recte linee decidant .ae. et .eb. | equales angulos efficientes .ec bed. atque rursus [S73v] cadant vtcumque ad aliud eiusdem recte linee signum: puta .f. bine alie recte linee ex .ab. signis .af. et .fb.

Dico .ae. et .eb. minores esse ipsis .af. et .fb.

Nam a signo .a. in rectam lineam .cd. perpendicularis agatur .ac. per vndecimam primi et in continuum producatur. Tunc quoniam tres anguli .aec. .bea. .deb.

181 **et**, est *SO*

primeiro [livro] de Teodósio. Seja ele GBF. Pela mesma razão, também o plano em que se encontra ADE passa pelo centro da mesma [esfera]. Seja a [sua] interseção [com a esfera] o círculo GDH, e K, o centro do espelho. Ligue-se AK. Então, os pontos A e K estarão no plano ABC e no plano ADE, como se afirmou. Por esta razão, estarão na interseção, que será a linha reta AK. O que se queria provar. No caso de espelhos côncavos, a demonstração será completamente igual.

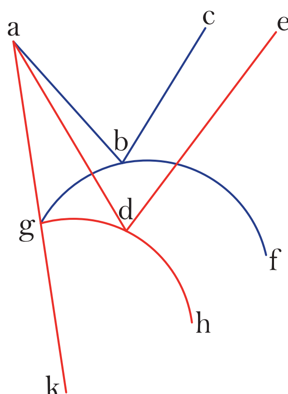


Fig. 132

A prova apresentada deste teorema, restaurei-a e expliquei-a mais extensamente neste lugar, conjeturando quanto pude a partir do que resta de Teão. Mas, uma vez que ela se baseia no segundo postulado de Euclides, que não é prontamente admitido por todos, excogitámos uma outra demonstração deste teorema não menos elegante e de longe mais fácil do que a apresentada. Para a explicar, demonstraremos primeiro o seguinte lema.

Lema. *Se de dois pontos colocados no alto se baixarem duas linhas retas para um ponto na linha reta subjacente ou na superfície convexa do círculo que façam ângulos iguais para os dois lados, elas serão as mais pequenas de todas as que são traçadas dos mesmos pontos para outro ponto qualquer no plano subjacente.*
Suceda que as duas linhas retas AE e EB caiam dos pontos A e B para a linha reta subjacente CD e para um seu ponto E, fazendo os ângulos AEC e BED iguais. Novamente, caiam, de qualquer maneira, noutro ponto da mesma linha reta, por exemplo, em F, outras duas linhas retas, AF e FB, a partir dos pontos A e B.

Afirmo que AE e EB [somadas] são menores do que AF e FB [somadas].

[Fig. 133] | Com efeito, trace-se a perpendicular AC, do ponto A, para a linha reta CD, pela undécima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], e seja prolongada continuamente. Uma vez que os três ângulos AEC, BEA e DEB são iguais

per tridecimam primi Elementorum sunt duobus rectis equales, dempto igitur .eb. angulo, relinquentur .ec bed. duobus rectis minores. Atque ob id angulus .ec. recto[182] minor. Similiter et angulus .bed. producatur recta linea .be. in .g. erit angulus .ceg. per quindecimam primi equalis angulo .bed. recto minor. Est autem angulus vterque qui ad .c. rectus. Igitur per vltimum postulatum primi .ac. et .eg. concurrent ad partes .g. Esto igitur vt occurrant in .g. signo. Quoniam ergo vterque angulus qui ad .c. rectus est: Angulus autem .ceg. ipsi .bed. equalis. Est autem .bed. per hypothesim ipsi .aec. equalis equales ergo sunt anguli .aec gec. At latus .ce. commune. ergo per vicesimam sextam primi erit .ac. equalis ipsi .cg. et .ae. ipsi .eg. Connectantur .fg. et quoniam vterque angulus qui ad .c. rectus est et ob id alter alteri equalis. Latus autem .ac. lateri .cg. <aequalis est> .cf. vero communis ergo per quartam primi erit .fg. equalis ipso .af. Due igitur .gf. et .fb. equales sunt duabus .af. et .fb. Ob id etiam quoniam .ge. et .ae. | sunt equales: erit ipsa .geb. equalis duabus .ae. et .eb. Rursus [O69v] quoniam triangulus est .gbf. ergo per vicesimam primi duo latera .gf. et .fb. maiora sunt reliquo latere .geb. Quare .af. et .fb. duabus .e. et .eb. sunt maiores, quod fuit probandum.

Secundo ab ipsis .ab. signis in sublime ad signum .e. in .ced. circuli conuexa circunferentia iuncte cadant .e. et .eb. angulos equos efficientes .ec bed. Producantur rursus vtlibet | in eandem conuexam circunferentiam bine alie recte linee .af. et .fb. [S74r]

182 **recto**, rectus *SO*

a dois retos, pela décima terceira do primeiro dos *Elementos*; então, subtraído o ângulo AEB, restarão [os ângulos] AEC e BED, menores do que dois retos. Além disso, por isto, o ângulo AEC é menor do que um reto. Da mesma maneira, também o ângulo BED [é menor do que um reto]. Prolongue-se a linha reta BE para G. Pela décima quinta do primeiro, o ângulo CEG será igual ao ângulo BED, [que é] menor do que um reto. Mas cada um dos ângulos em C é reto. Portanto, pelo último postulado do primeiro, AC e EG são concorrentes para o lado de G. Sejam concorrentes no ponto G. Uma vez que cada um dos ângulos em C é reto, mas o ângulo CEG é igual ao BED, e BED é igual a AEC por hipótese; então, os ângulos AEC e GEC são iguais. Mas o lado CE é comum. Logo, pela vigésima sexta do primeiro, AC será igual a CG e AE a EG. Ligue-se F a G. Uma vez que cada um dos ângulos em C é reto, por isso, também são iguais um ao outro. Mas o lado AC [é igual] ao lado CG e CF é comum; então, pela quarta do primeiro, FG será igual a AF. Então, as duas [retas] GF e FB [somadas] são iguais às duas [retas] AF e FB [somadas]. Também por isso, uma vez que GE e AE são iguais, a [reta] GEB será igual às duas [retas] AE e EB [somadas]. Novamente, uma vez que GBF é um triângulo; então, pela vigésima do primeiro, os dois lados GF e FB [somados] são maiores do que o lado restante GEB. Por esta razão, AF e FB [somadas] são maiores do que as duas AE e EB [somadas]. O que se quis provar.

Fig. 133

[Fig. 134] | Em segundo lugar, caiam AE e EB, a partir dos pontos A e B, no alto, na circunferência convexa do círculo CED, encontrando-se no ponto E, fazendo os ângulos [mistos] AEC e BED iguais. Novamente, tracem-se duas outras linhas retas, AF e FB, como se quiser, para a mesma circunferência convexa.

Dico .af. .fb.[183] maiores esse ipsis .ae. .eb.[184]

Connectantur[185] enim .ef. et per signum .e. recta linea circulum contingens educatur. per corollarium decime sexte tertii .geh. erit per eandem angulus .ef. maior angulo .hefd. quare .geh. secabit ipsum .af. vt in .o. et connectantur .ob. In triangulo ergo .bof. erunt per vicesimam primi duo latera .of. et .bf. maiora ipso .ob. Addita ergo .ao. communi erunt .af. et .fb. maiores ipsis .ao. et .ob. Sunt autem .ao. et .ob. per premissam demonstrationem maiores ipsis .e. et .eb. nam per primum corollarium premisse demonstrationis et[186] hypothesim huius primi Theorematis anguli .eg. et .beh. sunt equales. Multo igitur maiores sunt .afb. quam .eb. quod fuerat probandum. Eademque erit in omnibus aliis ostensio.

Corollarium. *Siue ergo in rectam lineam siue in conuexam circunferentiam bine recte linee ad vnum signum iuncte a duobus in sublime signis cadant angulos equos efficientes non poterunt alie ab eisdem signis ad aliud signum produci que equos angulos constituant alioqui priores non essent minime quod est impossibile ex premisso statim Lemmate.* Iam facile patet huius primi Theorematis. Altera quidem breuior atque facilior sine auxilio secundi postulati in planis et conuexis speculis ostensio. Quum enim visus et reflexionis signum (vt est antea | probatum) in eodem sint plano, visus autem qui ad [O70r] equales angulos refringuntur, sint omnium breuissimi, ex premisso statim Lemmate. Ast per primum Corrogatum quodcunque signum breuissimo visu spectatur

183 **.af. .fb.**, .afb. *SO*
184 **.ae. .eb.**, .aeb. *SO*
185 **Connectantur**, Connectantur *SO*
186 **et**, et huius *SO*

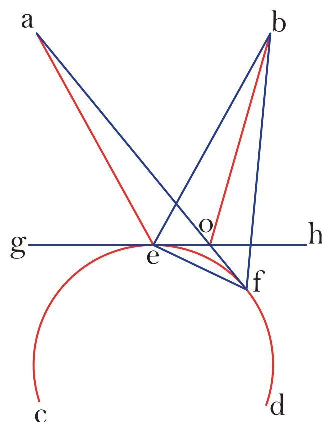


Fig. 134

Afirmo que [as retas] AF e FB [somadas] são maiores do que [as retas] AE, EB [somadas].

Liguem-se E e F e, pelo ponto E, trace-se a linha reta GEH tangente ao círculo, pelo corolário da décima sexta [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Pela mesma [proposição], o ângulo AEF será maior do que o ângulo [misto] HEFD. Por esta razão, GEH cortará AF; seja em O. Ligue-se O a B. Então, no triângulo BOF, os dois lados OF e BF [somados] serão maiores do que OB, pela vigésima do primeiro. Acrescentada AO a um e outro, AF e FB [somados] serão maiores do que AO e OB [somados]. Mas AO e OB [somados] são maiores do que AE e EB [somados], pela demonstração anterior, pois os ângulos AEG e BEH são iguais, pelo primeiro corolário da demonstração anterior e pela hipótese deste primeiro teorema. Portanto, AF e FB [somados] são muito maiores do que AE e EB [somados]. O que se quisera provar. A demonstração será igual em todos os outros [casos].

Corolário. *Se duas linhas retas caírem, a partir de dois pontos no alto, numa linha reta ou numa circunferência convexa, juntando-se num ponto, e fizerem ângulos iguais, não poderão ser traçadas outras dos mesmos pontos para o mesmo ponto que façam ângulos iguais, de outro modo as primeiras não seriam as mais pequenas, o que é impossível pelo lema imediatamente anterior.*

Agora, torna-se clara a prova alternativa deste primeiro teorema, mais breve e fácil, que não utiliza o segundo postulado, em espelhos planos e convexos. Com efeito, uma vez que os raios visuais e o ponto de reflexão (como antes se provou) estão no mesmo plano, e os raios visuais que se refletem em ângulos iguais são, de todos, os mais curtos, de acordo como o lema imediatamente anterior; mas, pelo primeiro corrogado, qualquer ponto é avistado pelo raio visual mais curto que o alcança

qui ex oculo illud pertingit. Visus ergo quibus | res in planis conuexisque speculis [S74v]
cernuntur in equalibus angulis refringuntur. In cauis vero speculis huius demonstrationis adminiculo premissa repetatur ostensio que in precendente demonstratione exposita est. Atque in vniuersum hoc theorema, eiusque Corollarium succedant.

Propositio secunda. *In qualiacumque specula inciderit visus equos efficiens angulos ipse per sese refringitur.*

Sit planum speculum .akc. oculus autem .b. visus .bk. equos efficiens angulos .bka. et .lh.

Dico .bk. in ipsum .b. redire.

Alioqui[187] cadat vt in .d. que omnia clarissime subiecta figura docet. Et quoniam per primam huius visus in equalibus angulis refringuntur, Quum ergo .bk. refringatur in .kd. erit angulus .h. equalis angulo .bka. sed angulo .bka per hypothesim equalis est angulus .lh. et angulus quoque .h. equalis erit ipsi .lh. pars toti quod est impossibile. Non ergo refringitur .bk. in .d. sed in ipsum .b. quod fuit probandum. Eadem in conuexis et cauis speculis demonstratio conueniet.

Propositio tertia. *In qualecunque speculum procidens visus inequales angulos efficiens, in se ipsum non refringetur neque in minori etiam angulo.*

Sit planum speculum .akc. visus autem .bk. procidat maiorem efficiens angulum .f. ipso .hl.

Dico quod .bk. non refringetur in sese, alioqui esset angulus .f. per primam huius equalis angulo .hl. quod est contra hypothesim.

---

187 **alioqui**, aliqui *SO*

vindo do olho; então, os raios visuais, por meio dos quais se veem os objetos em espelhos planos e convexos, refletem-se em ângulos iguais. Quanto ao caso dos espelhos côncavos: deve repetir-se a prova apresentada na demonstração precedente como auxílio para esta demonstração. E sejam bem-sucedidos, em geral, este teorema e o seu corolário.

Proposição segunda. *O raio visual que cair num espelho, seja este de que tipo for, e nele fizer ângulos iguais, reflete-se sobre si mesmo.*

[Fig. 135] | Seja AKC o espelho plano, seja B o olho, e BK, o raio visual que faz os ângulos BKA e [os ângulos] L e H [somados] iguais.

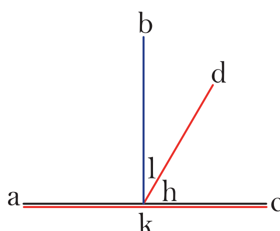


Fig. 135

Afirmo que BK retorna para B.

De outro modo, caia, por exemplo, em D (a figura apresentada mostra tudo isto muito claramente). Uma vez que, pela primeira [proposição] deste [tratado], os raios visuais se reflectem em ângulos iguais; então, como BK se reflecte para KD, o ângulo H será igual ao ângulo BKA. Mas o ângulo [soma de] L e H é igual ao ângulo BKA, por hipótese. E o ângulo H também será igual ao ângulo LH, a parte ao todo, o que é impossível. Portanto, BK não se reflecte para D, mas para B. O que se quis provar. A mesma demonstração servirá para espelhos convexos e côncavos.

Proposição terceira. *O raio visual que incidir num espelho, seja este de que tipo for, e nele fizer ângulos desiguais, não se refletirá sobre si mesmo nem no ângulo mais pequeno.*

[Fig. 136] | Seja AKC o espelho plano; e que o raio visual BK incida, fazendo o ângulo F maior do que o [ângulo soma de] H e L.

Afirmo que BK *não se* refletirá sobre si mesmo. De outro modo, o ângulo F seria igual ao ângulo [soma de] H e L, pela primeira [proposição] deste [tratado], o que é contra a hipótese.

Nec refringetur .bk. in angulo .lh. sin minus refringatur vt in .d. erit ergo per primam[188] huius angulus .h. equalis angulo .f. | Est autem ipso .lh. maior ipse .f. [O70v] angulus .h. ergo maior est ipso .lh. pars toto. Non ergo refringitur .bk. in angulo .lh. Quum autem angulus .f. | ipso .lh. maior sit poterit ab eo equalis ipsi .lh. abscindi per [S75r] vicesimam tertiam primi. Ipse ergo .bk. refringetur in angulo .f. maiore: quod erat probandum. Eadem quoque est in cauis et conuexis speculis demonstratio.

Propositio quarta. *Visus in planis speculis et conuexis refracti neque concurrunt adinuicem neque sunt paraleli.*

Sit prius speculum planum .hk. oculus vero .a. a quo procidant visus refracti in subiectum speculum .ab. quidem in .c. .ad. autem in .e.

Dico .bc. <.de.> visus refractos non esse paralelos adinuicem, neque concurrere ad partes .ce.

---

188 **primam**, primum *SO*

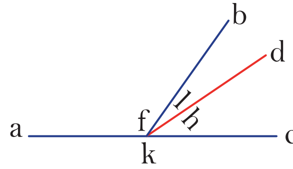


Fig. 136

BK também não se refletirá no ângulo [soma de] L e H. Caso contrário, reflita-se, por exemplo, para D. Então o ângulo H será igual ao ângulo F, pela primeira deste. Mas o ângulo F é maior do que o ângulo [soma de] L e H; logo, o ângulo H é maior do que o [ângulo soma de] L e H, a parte do que o todo. Portanto, BK não se reflete no ângulo [soma de] L e H. Mas, uma vez que o ângulo F é maior do que o ângulo [soma de] L e H, é possível cortar-se dele um [ângulo] igual ao ângulo [soma de] L e H, pela vigésima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Então, BK refletir-se-á no ângulo maior F. O que se queria provar. A demonstração também é a mesma em espelhos convexos e côncavos.

Proposição quarta. *Os raios visuais refletidos em espelhos planos e convexos nem são concorrentes nem são paralelos.*

[Fig. 137] |Em primeiro lugar, seja HK o espelho plano; e A, o olho, do qual se estendam para o espelho subjacente os raios visuais AB, reflectido para C, e AD reflectido para E.

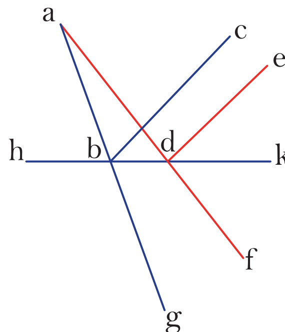


Fig. 137

Afirmo que os raios visuais reflectidos BC e DE não são paralelos nem concorrentes para o lado de C e E.

Vel enim duo visus sunt in eodem plano vel non. Sint primum in eodem plano: cum itaque duo plana vnum in quo speculum: alterum in quo visus sese secent: erunt per tertiam vndecimi elementorum in communi sectione duorum planorum et recta linea que sit .hbdk. Et quoniam triangulum est .abd. duo eius anguli .abd. .adb. per decimam septimam primi elementorum duobus rectis sunt minores. At[189] productis .ab. .ad. in continuum et directum .ab. in .g. .ad. in .f. per decimam tertiam eiusdem bis repetitam .abd. .adb. cum duobus exterioribus .gbd. .fdb. quatuor rectis sunt equales illis duobus interioribus demptis qui sunt minores duobus rectis ab illis quatuor equiualentibus quatuor rectos relinquentur duo exteriores maiores duobus rectis per communem sententiam .gbd. .fdb. igitur maiores sunt duobus rectis. Sed illis scilicet .gbd. .fdb. et equales sunt .cbd. .edb. quod sic probatur.

In primis per primam huius duo anguli .abh. .cbd. equales sunt. At per decimam quintam primi elementorum .gbd. equalis est angulo .abh. quia contra se positi: ergo per primam communem sententiam .gbd. .cbd. equales sunt. De altero sic patet per eandem primam huius .adb. angulus equus est .edk. angulo et .kdf. per eandem decimam quintam | equalis est .adb. angulo ergo et .edk. | .kdf. equales adinuicem sunt. [S75v] [O71r] Per decimam tertiam autem eiusdem duo anguli .kdf. .fdb. duobus rectis equales sunt. Per eamdem et .edk. .edb. anguli duobus rectis equales sunt. Duo ergo anguli .kdf. .fdb. duobus angulis .edk. .edb. equales sunt. Sed probati etiam sunt equales esse .edk. .fdk. illis ergo demptis per communem sententiam remanent .edb. .fdb. adinuicem equales. Duo igitur .cbd. .edb. duobus .fdb. .gbd. equales sunt. Probati sunt autem .gbd. .fdb. maiores duobus rectis. ergo etiam .cbd. .edb. duobus rectis sunt maiores. Si igitur .bc ed. producant versus partes .bd. facient duos angulos ex opposito: puta sub linea .bd. minores duobus rectis per decimam tertiam primi bis repetitam: et maioribus illis duobus rectis demptis per communem sententiam. Quare per quartum postulatum .bc de. concurrent ad partes .db. Non sunt ergo .cb. et .ed. paraleli per definitionem. nec concurrunt ad partes .ce. per vltimam communem sententiam. Quod fuit probandum.

189 **At**, Ad *SO*

Os dois raios visuais, ou estão no mesmo plano, ou não. Estejam primeiro no mesmo plano. Como os dois planos (um, aquele onde está o espelho; o outro, aquele onde estão os raios visuais) se intersectam; [então, os pontos H, B, D, K] estarão na interseção dos dois planos e numa linha recta, que será HBDK pela terceira [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*. E, Uma vez que ABD é um triângulo, os seus dois ângulos ABD e ADB [somados] são menores do que dois rectos, pela décima séptima [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Mas, prolongados AB e AD contínuamente e a direito, AB, para G, e AD para F, os ângulos ABD e ADB, juntamente com os dois ângulos externos GBD e FDB, são iguais a quatro rectos, pela décima terceira do mesmo, tomada duas vezes. Subtraídos aqueles dois [ângulos] internos, que são menores que dois rectos, daqueles quatro que são equivalentes a quatro rectos, sobrarão os dois externos, [que são] maiores do que dois rectos por noção comum. Então, GBD e FDB [somados] são maiores do que dois rectos. Mas CBD e EDB [somados] também são iguais àqueles, ou seja, a GBD e FDB. O que se prova da seguinte forma.

Em primeiro lugar, os dois ângulos ABH e CBD são iguais, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Mas, pela décima quinta do primeiro dos *Elementos,* GBD é igual ao ângulo ABH, porque [são ângulos] contrapostos; logo, pela primeira noção comum, GBD e CBD são iguais. Quanto ao outro ângulo, fica claro da forma seguinte. Pela mesma primeira deste, o ângulo ADB é igual ao ângulo EDK. Mas KDF, pela mesma décima quinta, é igual ao ângulo ADB. Logo, os ângulos EDK e KDF também são iguais. Mas, pela décima terceira do mesmo, os dois ângulos KDF e FDB [somados] são iguais a dois retos; pela mesma, os ângulos EDK e EDB [somados] também são iguais a dois retos; logo, os dois ângulos KDF e FDB [somados] são iguais aos dois ângulos EDK e EDB [somados]. Mas provou-se que EDK e FDK também são iguais; logo, subtraídos estes, sobram EDB e FDB, iguais por noção comum. Então, os dois [ângulos] CBD e EDB [somados] são iguais aos dois [ângulos] FDB e GBD [somados]. Mas provou-se [serem] GBD e FDB [somados] maiores do que dois retos. Logo, CBD e EDB [somados] também são maiores do que dois retos. Então, se se prolongarem BC e ED para o lado de B e D, farão os dois ângulos opostos, quer dizer, debaixo da linha BD, menores do que dois retos, pela décima terceira do primeiro, tomada duas vezes, e depois de se subtraírem os maiores de dois retos, por noção comum. Por esta razão, pelo quarto postulado[4], BC e DE serão concorrentes para o lado de D e B. Portanto, CB e ED não são paralelos, por definição, nem são concorrentes para o lado de CE, pela última noção comum. O que se quis provar.

---

4 Melo refere-se ao postulado das paralelas, que conhecemos como o quinto postulado.

Sint nunc illi duo visus in diuersis planis et sit speculum planum .fgh. in quod procidant visus refracti .ab. in .c. .ad. vero in .e. Dico idem quod prius.

Ducatur enim per vndecimam vndecimi elementorum perpendicularis ab oculo .a. in subiectum planum in quo speculum, que sit .af. et producatur .af. in continuum et directum, a qua abscindatur .fk. per tertiam primi elementorum ipsi .af. equalis, connectanturque .bk dk. Quoniam igitur angulus .afb.[190] rectus est, ex diffinitione perpendicularis ad subiectum planum, et per decimam tertiam primi .kfb.[191] etiam rectus et exinde equalis eidem posite vero sunt due .af fk. equalis est .fb. autem communis, ergo per quartam primi basis .ab. basi .kb. equalis est, et angulus .abf. angulo .fbk. At quum per primam huius .abf. | .cbg.[192] anguli etiam sint equales, [S76r] erunt per communem sententiam .cbg. .kbf. etiam adinuicem equales, et communi addito angulo qui est .cbf. erunt adhuc equales. Sed .cbg. angulus vna cum .cbf. per decimam tertiam primi valet duos rectos ergo etiam .kbf. angulus cum .fbc. angulo valet duos rectos. Quare per decimam quartam eiusdem .kb bc. | in rectam lineam [O71v] erunt. Eodem modo probabis etiam .kd de. in rectam lineam esse. Cum igitur .bc ed. producte concurrant in .k. non sunt paralele nec concurrunt ad partes .ce. quod fuit probandum.

Nunc idem probemus in conuexis speculis. Et in primis quando ambo visus sunt in eodem plano. Sit speculum conuexum .hbodk. in quod incidant visus refracti ab oculo .a. .ab. quidem in .c. et .ad. in .e. Planum igitur in quo .abcde. signa si speculum secuerit sequitur communem sectionem esse circulum per primam primi Theodosii. Connectanturque .bd. signa

---

190 **.afb.**, .afh. *SO*
191 **.kfb.**, .kbf. *SO*
192 **.cbg.**, .bcg. *SO*

[Fig. 138] |Estejam agora os dois raios visuais em planos diferentes, e seja FGH o espelho plano, para o qual se estendam os raios AB, reflectido para C, e AD, reflectido para E. Afirmo o mesmo que anteriormente.

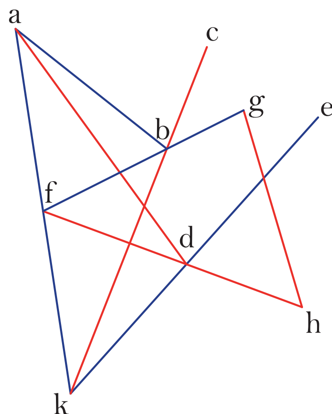


Fig. 138

Trace-se, pela undécima [proposição] do undécimo [livro] dos *Elementos*, uma perpendicular, do olho A, ao plano subjacente onde se encontra o espelho; e seja AF. Prolongue-se AF continuamente e a direito, e desta corte-se FK igual a AF, pela terceira [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*. Ligue-se B a K e D a K. Uma vez que o ângulo AFB é recto, pela definição de perpendicular ao plano subjacente, e KFB também é recto, pela décima terceira do primeiro, e, em consequência, igual ao [ângulo] anterior; e as duas [rectas] AF e FK foram postas iguais, e FB é comum, então, pela quarta do primeiro, a base AB é igual à base KB, e o ângulo ABF, ao ângulo FBK. Mas, uma vez que, pela primeira deste, os ângulos ABF e CBG também são iguais, [então,] CBG e KBF também serão iguais, por noção comum. Acrescentando o ângulo CBF a cada um, permanecerão iguais. Mas o ângulo CBG somado com o [ângulo] CBF vale dois rectos, pela décima terceira do primeiro; logo, o ângulo KBF, somado com FBC, também vale dois rectos. Por esta razão, pela décima quarta do mesmo, KB e BC estarão em linha recta. Do mesmo modo, provarás que KD e DE também estão em linha recta. Uma vez que BC e ED, prolongadas, concorrem em K; então, não são paralelas nem concorrentes para o lado de C e E. O que se quis provar.

[Fig. 139] | Agora, provemos o mesmo em espelhos convexos, e, em primeiro lugar, quando ambos os raios visuais se encontram no mesmo plano. Seja HBODK o espelho convexo, no qual incidam os raios [vindos] do olho A; AB reflectido para C, e AD reflectido para E. Então, se o plano onde se encontram os pontos ABCDE cortar o espelho, segue-se que a interseção é um círculo, pela primeira [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio. Liguem-se os pontos B e D por meio de uma

recta linea, que per secundam tertii elementorum intra circulum cadet, et producatur illa vtrinque in continuum et directum ex parte .b. in .f. et ex parte .d. in .g. Tunc quoniam per primam huius angulus .abh. est equalis angulo .cbo. et angulus .abf. quum pars sit anguli .abh. illo erit minor. erit et minor angulo .cbo. et a fortiori angulo .cbd. rectilineo cuius .cbo. est pars. Et quia .abf. angulus est extrinsecus triangulo .abd. erit ipse per decimam sextam primi maior angulo .adb. et sic .adb. angulus minor erit angulo .cbd.

Quoniam autem .edg. angulus qui pars est anguli .edk. minor est angulo .edk. minor etiam erit angulo .ado. Sunt enim .ado. .edk.[193] per primam huius equales. A fortiori igitur minor erit angulo .adb. rectilineo cuius .ado. pars est. Sed iam probatus est .adb. minor esse angulo .cbd. ergo .edg. etiam illo .cbd. minor est. Quare si adiungamus vtrique angulum communem | .edb. erunt duo anguli .cbd. .bde. [S76v] maiores duobus angulis .bde. .edg. Cum igitur .edg. .edb. anguli equiualeant duobus rectis vt probari potest per decimam tertiam primi erunt duo anguli .cbd.[194] .bde. quum sint illis maiores, maiores duobus rectis. Igitur neque sunt paralele .cb de. per diffinitionem, neque concurrent ad partes .ce. per quartum postulatum eiusdem et vltimam communem sententiam. | quod fuit probandum. [O72r]

193 **.edk.,** .ekd. *SO*
194 **.cbd.,** .ebd. *SO*

linha recta. Esta, pela segunda do terceiro dos *Elementos*, cairá no interior do círculo. Seja prolongada para os dois lados continuamente e a direito: da parte de B para F, e da parte de D para G. Uma vez que, pela primeira [proposição] deste [tratado], o ângulo [misto] ABH é igual ao ângulo [misto] CBO; então, o ângulo ABF não só será menor do que aquele, uma vez que é uma parte do ângulo [misto] ABH, como será menor do que o ângulo [misto] CBO, e, *a fortiori*, do que o ângulo rectilíneo CBD, de que [o ângulo misto] CBO é uma parte. E, uma vez que o ângulo ABF é [um ângulo] externo do triângulo ABD, ele será maior do que o ângulo ADB, pela décima sexta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], e, assim, o ângulo ADB será menor do que o ângulo CBD.

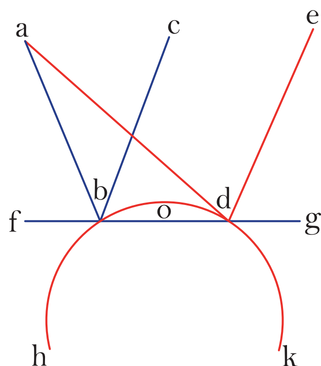


Fig. 139

Por outro lado, uma vez que o ângulo EDG, que é uma parte do ângulo [misto] EDK, é menor do que o ângulo EDK, também será menor do que o ângulo [misto] ADO, pois [os ângulos mistos] ADO e EDK são iguais, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Então, *a fortiori*, será menor do que o ângulo rectilínio ADB, de que [o ângulo misto] ADO é uma parte. Mas já se provou que ADB é menor do que o ângulo CBD; logo, também EDG é menor do que o dito CBD. Por esta razão, se juntarmos a cada um o ângulo comum EDB, os dois ângulos CBD e BDE [somados] serão maiores do que os dois ângulos BDE e EDG [somados]. Uma vez que os ângulos EDG e EDB [somados] são equivalentes a dois rectos, como pode ser provado pela décima terceira do primeiro, então, os dois ângulos CBD e BDE [somados] serão maiores do que dois rectos, uma vez que são maiores do que aqueles. Então, CB e DE não são paralelos, por definição, nem são concorrentes para o lado de C e E, pelo quarto postulado[5] do mesmo [livro primeiro dos *Elementos*] e pela última noção comum. O que se quis provar.

5 Melo refere-se ao postulado das paralelas.

Sint rursus duo visus refracti non in eodem plano, sed in diuersis, sit itaque speculum conuexum .lbd. cuius centrum .k. duo visus ab oculo .a. reflectantur vt prius .ab., scilicet in .c. .ad. in .e. et connectantur .bk. signa, connectantur etiam .ak. eritque .ak. recta linea per tertium corollarium prime huius communis sectio duorum planorum .abc., .ade. tunc per Lemma primum prime demonstrationis primi Theorematis huius in plano .abc. ad sphoeram (vel si mauis ad conuexum speculum cuius centrum .k.) contingens planum illa in signo .b. ducatur cuius et .abc. plani communis sectio per tertiam vndecimi sit .fh. Eritque per decimam octauam tertii elementorum .fbk. angulus rectus. Vel igitur .bc de. sunt in eodem plano, vel non.

Si non per diffinitionem paralelorum, nec erunt paralele nec concurrent. Si vero sint in eodem plano, dico eas non esse paralelas nec concurrere ad partes .ec. producatur .bc. in continuum et directum vsque in .g. Tunc quum per primam huius, et primum eiusdem corollarium .abf. angulus sit equalis angulo. .cbh. et .abf. minor recto, quia alioque .ab. non reflecteretur in .bc. sed in seipsam vt deduci potest per secundam huius. Erit et .abf. minor angulo .fbk. nam probatus est .fbk. esse rectus. Sed per quindecimam primi elementorum angulus .fbg. minor est angulo .fbk. necessario secabit linea .bc. producta angulum .fbk. Quare et producta secabit per primum corrogatum in primum elementorum latus sibi oppositum in triangulo .abk. quod est .ak. Sit itaque punctus sectionis .g. tunc quoniam tria signa .g|de. sunt in plano in quo due linee .bc.[195] [S77r]

195 **.bc.**, .be. *SO*

[Fig. 140] | Novamente, estejam os dois raios visuais refletidos, não no mesmo, mas em planos diferentes. Seja, portanto, LBD o espelho convexo, com centro em K. Os dois raios visuais que partem do olho A reflitam-se, como antes, a saber: AB para C e AD para E. Liguem-se os pontos B e K; liguem-se ainda A e K. A linha reta AK será, pelo terceiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], a interseção dos dois planos ABC e ADE. Então, pelo primeiro lema da primeira demonstração do primeiro teorema deste [tratado], trace-se, no plano ABC, na superfície da esfera (ou, se preferes: na superfície do espelho convexo com centro em K), um plano tangente a esta no ponto B, e que a interseção dele com o plano ABC seja FH, pela terceira [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. FBK será um ângulo reto, pela décima oitava do terceiro dos *Elementos*. Então, ou BC e DE estão no mesmo plano, ou não.

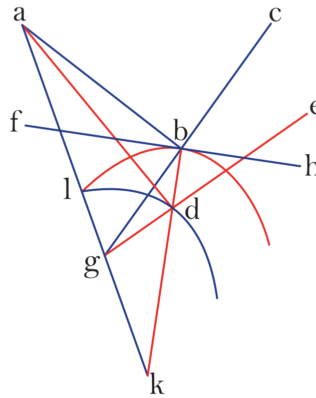


Fig. 140

Se não estão, não serão paralelas nem concorrentes, pela definição de paralelas. Mas se estiverem no mesmo plano, afirmo que elas não são paralelas nem são concorrentes para o lado de E e C. Prolongue-se BC continuamente e a direito, até G. Uma vez que, pela primeira [proposição] deste [tratado] e pelo seu primeiro corolário, o ângulo ABF é igual ao ângulo CBH, e ABF [é] menor do que um reto (porque, de outro modo, AB não se refletiria para BC, mas sobre si mesmo, como se pode concluir pela segunda deste); então, ABF também será menor do que o ângulo FBK (pois se provou que FBK é reto). Mas, pela décima quinta do primeiro dos *Elementos*, o ângulo FBG é menor do que o ângulo FBK. Necessariamente, o prolongamento da linha BC cortará o ângulo FBK. Por esta razão, o prolongamento da [mesma] linha também cortará, pelo primeiro corrogado ao primeiro dos *Elementos*, o lado oposto, no triângulo ABK, que é AK. Seja G o ponto de interseção. Uma vez que os três pontos G, D e E estão no plano em que também estão as duas linhas BC e

.de. (que posite sunt in eodem plano). Est enim .g. in linea producta .bc. et similiter in plano .ade. ergo sunt in communi sectione duorum planorum que per tertiam vndecimi est recta linea. Quare quum .gbc. .gde. due recte linee concurrunt in signo .g. sequitur eas non esse paralelas, nec concurrere ad partes .ce. quod erat propositum.

Sed iam probatum .gde. signa esse in plano .ade. De .d. et .e. signis non | est [O72v] dubium, de .g. autem patet, nam probata est per tertium corollarium prime huius .ak. esse in plano .ade. .g. autem positum est esse in linea .ak. ergo etiam est in plano .ade. igitur. Quare si duo visus refracti .ab. in .bc. et .ad. in .de. sint in diuersis planis, sint tamen in eodem plano .bc de. non concurrent ad partes. ce. Nec sunt paralele per vltimam communem sententiam quod fuit probandum. Et sic prepositio in vniuersum demonstrata est.

Lemma propositionis quinte sequitur. *Si bine recte linee intra circulum acte equales circuli sectiones vtrinque interceperint, paralele erunt producte recte linee. Si vero inequales arcus interciderint recte linee in infinitum producte versus eam partem ocurrent ad quam minor arcus interceptus est.*
Sint enim primo .abcd. recte linee intra circulum producte, cuius arcus equales intercepti sint .ac. et .bd.

Dico .ab. et. cd. paralelas esse.

Quoniam enim arcus .ac. equalis est arcui .bd. addito communi .ab. arcu erit arcus .abd. equalis arcui .cab. Quare per vicesimam septimam tertii erunt duo anguli qui ad .d. et .c. rectilinei equales. Et quoniam quadrilaterum est .abdc. intra circulum existens, ergo per vicesimam secundam tertii, anguli qui ad .a et .d. duobus rectis sunt equales. Angulus vero qui ad .d. probatus est equalis angulo qui ad .c. Duo igitur

DE (que foram colocadas no mesmo plano), pois G se encontra no prolongamento da linha BC e, da mesma maneira, no plano ADE; então, estão na interseção dos dois planos, a qual, pela terceira do undécimo, é uma linha reta. Por esta razão, uma vez que as duas linhas retas GBC e GDE são concorrentes no ponto G, segue-se que elas não são paralelas, nem concorrentes para o lado de C e E. O que era o objetivo.

Prova-se agora que os pontos G, D e E estão no plano ADE. Dos pontos D e E não restam dúvidas. Quanto a G, o mesmo fica claro, dado que se provou, pelo terceiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], que AK está no plano ADE. Mas também se admitiu que G está na linha AK; logo, também está no plano ADE; por conseguinte [etc.]. Por esta razão, se dois raios visuais reflectidos, AB para BC, e AD para DE, estiverem em planos diferentes, mas BC e DE estiverem no mesmo plano, não serão concorrentes para o lado de C e E, nem são paralelos, pela última noção comum. O que se quis provar. E assim a proposição foi demonstrada universalmente.

Segue-se o lema da proposição quinta. *Se duas linhas rectas traçadas no interior de um círculo cortarem sectores de círculo iguais de ambos os lados, as linhas rectas, prolongadas, serão paralelas. Se cortarem arcos desiguais, as linhas rectas prolongadas infinitamente encontram-se para o lado em que se cortou o arco menor.*

[Fig. 141] | Em primeiro lugar, sejam AB e CD as linhas rectas traçadas dentro de um círculo, sendo cortados os arcos iguais AC e BD.

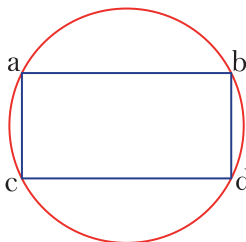


Fig. 141

Afirmo que AB e CD são paralelas.

Uma vez que o arco AC é igual ao arco BD, se se acrescentar em comum o arco AB, o arco ABD será igual ao arco CAB. Por esta razão, pela vigésima séptima [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*], os dois ângulos rectilíneos em C e D serão iguais. E, uma vez que ABDC é um quadrilátero inscrito no círculo; então, pela vigésima segunda do terceiro, os ângulos em A e D [somados] são iguais a dois rectos. Mas provou-se que o ângulo em D era igual ao ângulo em C. Então, os dois

anguli qui ad .a. et .c. duobus rectis sunt equales | quare per vicesimam octauam primi .ab. et .cd. sunt paralele. [S77v]

Sint rursus arcus .ac. et .bd. inequales et .bd. minor.

Dico .ab. et .cd.[196] occurere ad partes .bd.

Connectantur .ac. et .bd. vt prius. Et quoniam .bd. minor est ipso .ac. arcu addito igitur communi .ab. arcus .abd. minor erit arcu .bac. Quare per vltimam sexti apud Zambertum maior erit angulus .bdc. rectilineus angulo .acd. In eadem enim ratione se habent in qua arcus .cab. ad arcum .abd. Si igitur addatur angulus qui ad .a. communis duo anguli qui ad .a. et .d. maiores erunt duobus angulis qui ad .a. et .c. Sed illi per vicesimam secundam, tertii sunt duobus rectis equales. Ii ergo qui ad .a. et .c. erunt duobus rectis minores. Quare .ab. et .cd. concurrent ad partes .bd. per vltimum postulatum. quod fuerat probandum. | [O73r]

Propositio quinta. *In cauis speculis siue ad centrum siue ad circunferentiam, siue extra circunferentiam oculus extiterit, hoc est non inter centrum et circunferentiam, visus refracti concurrent.*

Sit cauum speculum .acd. centrum autem sphaere sit .b. ponaturque oculus in .b. et procidant ex .b. visus in circunferentiam .ba.bc.bd. equales, igitur qui ad signa .acd. sunt anguli, adinuicem sunt equales. Semicirculi enim sunt per vicesimam septimam tertii elementorum. Visus igitur refracti per se ipsos refringentur .ba.bc.bd. per secundam huius. Hinc autem patet quod in .b. concurrant.

196 **.cd.,** .ed. *SO*

ângulos em A e C [somados] são iguais a dois rectos, razão pela qual, pela vigésima oitava do primeiro, AB e CD são paralelas.

[Fig. 142] | Novamente, sejam AC e BD arcos desiguais, e BD menor.

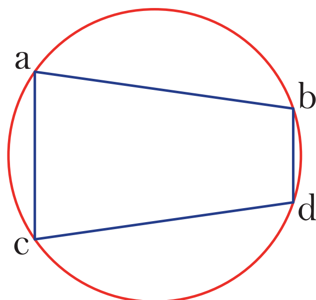


Fig. 142

Afirmo que AB e CD se encontram para o lado de B e D.

Ligue-se A a C e B a D, como anteriormente. Uma vez que [o arco] BD é menor do que [o arco] AC, se se acrescentar o arco AB a cada um, o arco ABD será menor do que o arco BAC. Por esta razão, pela última [proposição] do sexto [livro dos *Elementos*] na edição de Zamberto, o ângulo rectilíneo BDC será maior do que o ângulo ACD, pois estão na mesma razão em que o arco CAB está para o arco ABD. Então, se se acrescentar o ângulo em A a cada um, os dois ângulos em A e D [somados] serão maiores do que os dois ângulos em A e C [somados]. Mas aqueles [somados], pela vigésima segunda do terceiro, são iguais a dois rectos. Logo, os ângulos em A e C serão menores do que dois rectos. Por esta razão, AB e CD serão concorrentes para o lado de B e D, pelo último postulado. O que se quisera provar.

Proposição quinta. *Em espelhos côncavos, se o olho estiver, ou no centro, ou na circunferência, ou fora da circunferência (isto é, não entre o centro e a circunferência), os raios visuais reflectidos são concorrentes.*

[Fig.143] | Seja ACD o espelho côncavo e seja B o centro da esfera. Ponha-se o olho em B. Estendam-se, de B para a circunferência, os raios visuais iguais BA, BC e BD. Então, os ângulos nos pontos A, C e D são iguais entre si, pois são [ângulos] de semicírculo, pela vigésima sétima do terceiro dos *Elementos*. Logo, os raios visuais BA, BC e BD, refletidos, refletem-se sobre si mesmos, pela segunda [proposição] deste [tratado]. Em consequência, fica claro que são concorrentes em B.

Sit iam oculus in circunferentia, et cauum speculum cuius centrum .b. visusque ab .a. oculo in circunferentia existente, procidant in eodem plano .ac. et .ad. ex eadem parte centri. Sitque arcus .cd. interceptus inter visus integros minor arcu .ac. et per consequens arcu .ad. Dico .ac. et .ad. visus his adiectis determinationibus refractos concurrere. Quoniam enim | arcus .cd. minor erit arcu .ac. et visus .ac. [S78r] refractus refringitur in maiori angulo per secundam huius puta .acd. igitur occurret circunferentie speculi vltra signum .d. sitque in .f. Eadem ratione quum sit .ad. arcus maior .ac. ipsique .ac. equalis sit arcus .cf. quia similis sectio eiusdem circuli. Igitur arcus .ad. maior est arcu .cf. et a fortiori, igitur maior arcu .df. .ad. igitur non refringetur citra .f. sed vltra, vtpote in .g. Tunc quoniam .ad. reflectitur in maiore angulo, puta .adf. secabit igitur .dg. angulum .adf. Quare per vnum ex corrogatis a nobis in primum Euclidis: puta (si in triangulo angulus aliquis secetur aliqua recta linea, ea tandem producta occurret linee subtense eidem angulo) .dg. producta secabit ipsam, .cf. sit in .h. Visus igitur .cf. et .dg. refracti concurrunt in .h. quod fuit probandum. Si ergo in eodem plano visus procidant in cauum speculum ex eadem parte centri, et fuerit | arcus interceptus inter visus directos minor arcu comprehenso a [O73v] breuiore visu directo, visus illi refracti concurrent.

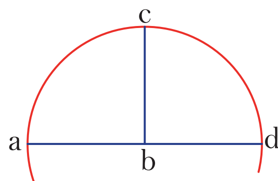


Fig. 143

[Fig. 144] | Agora, esteja o olho na circunferência. Seja um espelho côncavo, com centro em B; e que os raios visuais AC e AD se estendam, do olho A, situado na circunferência, no mesmo plano, do mesmo lado do centro.[6] E que o arco CD, cortado pelos raios incidentes, seja menor do que o arco AC e, em consequência, do que o arco AD. Afirmo que os raios visuais AC e AD, refletidos, acrescentadas estas restrições, são concorrentes. Uma vez que o arco CD será menor do que o arco AC, e o raio visual AC, refletido, se reflete no ângulo maior, pela segunda [proposição] deste [tratado][7], por exemplo [no ângulo maior] ACD, então, encontrará a circunferência do espelho para lá do ponto D; seja em F. Pela mesma razão, uma vez que o arco AD é maior do que [o arco] AC, e o arco CF é igual ao [arco] AC, porque é um arco semelhante do mesmo círculo; então, o arco AD é maior do que o arco CF e, *a fortiori*, maior do que o arco DF. Então, AD não se reflete para cá, mas para lá, de F; seja em G. Uma vez que AD se reflete no ângulo maior, por exemplo ADF; então, DG cortará o ângulo ADF. Por esta razão, por um dos nossos corrogados ao primeiro de Euclides (a saber: «se, num triângulo, um ângulo for cortado por uma linha reta; esta, prolongada, encontrará a linha subtensa pelo mesmo ângulo»), a linha DG, prolongada, cortará a linha CF; seja em H. Então, os raios visuais CF e DG, refletidos, são concorrentes em H. O que se quis provar. Logo, se se estenderem raios visuais para um espelho côncavo, no mesmo plano, do mesmo lado do centro, e o arco cortado entre os raios inteiros for menor do que o arco compreendido pelo raio direto mais curto, esses raios visuais, refletidos, serão concorrentes.

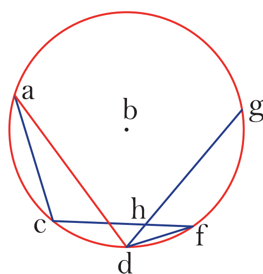


Fig. 144

6 Ou seja, AC e AD estão no mesmo semicírculo, traçado o diâmetro a partir de A e passando por B.

7 Francisco de Melo engana-se, devendo citar a proposição terceira.

Dico secundo quod si visus in eodem plano decidant in speculum cauum non ad easdem partes centri, fuerit autem interceptus arcus inter visus directos minor vtroque arcu quem continent visus directi, visus etiam refractos concurrere. In speculo enim cauo cuius centrum .b. vt prius oculo in .a. posito in circunferentia decidant visus .ac. et .ad. sitque arcus .cd. minor vtroque arcu .ac. et .ad. Dico visus .ac. et .ad. refractos concurrere. Nam quoniam .ad. arcus maior est arcu .cd. et visus .ad. refringitur in angulo .adc. maiore .ad. igitur visus refractus occurret cinrcunferentie vltra .c. signum, vt puta in .g. Eadem ratione .ac. visus qui comprehendit arcum maiorem .ca.[197] refractus occurret circunferentie vltra signum | .d. et secabit [S78v] angulum .acd. Quare vt statim premissa demonstratione probatum est secabit chordam subtensam, puta .gd. sitque in .h. signo. Visus igitur .ac. et .ad. refracti concurrunt in .h. signo, quod secundo fuerat probandum. Atque hinc patet adiectis his determinationibus que in his demonstrationibus adducte sunt propositionis demonstratio, nam etsi oculus ponatur extra circunferentiam seruenturque predicte adiectiones eadem prorsus erit ostensio.

Iam tertio dico quod si visus integri procidentes in cauum speculum oculo existente in circunferentia ambo reflectantur ad partes oppositas oculo et arcus comprehensus ab vtroque visu integro fuerit maior arcu comprehenso ab vtroque visu refracto visus semper concurrere, alioqui si fuerint equales, paralelos esse. Si minor, nec parallelos esse, nec concurrere refractos. Oportet autem visus esse in eodem plano. Si enim vt in premissa demonstratione ex vtraque centri parte procederent visus .ac. et .ad. reflectantur ad | partes opposi- [O74r] tas ipsi .a. fueritque .cad. arcus maior arcu .ef. concurrent per secundam partem Lemmatis huius propositionis .ce. et .df. ad partes .ef. Si vero fuerint equales eidem per priorem eiusdem Lemmatis partem paraleli erunt visus .ce. et .df.

---

197 **.ca.,** .cd. *SO*

[Fig. 145] | Em segundo lugar, afirmo que, se os raios visuais caírem num espelho côncavo, no mesmo plano, mas não do mesmo lado do centro, e se o arco cortado entre os raios visuais diretos for menor do que cada um dos arcos que os raios diretos compreendem, os raios visuais refletidos também são concorrentes. Num espelho côncavo com centro em B, como antes, colocado o olho em A, na circunferência, caiam os raios visuais AC e AD; e seja o arco CD menor do que ambos os arcos AC e AD. Afirmo que os raios visuais AC e AD, refletidos, são concorrentes. Uma vez que o arco AD é maior do que o arco CD, e o raio visual AD se reflete no ângulo maior ADC; então, o raio visual AD, refletido, encontrará a circunferência para lá do ponto C, seja em G. Pela mesma razão, o raio visual AC que compreende o arco maior CA, refletido, encontrará a circunferência para lá do ponto D, e cortará o ângulo ACD. Por esta razão, como ficou provado na demonstração apresentada imediatamente acima, cortará a corda subtensa GD, seja no ponto H. Então, os raios visuais AC e AD, refletidos, são concorrentes no ponto H. O que se queria provar em segundo lugar. E daqui fica clara a demonstração, acrescentadas as restrições que foram aduzidas a estas demonstrações; pois, se se puser o olho fora da circunferência, e se mantiverem os aditamentos referidos, a prova será exatamente a mesma.

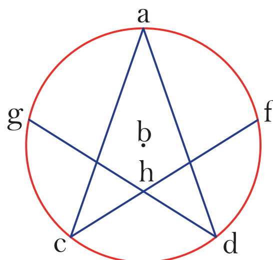


Fig. 145

[Fig. 146] | Afirmo agora, em terceiro lugar, que se os raios visuais incidentes se estenderem para um espelho côncavo, estando o olho na circunferência, e ambos se refletirem para lados opostos, relativamente ao olho, e o arco compreendido por ambos os raios visuais incidentes for maior do que o arco compreendido por ambos os raios refletidos, os raios são sempre concorrentes; se forem iguais, são paralelos; se [o arco compreendido por ambos os raios visuais incidentes] for menor, os raios refletidos não são paralelos nem são concorrentes. É necessário, porém, que os raios estejam no mesmo plano. Se, tal como na demonstração anterior, os raios visuais AC e AD se estenderem, de cada lado do centro, refletindo-se para lados opostos, relativamente a A, e o arco CAD for maior do que o arco EF; [então,] CE e DF serão concorrentes para o lado de E e F, pela segunda parte do lema desta proposição. Se forem iguais, os raios visuais CE e DF serão paralelos, pela primeira parte do mesmo

Si minor concurrent ad partes .a. atque ob id nec paraleli sunt nec concurrunt ad partes .ef. quod fuerat probandum. Promptissima vero sunt horum omnium exempla. Si quis depingat hexagonum intra circulum, octogonum, decagonum, et huiusmodi multa angula equilatera, in quibus planum est videri quecunque, hic breuibus complexus sum.

Dico quarto quod si procidentes visus in cauum speculum integri maiorem arcum complectantur simul semicirculo, et refringantur ad partes oppositas ipsi oculo, visus semper refractos hu|iusmodi concurrere. Nam posita vt prius hypotesi [S79r] addito tamen quod arcus .cad. sit semicirculo maior, connectantur .cd. eritque per hypothesin arcus .cefd. minor semicirculo et a maiore vterque arcus .cef. .dfe. minor erit semicirculo. Quare vterque angulus rectilineus recto[198] minor erit per tricesimam primam tertii. Quare per vltimum postulatum primi elementorum .ce. et .df. concurrent ad partes .ef. quod fuit probandum.

198 **recto,** minor *SO*

lema. Se [o arco CAD for] menor [do que o arco EF], serão concorrentes para o lado de A e, por isso, não são paralelos nem são concorrentes para o lado de E e F. O que se queria provar. Os exemplos de todos estes factos são imediatos: basta alguém desenhar um hexágono inscrito num círculo, ou um octógono, ou um decágono, ou outros equiláteros de muitos ângulos deste tipo, nos quais se vê com clareza aquilo tudo o que aqui expus sucintamente.

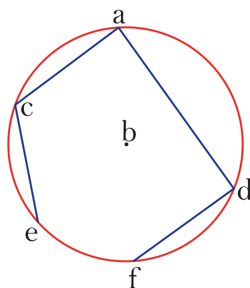


Fig. 146

[**Fig. 147**] | Afirmo em quarto lugar que, se os raios visuais incidentes que se estendem para um espelho côncavo compreenderem em simultâneo um arco maior do que um semicírculo, e se refletirem para lados opostos, relativamente ao olho, os raios visuais refletidos desta maneira são sempre concorrentes. Tomando-se a hipótese como antes, mas acrescentando-se que o arco CAD seja maior do que um semicírculo, ligue-se C a D. O arco CEFD será, por hipótese, menor do que um semicírculo, e ambos os arcos CEF e DFE serão, *a maiore,* menores do que um semicírculo. Por esta razão, cada um dos ângulos retilíneos [CDF e DCE] será menor [do que um reto], pela trigésima primeira [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Por esta razão, pelo último postulado do primeiro dos *Elementos,* CE e DF são concorrentes para o lado de EF. O que se quis provar.

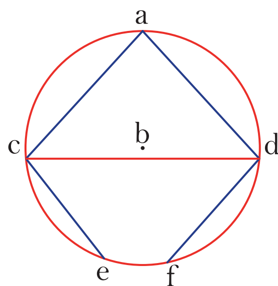


Fig. 147

Atque ex his omnibus patet quibus adiectis determinationibus proposita propositio in eodem plano verum habeat. nam his omissis facile opposita probari possunt.

Esto iam oculus .a. in speculi caui circunferentia visus .ab. et .ac. in diuersis planis. Dico in duobus planis quibuscunque duos tamen visus concurrere, puta hos qui ad angulos equales incidunt.

Sit enim speculi centrum .f. planum autem vnum in quo visus .ab. refractus in .d. signum, ita vt .abd. semicirculum absoluat. sitque aliud planum secans idem speculum, atque vtriusque plani sectio per vltimum corollarium prime huius sit .afd. diameter sphaere. Incidant autem .ac. | visus efficiens angulum in eo plano equalem [O74v] angulo quem efficit .ab. cum speculo. Manifestum est ex predictis demonstrationibus quum .acd. et .abd. sint circuli eiusdem sphaere maiores et per consequens equales. Et cum etiam reflectantur in equalibus angulis, et sit .bd. sectio in qua reflectitur circuli quarta pars, erit etiam sectio in qua reflectitur .ac. circuli quarta pars. Quare .acd. visu totus semicirculus absoluetur. Concurrent igitur .ac. et .ab. visus.

Iam secundo .ab. visus refractus plus quam semicirculum abscindat vtpote sectionem .abdg. sitque refractus, secetque .bg. visus refractus .afd. communem vtriusque plani dati sectionem in .e. Incidat autem .ac. in altero plano ad angulos equales iis quos efficit .ab. visus. Dico | .ac. refractum occurrere ipsi .bg. in .e.[199] [S79v]

199 **.bg. in .e.,** .bgde. *SO*

E, de todas estas coisas, fica claro que restrições se devem acrescentar para a proposição apresentada ser verdadeira no mesmo plano, pois, se elas forem deixadas de lado, facilmente se pode provar o oposto.

[Fig. 148] |Esteja agora o olho A na circunferência de um espelho côncavo, e os raios visuais AB e AC em planos diferentes. Afirmo que em quaisquer dois planos, apenas dois raios visuais são concorrentes, nomeadamente, os que incidem em ângulos iguais.

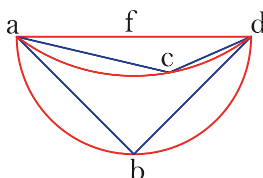


Fig. 148

Seja F o centro do espelho e seja o plano, no qual [se encontra] o raio visual AB, refletido para o ponto D, tal que corte o semicírculo ABD. Seja outro plano secante ao mesmo espelho, e que a interseção dos planos seja o diâmetro da esfera AFD, pelo último corolário da primeira [proposição] deste [tratado]. Incidam [os raios visuais no espelho]; o raio AC fazendo neste [segundo] plano um ângulo igual ao ângulo que AB faz com o espelho. Uma vez que ACD e ABD são círculos maiores da mesma esfera e, em consequência, são iguais; e ainda, uma vez que [os raios visuais AC e AB] se refletem em ângulos iguais, e o arco BD em que se reflete [o raio AB] é um quadrante do círculo; é evidente, pelas demonstrações anteriores, que o arco em que se reflete AC também será um quadrante de círculo. Por esta razão, todo o semicírculo é cortado pelo raio visual ACD. Portanto, AC e AB são concorrentes.

[Fig. 149] | Em segundo lugar, o raio visual AB, refletido, corte mais do que um semicírculo, seja a secção ABDG. Seja refletido, e o raio visual refletido BG corte a interseção dos dois planos dados, AFD, em E. Incida AC, no outro plano, em ângulos iguais aos que faz o raio visual AB. Afirmo que AC, refletido, encontra BG em E.

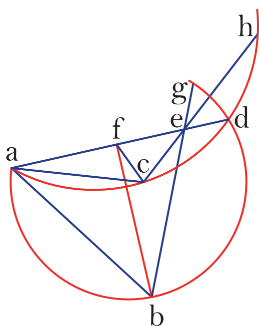


Fig. 149

In plano enim .acd. producatur .ce. in continuum et directum vsque in .h. connectanturque .c. et .b. signa cum centro .f. speculi, erunt igitur .fc. et .fb. equales, quia a centro ad circumferentiam eiusdem sphaere .af. communis .ac. equalis ipsi .ab. (subtenduntur enim similibus equalium circulorum sectionibus quia equiangulis ex hypotesi) ergo per octauam primi .h. angulus .baf. equalis erit angulo .caf. et per quartam eiusdem quum sint .ba. et .ac. equales et .ae. communis, erit .ce basis equalis .be. basi atque rursus quum .ce. et .be. sint equales et .fc. et .fb. ac .fe. communis erit angulus .fce. equalis angulo .fbe. Est autem totus .fcdh. equalis angulo toti .fbdg. quia vterque sectionum equalium. Igitur reliqui .hcd. .gbd. equales sunt. Et sectio .cdh.[200] similis sectioni .bdg. Quum ergo .ac. debet reflecti in simili sectione ipsi .bdg. (ut sepe in premissis demonstrationibus ostensum est. Igitur .ac. refringetur in .ceh. et per consequens occurret ipsi .bg. in .e.[201] signo, quod secundo fuit assumptum.

Iam tertio .ab. reflectatur in .g. vt sit totus arcus minor semicirculo .abgd. et productus occurrat ipsi .af. diametro | producte in .e. Cadat etiam .ac. visus vt prius ad consimiles angulos. Dico .ac. occurrere .bge. in .e. signo. [O75r]

Connectantur enim .ce. .fc. .fb. secet autem .ce. ipsam .cd. circunferentiam in .h. et ostendes sicut in premissa demonstratione .ac. necessario reflecti in .cho. quare scribendi tedio ab eius demonstratione supersedeo. Patet enim ex his quod oculo posito in circunferentia caui speculi, si visus refractus occurrit diametro eiusdem, duos visus refractos concurrere in duobus diuersis planis existentes.

Iam demum dico duos tantum visus in duobus planis procidentes posse concurrere, et non plures. Nam dato opposito in duobus | planis .acd. .abd. [S80r] concurrant tres visus .ac. .ab. .ag. sintque .ac. et .ag. in duobus planis diuersis qui concurrere non possunt, nisi in .afd. recta linea (Nihil enim aliud habent commune illa plana) sit vt in .e. Si ergo .ab. concurrit cum .ce. et .ge. cum non habent aliud signum

200 **.cdh.,** .cdb *SO*
201 **.bg. in .e.,** .bgde. *SO*

No plano ACD, prolongue-se CE continuamente a direito para H. Liguem-se os pontos C e B ao centro do espelho, F. Então FC e FB serão iguais, porque [traçadas] do centro para a circunferência da mesma esfera. AF [é] comum. AC [é] igual a AB (porque são subtensas por arcos semelhantes de círculos iguais, uma vez que são equiangulares, por hipótese). Logo, pela oitava [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], o ângulo BAF será igual ao ângulo CAF. Pela quarta do mesmo, uma vez que BA e AC são iguais e AE é comum, a base CE será igual à base BE. Novamente, uma vez que CE e BE são iguais, e FC e FB também [são iguais], e FE é comum, [então,] o ângulo FCE será igual ao ângulo FBE. Mas o ângulo todo FCDH é igual ao ângulo todo FBDG, uma vez que ambos são ângulos de arcos iguais. Então, os restantes [ângulos] HCD e GBD são iguais, e o arco CDH é semelhante ao arco BDG. Uma vez que AC deve refletir-se num arco semelhante a BDG (como muitas vezes se mostrou nas demonstrações anteriores); então, AC refletir-se-á para CEH, e, por conseguinte, encontra BG no ponto E. O que foi assumido em segundo lugar.

[Fig. 150] | Em terceiro lugar, AB reflita-se para G, tal que o arco todo seja menor do que o semicírculo ABGD. Estendido [AB, refletido], encontre o prolongamento do diâmetro AF em E. Caia também o raio visual AC, como antes, em ângulos iguais. Afirmo que AC [refletido] encontra BGE no ponto E.

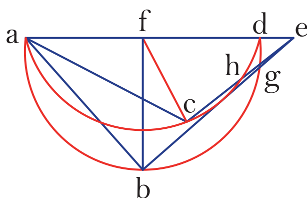


Fig. 150

Ligue-se C a E, F a C e F a B. Corte CE a circunferência CD em H. Também mostrarás, como na demonstração anterior, que AC se reflete necessariamente em CHE, razão por que, por tédio de escrever, fico-me pela demonstração anterior. É evidente de tudo isto que, colocado o olho na circunferência de um espelho côncavo, se o raio visual, refletido, encontra o diâmetro dela, dois raios visuais refletidos, que estão em dois planos diferentes, são concorrentes.

[Fig. 151] | Finalmente, afirmo que apenas podem ser concorrentes dois raios visuais que se estendam em dois planos, e não mais. Caso contrário, nos dois planos ACD e ABD sejam concorrentes os três raios visuais AC, AB e AG. Estejam em dois planos diferentes AC e AG, que não podem ser concorrentes, senão na linha reta AFD (pois aqueles planos não têm mais nada em comum), seja em E. Se AB [refletido] concorre com CE e GE, uma vez que [estes] não possuem nenhum outro ponto

commune preter .e. occurrit igitur in .e. Sitque .ab. in eodem plano in quo .ag. Connectanturque .bf. et .fg. et cum angulus totus .fba. sit equalis toti .fbd. demptis angulis qui a visu directo et reflexo cum circunferentia continentur equalibus. Erit angulus .abf. equalis angulo .fbe. Eodem modo probabis quod angulus .age. bifariam scindatur a recta linea .fg. Quum ergo in triangulo .abe. angulus qui ad .b. bifariam secetur, et eum <...> secet basim .ae. in .f. erit per tertiam sexti eadem ratione .ab. ad .be. que .af. ad .fe. ob id etiam eadem erit ratio .ag. ad .ge. que .af. ad .fe. Quare per vndecimam quinti eadem erit ratione .ab. ad .be. que .ag. ad .ge. Et quoniam .ab. minor est .ag. minor erit ratio per octauam quinti .ab. ad .be. quam .ag. ad eandem .ge. Cum autem sit .be maior .ge. per septimam et octauam tertii, erit per eandem octauam quinti maior ratio .ag. ad .ge. quam eiusdem .ag. ad .be. Multo igitur maior erit ratio .ag. ad .ge. quam .ab. ad .be. sed et eadem vt probatum est, quod est impossibile. Non igitur visus plures quam duo in duobus planis procidentes in cauum speculum refracti concurrunt quod fuerat probandum. Atque hinc in vniuersum patet, quam propositum Theorema verum sit.

| **Theorema sextum.** *In cauis speculis si ad medium centri et circunferentiae positus fuerit oculus quandoque visus refracti concurrent, quandoque non concurrent.* [O75v]

Esto cauum speculum cuius centrum .e. planum | idem speculum secans per .e. per centrum [S80v] transiens, cuius et speculi communis sectio erit circulus cuius idem erit .e. centrum. In eo igitur duo arcus equales continui semicirculo minores capiantur .ab. et .ac. Ipsis vero .ab. et .ac. arcubus bifariam dissectis per trigesimam tertii .ab. quidem in .d. .ac. in .g. connectantur .dg. et quum totus .ab. sit equalis toti .ac. erunt eorumdem dimidia .da. et .ag. equalia per communem sententiam, et ob id erit .dg. equalis ipsis .ab. et .ac. et minor semicirculo

comum exceto E, então encontra-os em E. Esteja AB no mesmo plano em que [se encontra] AG. Ligue-se B a F e F a G. Uma vez que o ângulo todo [misto] FBA é igual ao [ângulo] todo [misto] FBD, tirados os ângulos iguais que são compreendidos pelo raio direto e [pelo raio] reflexo com a circunferência, o ângulo ABF será igual ao ângulo FBE. Da mesma maneira provarás que o ângulo AGE é bissetado pela linha reta FG. Uma vez que, no triângulo ABE, o ângulo em B é bissetado e [visto que a linha reta que bisseta o ângulo também] corta a base AE em F; então, pela terceira do sexto, AB:BE=AF:FE. Por isso, também AG:GE=AF:FE. Por essa razão, pela undécima do quinto, AB:BE=AG:GE. Ora, uma vez que AB é menor do que AG, [então,] AB:BE<AG:BE, pela oitava do quinto. Mas, sendo BE maior do que GE, pela sétima e oitava do terceiro, [então,] AG:GE>AG:BE, pela mesma oitava do quinto. Então, AG:GE será muito maior do que AB:BE. Mas também é igual, como se provou, o que é impossível. Então, não é possível que mais do que dois raios visuais que se estendam em dois planos, refletidos num espelho côncavo, sejam concorrentes. O que se queria provar. E, por conseguinte, fica patente em geral a veracidade do teorema proposto.

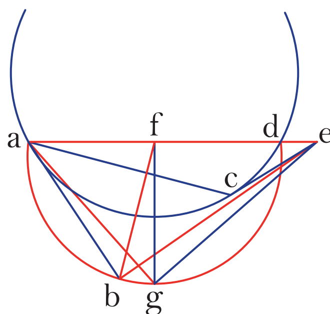


Fig. 151

Teorema sexto. *Em espelhos côncavos, se o olho estiver colocado entre o centro e a circunferência, os raios visuais reflectidos, por vezes são concorrentes, por vezes não são concorrentes.*

[Fig. 152] | Seja um espelho côncavo com centro em E, [e seja] um plano secante ao dito espelho que passe pelo centro E. A interseção deste com o espelho será um círculo, com centro no mesmo [ponto] E. Então, tomem-se nele dois arcos adjacentes iguais menores do que um semicírculo, AB e AC. Depois de se bissectar os arcos AB e AC, pela trigésima [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*], AB em D e AC em G, ligue-se D a G. Uma vez que o [arco] todo AB é igual ao [arco] todo AC, as metades de ambos, DA e AG, serão iguais, por noção comum. Por isso, [o arco] DG será igual a[os arcos] AB e AC, e [será] menor do que um semicírculo, por hipótese.

per hypotesim, quum .dg. recta linea cadat vltra .a. signum si connectantur .bd. et .da. facile ostendetur ex vno a nobis corrogato in primum Euclidis .dg. secat[202] ipsum .ab. Eadem etiam ratione secabit ipsam .ac. secet igitur .ab. in .h. et .ac. in .l. ipsique .dg. equalis arcus ponatur .gcf.

Iam si oculus ponatur in .h., dico visus .ha. .hg. refractos concurrere.

Nam vt in premissis probatum est, refringetur .ha. in .ac. quoniam positus est arcus .bda. equalis arcui .agc. Atque ob id angulus .had. equalis angulo .lag. Ob id etiam refringetur .hg. in .gf. quam posuimus equalem ipsi .dg. quare et equalem ipsi .ac. connectantur .cg. signa. Cum igitur .dg. sit minor semicirculo maior erit angulus .dgc. angulo .dga. visus ergo .hg. per tertiam huius refringetur in angulo .hgc. Non cadit autem citra .c. secabit igitur angulum .lgc. ergo per corrogatum in primum Euclidis, secabit latus oppositum .lc. sit in .k. Iam ergo duo visus .ha. hg. refracti concurrunt in .k. quod fuit primum probandum.

Sit secundo vt prius planum secans speculum cauum atque ex [eadem] parte centri .e. due recte linee parallelae[203], per trigesimam primam primi, producantur .ab. et .cd. .cd. quidem propinquior centro. atque ob id per decimam quintam tertii maior .ab. Arcus autem .ac. interceptus | inter .ab. et .cd. rectas [O76r] lineas, sit minor arcu .ab. Ipsi vero .ab. equalis arcus ponatur .ag. qui maior erit ipso .ac. ex hypotesi, atque ob id .g. signum erit vltra .c. ipsi vero .dc. qui maior est | ipso .ab. et sibi equali .ag. Atque a maiore ipso .cg. ponatur equalis [S81r] .cgh. erit .h. signum vltra .g. et quum non cadat recta linea .ch. supra .cd. nec citra .cd. per decimam quintam tertii, esset enim ipsa minor. Secabit igitur angulum .gcd. quare et latus oppositum .ag. secabit, sit[204] in .f. Oculo igitur posito

202 **secat**, secant *SO*
203 **paralellae,** paraleli *S*, paralleli *O*
204 **sit,** sed *SO*

Uma vez que a linha recta DG cai para lá do ponto A, se se ligar B a D e D a A, facilmente se demonstrará, por um dos nossos corrogados ao primeiro de Euclides, que DG corta AB. Pela mesma razão, também cortará AC. Então, corte AB em H e AC em L. Ponha-se o arco GCF igual a[o arco] D[A]G.

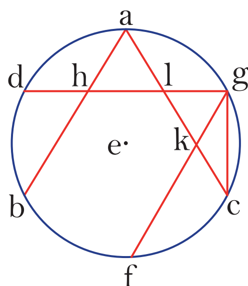


Fig. 152

Afirmo que, se se colocar o olho em H, os raios visuais HA e HG reflectidos são concorrentes.

Como se provou nas [demonstrações] anteriores, HA refletir-se-á para AC, uma vez que o arco BDA foi posto igual ao arco AGC. Por isso, o ângulo [misto] HAD [é] igual ao ângulo [misto] LAG. Por isso, HG também se refletirá para GF, que pusemos igual a DG, donde, igual, também, a AC. Liguem-se os pontos C e G. Uma vez que D[A]G é menor do que um semicírculo, então o ângulo [misto] DGC será maior do que o ângulo [misto] DGA. Portanto, o raio visual HG refletir-se-á no ângulo [misto] HGC, pela terceira deste. No entanto, não cai aquém de C; portanto, cortará o ângulo LGC. Então, pelo corrogado ao primeiro de Euclides, cortará o lado oposto LC; seja em K. Então, os dois raios visuais HA e HG refletidos são concorrentes em K. O que se quis provar primeiro.

[Fig. 153] | Em segundo lugar, seja um plano secante a um espelho côncavo, como antes. Do [mesmo] lado do centro E, tracem-se as duas linhas rectas paralelas AB e CD, pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]; CD, mais próxima do centro, e, por isso, maior do que AB, pela décima quinta do terceiro. Seja o arco AC, compreendido entre as linhas rectas AB e CD, menor do que o arco AB. Ponha-se o arco AG igual ao arco AB. Ele será maior do que [o arco] AC, por hipótese. Por isso, o ponto G estará para lá de C. De um arco maior do que [o arco] CG, ponha-se [o arco] CGH, igual ao [arco] DC, que é maior do que [o arco] AB, e do que [o arco] AG, seu igual. O ponto H estará além de G. Uma vez que a linha recta CH não cai sobre CD nem para cá de CD, pois, pela décima quinta do terceiro, ela seria menor do que esta última; então, cortará o ângulo GCD. Por esta razão, cortará também o lado oposto AG, seja em F. Então, colocado o olho

in .f. si visus cadant .fc. .fa. refringentur in .cd. et .ab. vt sepe probatum est. Quare non concurrent, sed paralleli erunt. Quod fuit secundo probandum.

Lemma propositionis septimae. *Si in trianguli vno latere signum aliquod contingat inter terminos eius lateris interceptum, atque continuum latus ad partem oppositam producatur, et suscipiatur aliquod signum in continuo latere extra triangulum, quod cum contingente signo connectatur, necesse est vt ea recta linea tertium trianguli latus secet.* Vt si in triangulo .abc. inque eius latere .ac. intercipiatur signum .d. contingens, et .ab. latus producatur versus partes .b. in .e. connectanturque .de. dico .de. rectam lineam secare reliquum latus .bc.

Non est enim .de. recta eadem ipsi recte linee .ac. alioqui cum .ac. occurrat ipsi .ae. in .a. si etiam occurrat eidem in .e. due recte linee superficiem concluderent, quod est contra vltimam communem sententiam. Connectantur autem .db. signa, non erit .de. ipsi .bd. eadem, alioqui quum .bd. occurrat ipsi .be. in .b. si etiam occurrerent in .e. idem haberetur contra communem vltimam sententiam. Secabit igitur angulum .bdc. quare et latus .bc. oppositum in triangulo .bdc. secabit, quod fuit probandum.

em F, se caírem os raios visuais FC e FA, reflectir-se-ão para CD e AB, como se provou muitas vezes. Por esta razão, não serão concorrentes, mas paralelos. O que se quis provar em segundo lugar.

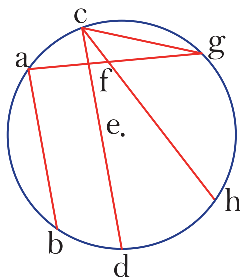


Fig. 153

Lema da proposição sétima. *Se um ponto for contingente num lado de um triângulo e estiver entre as extremidades do mesmo lado, e o lado adjacente for prolongado para a parte do lado oposto contrária, e se se tomar um ponto no lado adjacente [prolongado], fora do triângulo, e se se ligar este ao ponto contingente, é forçoso que esta linha reta corte o terceiro lado do triângulo.*

[Fig. 154] | Se se tomar, no triângulo ABC e no seu lado AC, o ponto contingente D, e o lado AB for prolongado para a parte de B, até E, e se se ligar D e E, afirmo que a linha recta DE corta o restante lado BC.

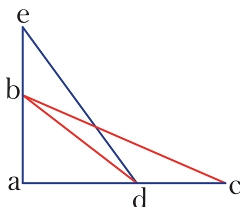


Fig. 154

A recta DE não é a mesma que a linha recta DC, de outro modo, uma vez que DC encontra DE em D, se também a encontrasse em E, duas linhas rectas incluiriam uma superfície, o que é contra a última noção comum. Liguem-se os pontos D e B. DE não será a mesma que BD; de outro modo, uma vez que BD encontra BE em B, se também se encontrassem em E, o mesmo sucederia, contra a última noção comum. Então, cortará o ângulo BDC. Por esta razão, [cortará] também o lado BC oposto no triângulo BDC. O que se quis provar.

Theorema septimum. *Celsitudines et profunditates a planis speculis conuerse*[205] *videntur.*

| Antequam hoc theorema ostendatur necesse est vt ex postulatis in perspectiua petamus ea que sublimiore radio spectantur sublimiora, que humiliore humiliora spectari. Sic etiam de aliis differentiis positis, puta dextra, sinistra, ante et post. In proposito vero vocamus radium sublimiorem, qui[206] in oculo cum demissa[207] perpendiculari ab oculo in subiectum planum in quo speculum maiorem angulum efficit. Eundem etiam vocamus anteriorem in vniuersum eodem modo iudicandum erit secundum alias differentias positas. Exempla sunt promptissima, et in sequentibus creberrima occurrent. Iam ostendatur Theorema propositum. **[O76v; S81v]**

Sit .bc. quodcunque primo fastigium ad angulos rectos. Si tandem producatur supra speculum planum .de. ita vt sit .bcd. perpendicularis supra .de. oculus autem sit .a. .b. signum sublimius .c. vero humilius.

Dico .bc. spectari conuersum, hoc est .c. sublimius .b. vero humilius.

Cadant enim duo visus .af. et .ag., sitque angulus .fae. statuo enim .ae. perpendicularem in subiectum planum, minor angulo .gae.

Dico in primis si .af. visus refringatur et .ag. .af. videri .b. .ag. vero ipsum .c.

Nam dato opposito vt in subiecta e regione figura patet, refringatur .af. in .c. et .ag. in .b. quoniam in triangulo .dcfg. signum intercipitur inter .df. quod connexum est cum .b. signo quod in .dc. recta linea extra triangulum producta existit. Igitur per Lemma prepositum huic propositioni .gb. secat .cf. visus scilicet refracti concurrent a planis speculis, quod est contra quartum Theorema huiusmodi. Non enim refringitur .af. in .c. et .ag. in .b. sed converso modo .af. in .b. et .ag. in .c. Quare videtur .b. signum .af. radio humiliore .c. vero .ag. radio sublimiore. Igitur per postulata perspectiue .b. humilius videbitur .c. vero sublimius.

---

205 **conuerse,** conuexe *SO*
206 **qui,** cui *SO*
207 **cum demissa,** in subiecta *SO*

Teorema sétimo. *Alturas e profundidades vêem-se invertidas em espelhos planos.*
Antes de se provar este teorema, é necessário que reclamemos as coisas seguintes, de entre as coisas que postulámos na *Perspetiva*: coisas que se vêem sob raios visuais mais elevados aparecem mais elevadas, coisas que se vêem sob raios visuais mais baixos aparecem mais baixas; o mesmo também acerca das outras diversas posições, como direita-esquerda, anterior-posterior[8]. Neste teorema, chamamos «raio mais elevado» àquele que, no olho, faz um ângulo maior com a perpendicular baixada do olho para o plano subjacente em que está o espelho. Também chamamos a esse «anterior». Em geral, deve pensar-se do mesmo modo a respeito das outras diferenças mencionadas. Os exemplos são claros e repetir-se-ão no seguimento. Demonstremos agora o teorema proposto.

Em primeiro lugar, seja BC uma altura perpendicular qualquer, tal que, prolongada por cima do espelho plano DE, BCD fique perpendicular a DE. Seja A o olho. Seja B o ponto mais acima e C o ponto mais em baixo.

Afirmo que BC se vê invertido, isto é, C mais acima, B mais abaixo.

Caiam os dois raios visuais AF e AG, e seja o ângulo FAE menor do que o ângulo GAE (construo AE perpendicular ao plano subjacente).

Afirmo, em primeiro lugar que, se o raio visual AF e AG se reflectirem, se avista B por meio de AF e [se avista] C por meio de AG.

[Fig. 155] | Verificando-se o contrário, como fica claro pela figura colocada ao lado, reflicta-se AF para C e AG para B. Uma vez que, no triângulo DCFG, se toma um ponto entre D e F, que está ligado ao ponto B, que está na linha recta DC, prolongada para fora do triângulo, então, pelo lema anteposto a esta proposição, GB corta CF, ou seja, raios visuais reflectidos em espelhos planos são concorrentes, o que então é contra o quarto teorema. Logo, AF não se reflecte para C, nem AG para B. Pelo contrário, AF [reflecte-se] para B e AG para C. Por esta razão, vê-se o ponto B por meio do raio mais baixo AF, e C por meio do raio mais elevado AG. Portanto, pelos postulados da *Perspetiva,* B vê-se mais baixo e C mais elevado.

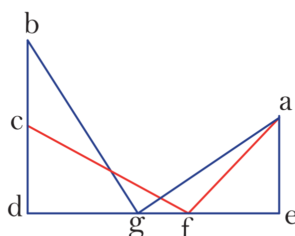


Fig. 155

8 Veja-se o início do *Corolário* de Francisco de Melo à *Perspetiva*, mais acima.

Quod etiam aliter ostendi potest. Si .bd. producatur | in continuum et directum [S82r] [et producantur] .ag. et .af. quousque occurrent ipsi .bd. producte .ag. in .h. et .af. in .k. Cum | enim .afe. angulus sit recto minor, quoniam triangulum rectangulum [O77r] est .aef. cuius angulus qui ad .e. rectus. Est autem per decimam quintam primi .dfk. equalis angulo .afe. sibi aduersum iuncto. Minor igitur erit angulus .dfk. recto et angulus .fdk. rectus. Quare .dk. et .afk. occurrent. Eadem ratione probabitur .ag. et .dk. concurrere. Nunc quoniam per primam huius angulus .age. equalis est angulo .cgd. Est autem angulus .age. per decimam quintam primi, equalis angulo .hgd. Angulus igitur .cgd. equalis erit angulo .hgd. et angulus .cdg.[208] equalis angulo .hdg. quia vterque rectus, et .dg. latus commune. Igitur per vicesimam sextam primi erit .dc. equalis ipsi .dh. Eodem modo probabitur .dk. equalis ipsi .db. et per consequens per communem sententiam .cb. equalis .hk. Videtur igitur .cb. in .hk. Vnumquodque enim videtur visu recto etiamsi refringatur. apparet tamen in recto visu (ut ex diffinitione visus patuit). Videbitur igitur .b. in .k. .c. in .h. .k. autem humilius est quam .h. igitur .b. humilius spectatur quam ipsum .c. quod fuit probandum.

Rursus si fuerit .bc. profunditas aliqua, et speculum .de. sublime ipsum .bc. ad angulos rectos eidem speculo .af. et .ag. visus refracti cadentes in .de. speculum planum sublime .af. quidem propinquior ipso .ae. ad angulos rectos existente super speculum quam .ag. Manifestum ex diffinitione .af. sublimiorem esse ipso .ag. Et sicut in premissa demonstratione ostensum est, ipso .af. videbitur .b. .ag. vero ipsum .c. et per consequens .b. quod humilius est, sublimius spectabitur ipso .c. et ostensio prorsus eadem erit sicut precedens, si modo figuram inuerteris. Celsitudines igitur.

208 **.cdg.,** .cgd. *SO*

[Fig. 156] | Isto também pode ser mostrado de outra forma, se se prolongar BD continuamente a direito, e assim também AG e AF até encontrarem o prolongamento de BD: AG, em H, e AF, em K. Uma vez que o ângulo AFE é menor do que um recto (porque AEF é um triângulo rectângulo com o ângulo recto em E); e [o ângulo] DFK é igual ao ângulo AFE, que lhe é verticalmente oposto, pela décima quinta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]; então, o ângulo DFK será menor do que um recto. Mas, o ângulo FDK [é] recto. Por esta razão, DK e AFK serão concorrentes. Pela mesma razão se provará que AG e DK são concorrentes. Agora, uma vez que, pela primeira [proposição] deste [tratado], o ângulo AGE é igual ao ângulo CGD, e o ângulo AGE é igual ao ângulo HGD, pela décima quinta do primeiro; então, o ângulo CGD será igual ao ângulo HGD, e o ângulo CDG igual ao ângulo HDG, porque cada um deles é recto. DG é o lado comum. Então, pela vigésima sexta do primeiro, DC será igual a DH. Do mesmo modo se provará que DK é igual a DB e, por conseguinte, que CB é igual a HK, por noção comum. Então, CB vê-se em HK, pois qualquer objecto se vê por meio de um raio recto, e ainda que se reflicta, é visto no raio visual recto (como ficou claro pela definição de raio visual). Portanto, B ver-se-á em K e C em H. Mas K é mais baixo do que H; logo, B vê-se mais baixo do que C. O que se quis provar.

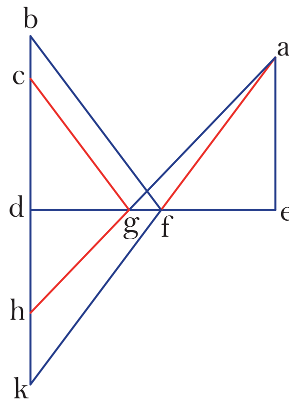


Fig. 156

De novo, se BC for uma profundidade, e DE um espelho acima [do olho]; se BC for perpendicular ao dito espelho; AF e AG, os raios reflectidos que caem no espelho plano elevado DE; AF mais próximo do que AG, estando AE perpendicular ao espelho. É evidente, por definição, que AF é mais elevado do que AG. Assim, tal como se mostrou na demonstração anterior, por meio de AF ver-se-á B e por meio de AG, ver-se-á C. Em consequência, B, que é mais baixo, ver-se-á mais elevado do que C. A prova directa será igual à anterior, desde que invertas a figura. Logo, alturas...

| **Propositio octaua.** *Fastigia et profunditates a conuexis speculis conuersa uidentur.* [S82v] Sit .bc. primo fastigium ad angulos rectos, si tandem producatur in plano in quo speculum conuexum .de. cuius quidem speculi et .bca. plani communis sectio sit .dgfe. circuli portio. Ab ipso autem .a. oculo | in planum subiectum .de. perpendicu- [O77v] laris cadat .al. duoque visus .af.[209] propinquior ipsi .al. et .ag. remotior.

Dico in primis .af. non refringi in .c. et .ag. in .b. quoniam dato opposito connectantur .gf. signa, et vtrinque recta linea producatur, quoniam .gbd. angulus recto minor est. Si enim rectus esset cum rectus qui ad .d. esset .bg. ipsi .de. parallela. Nunquam ergo cum .b. sit extra circulum, circulum secaret .de. cuius oppositum ponitur. Supponimus enim .de. circuli diametrum, aut diametro paralelam. angulus autem .bgd. recto minor est non, enim equalis nec maior, quia is per primam huius equalis est angulo .age. qui recto minor est, alioqui in seipsum reflecteretur, per secundam huius quare .fg. et .bd. concurrunt. Sit igitur in .h. <Vt> iam in precedentis iam Theorematis ostensione probabatur .gb. et .fc.[210] concurrunt visus refracti in conuexis speculis, quod est contra quartum Theorema huius. Si igitur .af. et .ag. visibus .bc. signa videantur, .b. signum videbitur visu .af. .c. vero visu .ag. et per definitionem et postulata perspectiue .b. visu humiliore .c. vero sublimiore visu atque ob id .b. humilius ipso .c. spectabitur. quod fuit probandum.

Eodem modo probatis si figuram huius demonstrationis inuerteris, profunditates a conuexis speculis conuersas videri. Fastigia igitur et cetera.

209 **.af.,** .al. *SO*
210 **.fc.,** .fe. *SO*

Proposição oitava. *Alturas e profundidades vêm-se invertidas em espelhos convexos.*

[Fig. 157] | Agora, seja BC a altura perpendicular (desde que prolongada) ao plano em que se encontra o espelho convexo DE. Que a interseção do espelho e do plano BCA seja a porção de círculo DGFE. Do olho A, caia a perpendicular AL para o plano subjacente DE, assim como os dois raios visuais, AF, mais próximo de AL, e AG, mais afastado.

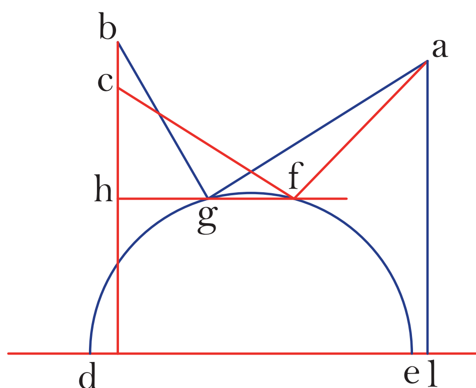


Fig. 157

Em primeiro lugar, afirmo que AF não se reflete para C nem AG para B. Sucedendo o contrário, liguem-se os pontos G e F, e prolongue-se a linha reta para ambos os lados. Uma vez que o ângulo GBD é menor do que um reto – pois, se fosse reto, dado o ângulo em D ser reto, BG seria paralela a DE; logo, nunca cortaria o círculo DE, por B estar fora do círculo, ao contrário do que se assumiu (supomos que DE é o diâmetro de um círculo, ou uma paralela ao diâmetro) –, mas o ângulo [misto] BGD é menor do que um reto (pois não é igual [a um reto] nem maior [do que um reto], porque, pela primeira [proposição] deste [tratado], é igual ao ângulo AGE, e este é menor do que um reto; de outra forma, refletir-se-ia sobre si mesmo, pela segunda deste); então, FG e BD são concorrentes, seja em H. Como já se mostrou na prova do teorema anterior, os raios visuais GB e FC, refletidos em espelhos convexos, são concorrentes, o que é contra o teorema quarto deste [tratado]. Logo, se os pontos B e C se virem por meio dos raios visuais AF e AG, o ponto B será visto por meio do raio visual AF, e [o ponto] C pelo raio visual AG. Assim, por definição e pelos postulados da *Perspetiva*, B [será visto] pelo raio visual mais baixo, e C, pelo raio visual mais elevado, e, por isso, B será visto mais baixo do que C. O que se quis provar.

Da mesma maneira provarás, se inverteres a figura desta demonstração, que as profundidades se veem invertidas em espelhos convexos. Logo, alturas etc.

Lemma propositionis nonae. *Si in triangulo atque in vno eius latere intercipiatur contingens signum, eidemque lateri paralelus per terminum communem reliquis lateribus excitetur, in eoque*[211] *suscipiatur | signum extra triangulum susceptum, et cum contingente signo connectatur, necesse est vt secetur latus quod duas paralelas rectas lineas connectit.* [S83r]

In triangulo enim .abc. inque eius latere .ac. suscipiatur contingens signum .d. atque per .b. signum per trigesimam primam primi paralelus excitetur .be. in quo suscipiatur signum .e. Connectanturque .de. signa.

Dico .bc. rectam lineam | secari ab ipsa .de. [O78r]

Connectantur enim .db. Manifestum est .de. rectam lineam non esse eandem ipsi .dc. Nec enim eidem occurreret cum .dc. ipsi .be. sit paralela, nec est eadem ipsi .db. alioqui cum etiam in .e. sibi occurrat due recte linee superficiem concluderent. contra vltimam communem sententiam. Secabit igitur angulum .bdc. atque ob id per corrogatum sepius in premissis repetitum secabit .bc. oppositum latus quod fuit probandum. Eadem erit demonstratio si .be. non sit paralela ipsi .ac.

Theorema 9um. *Oblique longitudines a planis speculis sicut se habent sicut videntur.*

Obliquas longitudines in proposito vocamus, que speculo aut plano in quo speculum existit, sunt paralele. De differentiis autem positus in proposito solum loquimur, ante, post, dextrum, sinistrum.

Sit ergo speculum .de. planum, obliqua longitudo .bc. .c. propinquius .d. vero remotius. Ab oculo .a. cadant visus .af. et .ag. qui reflectantur in .bc.

Dico in primis .af. reflecti in .c. .ag. vero in .b.

211 **eoque,** eosque *SO*

Lema da nona proposição. *Se num triângulo e num seu lado se tomar um ponto contingente, e se se levantar uma paralela ao mesmo lado pelo extremo comum aos restantes lados, e se se tomar nela um ponto fora do triângulo, e se se ligar este ponto com o ponto contingente, é forçoso que o lado que liga as duas linhas retas paralelas seja cortado.*

[Fig. 158] | No triângulo ABC, e no seu lado AC, tome-se o ponto contingente D. Pelo ponto B, pela trigésima primeira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], trace-se a paralela BE, na qual se tome o ponto E. Ligue-se os pontos D e E.

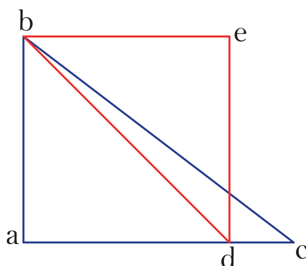


Fig. 158

Afirmo que a linha reta BC é cortada pela [reta] DE.

Ligue-se D a B. É evidente que a linha reta DE não é a mesma que DC, pois nem sequer a poderia encontrar[9], uma vez que DC é paralela a BE. Também não é a mesma que DB, caso contrário, uma vez que também se encontraria consigo em E, duas linhas retas incluiriam uma superfície, contra a última noção comum. Então, cortará o ângulo BDC. Por isso, pelo corrogado tantas vezes repetido nas [demonstrações] anteriores, cortará o lado oposto BC. O que se quis provar. A demonstração será igual, no caso de BE não ser paralela a AC.

Teorema nono. *Comprimentos oblíquos vêem-se em espelhos planos como se encontram.* Neste teorema, chamamos comprimentos oblíquos àqueles que são paralelos ao espelho ou ao plano em que se encontra o espelho. Quanto às diferenças de posição, neste teorema referimo-nos apenas a «anterior», «posterior», «direita» e "esquerda".

Seja DE o espelho plano. Seja BC, o comprimento oblíquo, estando C mais próximo e D mais afastado do olho A, e deste caiam os raios visuais AF e AG, que se reflitam para B e C.

Afirmo, em primeiro lugar, que AF se reflete para C, e AG para B.

---

9 Noutro ponto além de D, pois se o fizesse, duas rectas encerrariam uma superfície.

Nam si opposito modo reflecterentur (ut in forma e regione posita patet). Accipio vltra .g. signum .d. connectantur .bd. iam in triangulo .dbf. suscipiatur[212] signum .g. in latere .df. cui paralelus productus est .bc. Connectantur autem .gc. signa. ergo per Lemma huius propositionis .gc. secat ipsam .bf. visus .af. et .ag. refracti concurrent a planis speculis, quod est impossibile per quartam huius. Af. igitur | in .c. [S83v] refringitur et .ag. in .b. Est autem .ag. remotior visus vt patet, si ab .a. demittatur perpendicularis in .de. .af. vero propinquior .b. remotius et .c. propinquius quare .bc. ita apparet sicut existit. Eadem est ostensio in aliis differentiis positus si oculus non intercipiatur intra quadrilaterum, quod constituitur ab obliqua longitudine et perpendicularibus ab eius extremis in subiectum speculum productis.

Sit iam rursus subiectus oculus alicui puncto medio | oblique longitudinis .bc. [O78v] vt in figura e regione patet. Producatur perpendicularis[213] in subiectum planum .de. que sit .ah. que vtrinque producta ocurret ipsi .bc. paralele eidem .de. in .k.

Dico in primis .c. signum non videri ab aliquo visu qui incidat ad partes .d. vltra .h. signum nam dato opposito videatur vt a visu .ag. refracto in .c. Cum .agh. sit angulus recto minor, quoniam triangulum rectangulum est .ahg. et angulus qui ad .h. rectus, non

212 **suscipiatur,** suscipere *SO*
213 **perpendicularis** *O*, perpendicularis utrinque *S*

[Fig. 159] | Se se refletirem de modo contrário (como fica claro na figura colocada à margem), tomo, para lá de G, o ponto D. Liguem-se B e D. Toma-se, no triângulo DBF, o ponto G, no lado DF, paralelo ao qual se traçou BC. Liguem-se os pontos G e C. Então, pelo lema desta proposição, GC corta BF. Os raios visuais AF e AG, refletidos, serão concorrentes em espelhos planos, o que é impossível, pela quarta [pro-
[Fig. 160] posição] deste [tratado]. | Então, AF reflete-se para C e AG para B. Mas AG é o raio visual mais afastado, como é evidente se se baixar a perpendicular de A para DE; e AF é o mais próximo. [Logo] B está mais afastado e C mais próximo. Por esta razão, BC aparece tal e qual como se encontra. A prova é a mesma nas outras diferenças de posição, desde que o olho não seja tomado no interior do quadrilátero formado pelo comprimento oblíquo e pelas perpendiculares traçadas das suas extremidades para o espelho subjacente.

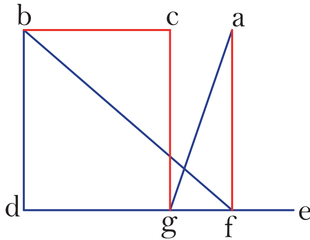


Fig. 159

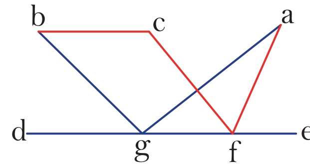


Fig. 160

[Fig. 161] | Novamente, esteja o olho abaixo de um ponto intermédio qualquer do comprimento oblíquo BC, como fica claro na figura à margem. Trace-se uma perpendicular qualquer até ao plano subjacente DE, seja AH. Prolongada para ambos lados, encontrará BC, paralela a DE, [seja] em K.

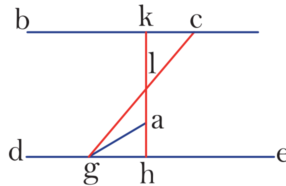


Fig. 161

Afirmo, em primeiro lugar, que o ponto C não é visto por nenhum raio visual incidente para o lado de D, para lá do ponto H. Caso contrário, veja-se [C] por meio do raio visual AG, refletido para C. Uma vez que AGH é um ângulo menor do que um reto (porque AHG é um triângulo retângulo e o ângulo em H é reto),

refringetur igitur .ag. in angulo .agh. sed in angulo .agd. per tertiam huius. Atque .gc. recta linea cum .g. signum sit vltra .hk. et .c. citra secabit rectam lineam .kh. secet vt in .l. Erit ergo triangulum .lgh. rectangulum et angulus .lgd. exterior per decimam sextam primi maior angulo qui ad .h. recto sibi opposito. Maior igitur angulo .agh. qui eodem recto minor est. Quare non est angulus .lgd. equalis angulo .agh. Non igitur visus in equalibus angulis refringuntur contra primam huius. Eodem modo probabis quod .b. signum <non> videatur aliquo visu cadente citra .h. signum ad partes .e. Videbitur igitur .b. signum visu cadente ad partes .d. .c. vero visu cadente ad partes .e. atque ob id si .c. dextrum dextro visu et .b. sinistro, et sic de aliis differentiis positus vt in subiecta e regione figura plenius videbitur. Atque in vniuersum cum visus sunt in eodem plano cum obliqua longitudine demonstratum est Theorema.

Iam | demum sint visus in diuersis planis. [S84r]
Sitque .bc. longitudo (vt prius) speculo plano parallela .a. oculus ab .a. perpendicularis demittatur in subiectum planum .ad. manifestum est ex corollario tertio primae huius demissam perpendicularem ab oculo communem sectionem esse duorum planorum in quibus visus reflectuntur. Producantur igitur plana per terminos .bc. obliquae[sic] longitudinis transeuntia per demissam perpendicularem ab oculo, necesse est visum quo videtur .b.esse in plano transeunte per .b.et .a. oculum. Similiter et visus quo videtur .c. erit in plano in quo .a. oculus et .c. signum atque ob id cum illa | plana habeant eosdem positus sicut et .bc. signa .bc. sicut sunt ita et [O79r] spectabuntur. Quod fuit probandum. Hoc subiecta e regione figura facile ostendit. Ab oculo enim .a. perpendicularis in subiectum planum acta est .ad. communis duorum planorum sectio in quibus visus reflectuntur, quorum vnum quidem est .bgda. alterum vero .adec. Manifestum est ea plana eundem situm et positum habere que et signa .bc. In plano autem .adgb. visus .ah. reflectitur in .b.; in altero vero visus

AG não se refletirá no ângulo AGH, mas no ângulo AGD, pela terceira [proposição] deste [tratado]. Uma vez que o ponto G está para lá de HK e C para cá, a linha reta GC cortará a linha reta KH. Corte-a em L. Então, o triângulo LGH será retângulo, e o ângulo LGD, externo, [será] maior do que o ângulo oposto, reto em H, pela décima sexta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Então, [LGD é] maior do que o ângulo AGH, que é menor do que aquele mesmo [ângulo] reto. Por esta razão, o ângulo LGD não é igual ao ângulo AGH. Então, os raios visuais não se refletem em ângulos iguais, contra a primeira deste. Do mesmo modo, provarás que o ponto B não se vê por meio de nenhum ponto incidente para cá de H, para o
[Fig. 162] lado de E. | Portanto, o ponto B ver-se-á por um raio incidente para o lado de D, e [o ponto] C, por meio de um raio visual incidente no lado de E. Por isso, se C está à direita, ver-se-á por meio de um raio visual à direita, e B, por meio de um raio visual à esquerda, e assim em relação às outras diferenças de posição, como se verá mais completamente na figura colocada à margem. E o teorema foi demonstrado em geral quando os raios estão no mesmo plano em que está o comprimento oblíquo.

Fig. 162

Finalmente, estejam os raios visuais em planos diferentes.
[Fig. 163] | Seja BC o comprimento (como anteriormente), paralelo ao espelho plano. Seja A o olho. De A, baixe-se a perpendicular AD para o plano subjacente. É evidente, pelo terceiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], que a perpendicular baixada do olho é a interseção dos dois planos nos quais os raios visuais se refletem. Então, estendam-se os planos que passam pela perpendicular baixada do olho, pelos extremos BC do comprimento oblíquo. É necessário que o raio visual por meio do qual se vê B esteja no plano que passa por B e pelo olho A. Da mesma forma, também o raio visual por meio do qual se vê C estará no plano em que se encontra o olho A e o ponto C. Por isso, uma vez que aqueles planos têm as mesmas posições que os pontos B e C, os pontos B e C ver-se-ão como se encontram. O que se quis provar. A figura apresentada à margem mostra-o facilmente. Com efeito, do olho A, traçou-se para o plano subjacente a perpendicular AD, interseção dos dois planos nos quais se refletem os raios visuais. Um destes [planos] é BGDA, o outro é ADEC. É evidente que estes planos apresentam a mesma localização e posição que os pontos BC. No plano ADGB, o raio visual AH reflete-se para B; no outro, o raio

.af. in .c. reflexus est, qui etiam visus eundem positum habent quem et plana in quibus existunt. Quare .bc. visibus .ah. et .af. videntur, qui eundem positum habent, sicut et .bc. signa. quod fuerat probandum.

Theorema decimum. *Obliquae longitudines a conuexis speculis sicut sunt verae sic spectantur.*

Sit speculum .de. conuexum in plano in quo .de. recta linea, obliqua vero longitudo .bc. paralela ipsi .de. Dico .bc. sicuti est ita vere spectari.

A signo autem .a. in quo oculus existit non subiectum prius ipsi .bc. perpendicularis in subiectum planum .de. ipsa .ae. agatur per XIam vndecimi, procidantque .ag. et .af. visus refracti in .bc., .ag. quidem propinquior ipsi .ae., .af. vero remotior. Sit autem | .c. propinquius et .b. remotius signum. [S84v]

Dico in primis ipso .ag. visu videri .c., .af. vero ipsum .b. nam dato opposito si .ag. reflectatur in .b. et .af. in .c. cadat ab ipso .b. perpendicularis in subiectum planum .de. ipsa .bh. per XIam vndecimi, connectantur .gf.

visual AF refletiu-se para C. Estes raios também possuem a mesma posição que os planos em que estão. Por esta razão, B e C vêem-se por meio dos raios visuais AH e AF, que possuem a mesma posição que os pontos B e C. O que se quisera provar.

Fig. 163

Teorema décimo. *Comprimentos oblíquos vêem-se em espelhos convexos como são realmente.*

[Fig. 164] | Esteja o espelho convexo D[FG]E no plano em que está a linha reta DE. Seja BC um comprimento oblíquo paralelo a DE. Afirmo que BC se vê como é realmente.

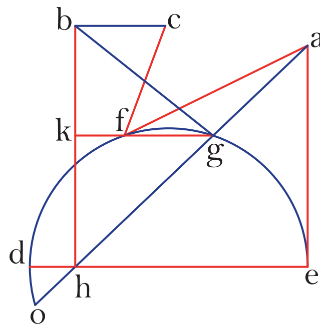


Fig. 164

Do ponto A, em que está o olho (em primeiro lugar, não subjacente a BC), trace-se a perpendicular AE ao plano subjacente DE, pela décima primeira [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Estendam-se os raios visuais AG e AF, refletidos para B e C; AG mais próximo de AE e AF mais afastado. Seja C o ponto [do comprimento oblíquo] mais próximo [do olho], e B o mais afastado.

Afirmo, em primeiro lugar, que C é visto pelo raio visual AG e B, por meio de AF. Caso contrário (se AG se refletir para B e AF para C), de B caia BH, perpendicular ao plano subjacente DE, pela décima primeira do undécimo. Ligue-se

que producta occurret ipsi .bh. nam si connectantur .hg. erit angulus .bhg. recto minor quia pars anguli .bhe. recti, est autem circunferentia .fdo.[214] minor semicirculo, quare angulus .fgh. recto minor erit. Quare .gf. et .hb. concurrent per vltimum postulatum, sit ergo in .k. triangulum igitur erit .bgk. a cuius termino .b. recta | linea quidem agitur .bc. paralela et in latere eiusdem trianguli .kg. .f.[215] signum contingit, quod cum .c. signo .bc. rectae lineae connectitur. Igitur per Lemma huius nonae .fc. secabit ipsam .bg. Sunt autem .fc. et .bg. visus refracti. Visus ita refracti a conuexis speculis concurrent, quod est impossibile ex quarta huius. Ipsum ergo .ag. reflectitur in .c. et .af. in .b., .c. igitur signum propinquius propinquiore visu videtur, .b. autem remotius remotiore. et sic de reliquis differentiis positus ostendes, quando vterque visus in eodem plano extiterit, et oculus non fuerit obliquae longitudini subiectus. [O79v]

Iam secundo, sit .a. oculus subiectus .bc. obliquae longitudini perpendicularis ab .a. in .de. subiectum planum, secet tandem ipsam .bc. et cadat prius ea perpendicularis in speculi centrum, et secet circunferentiam in .g. acta vero sit vsque in centrum .h. dico tunc in primis .b. signum non videri nisi visu procidente ad partes .gd. nam dato opposito videatur .c. signum visu ak. cadente ad partes .d. Connectanturque .kg. et in continuum producantur in .f. manifestum est ex hypotesi .ge.[216] circunferentiam esse maiorem .kd. Quare per Lemma propositionis quintae .gk. et .ed. concurrent ad partes .fd. duo ergo anguli .ghd. .hgk. duobus rectis sunt minores. Est autem .ghd. rectus. erit ergo .hgk. recto minor. Reliquus igitur de duobus rectis per 13am primi .kga. recto maior erit. Igitur per trigesimam secundam primi, .akg. minor erit recto.

---

214 **.fdo.,** .fde. *SO*
215 **.kg. .f.,** .kgf. *SO*
216 **.ge.,** .gk. *SO*

G a F; esta [reta], prolongada, encontrará BH. Com efeito, se se ligar HG, o ângulo BHG é menor do que um reto, porque é uma parte do ângulo reto BHE; mas o arco FDO é menor do que um semicírculo[10], por esta razão, o ângulo FGH será menor do que um reto; por esta razão, GF e HB serão concorrentes, pelo último postulado, seja em K. Então, BGK será um triângulo, de cujo extremo B se estende a linha reta paralela BC. O ponto F é contingente ao lado KG do dito triângulo, e liga-se ao ponto C da linha reta BC. Então, FC cortará BG, pelo lema da nona [proposição] deste [tratado]. Mas FC e BG são os raios visuais refletidos. Assim, os raios refletidos em espelhos convexos serão concorrentes, o que é impossível, pela quarta [pro-
[Fig. 165] posição] deste [tratado]. | Logo, AG reflete-se para C e AF para B. O ponto mais próximo C vê-se por meio do raio mais próximo; o ponto B, mais afastado, vê-se por meio do raio mais afastado. Assim mostrarás a respeito das restantes diferenças de posição, sempre que ambos os raios visuais estiverem no mesmo plano e o olho não estiver subjacente a um comprimento oblíquo.

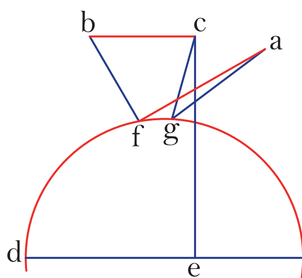


Fig. 165

[Fig. 166] | Em segundo lugar, seja A o olho subjacente ao comprimento oblíquo BC. A perpendicular [traçada] de A para o plano subjacente DE, corte, desta vez, [o comprimento] BC. Primeiro, caia esta perpendicular no centro do espelho, e corte a circunferência em G; e trace-se até ao centro H. Então, em primeiro lugar, afirmo que o ponto B não se vê senão por meio do raio que se estende para o lado de GD. Caso contrário, veja-se o ponto C por meio do raio visual AK, incidente para o lado de D. Ligue-se K a G, e prolongue-se continuamente para F. É evidente que, por hipótese, o arco GE é maior do que [o arco] KD. Por esta razão, pelo lema da quinta proposição, GK e ED serão concorrentes para o lado de F e D. Então, os dois ângulos GHD e HGK são menores do que dois retos. Mas [o ângulo] GHD é reto; portanto, [o ângulo] HGK é menor do que um reto. Então, KGA, o ângulo restante de dois retos, será maior do que um reto, pela décima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Então, AKG será menor do que um reto, pela trigé-

---

10 A prova deve ser feita como na proposição oitava deste tratado.

Cum autem .akf. per decimam sextam primi sit | maior angulo .agk. interiore sibi [S85r] opposito, maior erit angulus .akf. angulo .akg. Ipso vero .akf. maior est angulus .akd. et ipso .akg. minor est angulus .akge. igitur a maiore multo maior est .akd. angulo .akge. non igitur reflectitur .ak. in angulo .akge. per tertiam huius, sed in ipso angulo .akd. nec etiam reflectitur in ipsum .c. alioqui secaretur ipsam .gh. productam per vnum[217] ex corrogatis in primum[218] <Elementorum>. Secet igitur in signo .m. probabitur eodem modo, quod .mkf.[219] sit maior angulo| .akg.[220] quia obtusus opposito [O80r] angulo qui ad .g. obtuso maior et per consequens quod angulus .mkd.[221] maior sit angulo .akge. quare .ak. visus non reflectetur in aequalibus angulis, quod est impossibile per primam huius. Non ergo refringitur .ak. in .c. nec aliquis visus procidens ad partes .d.

Eadem erit demonstratio quod non possit .b. signum videri ab aliquo visu cadente ad partes .ge. Quare necessum est vt .b. videatur visu cadente ad partes .d. .c. vero a visu cadente ad partes .e. Atque ob id necessario sequetur vt eundem situm visus obseruent, que et signa .bc.

Iam et tertio subiiciatur .a. ipsi .bc. longitudini .ah. vero perpendicularis praeter centrum agatur. connectaturque .a. cum centro .k. secet autem .ah. circunferentia in .f. et .ak. in .m. inter vero .m. et .f. suscipiatur .g. signum in quo procidat .ag.

Dico in primis .ag. debere reflecti ad partes .c. non autem ad partes .b. Connectatur enim .gm. et vtrinque producatur sitque .lgmn. recta linea. Et quoniam triangulum est .kah. rectangulum ex hypotesi cuius rectus angulus erit qui ad .h. reliquus ergo qui ad .k. recto minor erit, puta angulus .mke. Quare per 13.^{am}

217 **vnum,** vnam *SO*
218 **in primum,** in primis *SO*
219 **.mkf.,** in .kf. *SO*
220 **.akg.,** .akge. *SO*
221 **.mkd.,** in .kd. *SO*

sima segunda do primeiro. Mas, uma vez que AKF é maior do que o ângulo interior oposto AGK, pela décima sexta do primeiro, [então,] o ângulo AKF será maior do que o ângulo AKG. Mas o ângulo [misto] AKD é maior do que o ângulo AKF e o ângulo [misto] AKGE é menor do que o ângulo AKG; então, *a maiore*, o ângulo [misto] AKD é muito maior do que o ângulo [misto] AKGE. Portanto, AK não se reflete no ângulo AKGE, pela terceira [proposição] deste [tratado], mas no ângulo AKD. E também não se reflete para C, caso contrário cortaria GH prolongada, por um dos corrogados ao primeiro dos *Elementos*. Portanto, corte-a no ponto M. Provar-se- á, da mesma maneira, que [o ângulo] MKF é maior do que o ângulo AKG, porque é um ângulo obtuso maior do que o ângulo obtuso oposto em G, e [provar-se-á], em consequência, que o ângulo [misto] MKD é maior do que o ângulo [misto] AKGE. Por esta razão, o raio visual AK não se refletirá em ângulos iguais, o que é impossível, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Logo, não se reflete para C, nem AK nem nenhum raio visual que se estenda para o lado de D.

Fig. 166

A demonstração de que o ponto B não pode ser visto por nenhum raio visual incidente para o lado de GE será a mesma. Por esta razão, é forçoso que B seja visto por meio de um raio visual incidente para o lado de D, e que C seja visto por meio de um raio visual incidente para o lado de E. Por isso, seguir-se-á necessariamente que os raios visuais mantenham a mesma localização que os pontos B e C.

[Fig. 167] De seguida, e em terceiro lugar, esteja A subjacente ao comprimento BC. Passe a perpendicular AH ao lado do centro. Ligue-se A com o centro K. Corte AH a circunferência em F, e AK [corte a circunferência] em M. Entre M e F, tome-se o ponto G, no qual incida AG.

Afirmo, em primeiro lugar, que AG deve refletir-se para o lado de C e não para o lado de B. Ligue-se G a M, e prolongue-se para ambos os lados, seja esta a linha reta LGMN. Uma vez que KAH é, por hipótese, um triângulo retângulo, cujo ângulo reto será o ângulo em H, então o restante [ângulo] em K, ou seja, o ângulo MKE, será menor do que um reto. Por esta razão, pela décima terceira [proposição]

primi reliquus de duobus rectis .mkd. ipso .mke. maior est, quare circunferentia .md. maior est per vltimam sexti circunferentia .me. A fortiore igitur maior erit ipsa circunferentia .ge. Quare per Lemma quinte propositionis | huius .mg. et .ke. occurrunt ad partes .ge. ergo vt in premissa demonstratione ostensum est, erit angulus .amg. recto maior et angulus .agm. recto minor. Angulus autem .agl. eodem .agm. maior, quia exterior respectu anguli qui ad .m. obtusi. A maiori igitur erit angulus .age. maior angulo .agd. parte ipsius .agm. Quare .ag. refringetur in angulo .age. per tertiam huius. Quare per Corrogatum in primum elementorum secabit latus .af. cum secet angulum .agf. trianguli. Visus ergo .ag. refractus occurret alicui signo ex parte .c. Quod primum assumebamus. [S85v]

Sed nunc quando contingeret huius modi hypotesis, | non posset .b. signum videri ab aliquo visu[222] cadente ad partes .fe. Sin minus cadat visus .ao. connectaturque .fo. que in directum producatur in .n. probata est circunferentia .fd. maior ipsa .fe. multo igitur maior ipsa .oe. Quare per Lemma quinte propositionis .fo. et .he. concurrunt ad partes .e. et .o. et angulus .fhe. rectus est. minor ergo recto erit .hfo. et per consequens maior recto angulus .afo. per decimam tertiam primi. Atque vt prius in secunda demonstratione ostendebatur, angulus .aog. minor erit angulo .aon. et a fortiore angulo .aoe. [O80v]

222 **visu,** signo *SO*

do primeiro [livro dos *Elementos*], MKD, o restante de dois retos, é maior do que MKE. Por isso, o arco MD é maior do que arco ME, pela última do sexto; logo, *a fortiore*, será maior do que o arco GE. Assim, pelo lema da proposição quinta deste [tratado], MG e KE encontram-se para o lado de GE. Logo, como se mostrou na demonstração anterior, o ângulo AMG será maior do que um reto, e o ângulo AGM será menor do que um reto[11]. Mas o ângulo AGL é maior do que o ângulo AGM, porque exterior em relação ao ângulo obtuso em M. Então, *a maiori*, o ângulo [misto] AGE será maior do que o ângulo [misto] AGD, que é uma parte de AGM. Por esta razão, AG refletir-se-á no ângulo AGE, pela terceira [proposição] deste [tratado]. Então, pelo corrogado ao primeiro dos *Elementos*, uma vez que cortará o ângulo AGF do triângulo, cortará o lado AF [subtenso pelo dito ângulo]. Logo, o raio visual AG, refletido, encontrará um ponto qualquer do lado de C. O que em primeiro lugar tínhamos assumido [fazer].

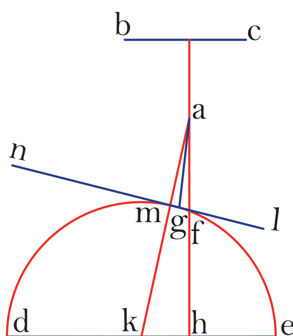


Fig. 167

Agora, [demonstremos o mesmo] se a hipótese fosse esta: que B não poderia
[Fig. 168] ser visto por nenhum raio visual incidente para o lado de FE. | Caso contrário, caia o raio AO e ligue-se FO e que esta [reta] seja prolongada a direito para N. Provou-se que o arco FD é maior do que o arco FE; logo, será muito maior do que o arco OE. Por esta razão, pelo lema da quinta proposição, FO e HE são concorrentes para o lado de E e O. Mas o ângulo FHE é reto; logo, HFO será menor do que um reto e, em consequência, o ângulo AFO será maior do que um reto, pela décima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Como se provou acima, na segunda demonstração, o ângulo AOG será menor do que o ângulo AON e, *a fortiore*, do que o ângulo [misto] AOE.

---

11 O facto enunciado está correcto, mas a referência ao caso anterior é enganador, uma vez que o ângulo em K não é recto neste caso.

Non igitur refringitur .ao. in angulo .aog. sed in angulo .aoe., nec etiam refringitur vt transeat ad partes .b. alioque secaret ipsam .ah.[223] vt in .m. esset ergo angulus .mon. maior angulo .mfo.[224] per 16am primi, et per consequens maior angulo .aog. Est autem ipso .mon. maior angulus .moe. Angulus igitur .moe. maior erit angulo .aog. quare .ao. non refringitur in aequalibus angulis, quod est contra primam huius. Stante ergo data hypotesi non poterit .b. videri aliquo visu cadente ad partes .e. sed necessario visu cadente ad partes .fd.

Dico etiam quod non cadet visus ille refractus in .b. vltra .g. nam dato opposito si caderet visus refractus in .b. inter .g. et .f. .ag. vero reflectatur in angulo .agf. necessario visus .ao. refractus secaret visum .gc. | refractum vt facile ex forma e regione [S86r] posita videri potest. Atque visus refracti a conuexis speculis concurrerent quod est impossibile ex quarta huius. Vbi ergo .c. signum videbitur aliquo visu cadente ad partes .d. .b. videbitur visu cadente propinquiore ipsi .d. atque ob id visus illi seruabunt eundem situm quem et .bc. signa, siue loquaris de dextro et sinistro, siue de propinquo et remoto, et sic de aliis differentiis positus. Quare in vniuersum patet, si visus in eodem plano extiterint a conuexis speculis res videri sicut existunt.

223 **.ah.,** .ab. *SO*

224 **.mfo.,** .afo. *SO*

Fig. 168

Então, AO não se reflete no ângulo [misto] AOG, mas no ângulo [misto] AOE. Também não se reflete de tal forma que passe para o lado de B, de outro modo cortaria AH, seja em M. Então, o ângulo MON seria maior do que o ângulo MFO, pela décima sexta do primeiro, e, em consequência, maior do que o ângulo AOG. Mas o ângulo [misto] MOE é maior do que o ângulo MON. Então, o ângulo MOE será maior do que o ângulo AOG. Por esta razão AO não se reflete em ângulos iguais, o que é contra a primeira deste [tratado]. Logo, verificando-se a hipótese dada, B não poderá ser visto por um raio incidente para o lado de E, mas, necessariamente, por um raio incidente para o lado de FD.

Afirmo ainda que aquele raio visual não cairá para B, refletido para lá de G.[12]
[Fig. 169] | Caso contrário, se o raio refletido para B cair entre G e F, e AG se refletir no ângulo [misto] AGF, necessariamente o raio visual AO, refletido, cortará o raio refletido GC, como se pode verificar facilmente pela figura colocada à margem. Mas [estes] raios visuais, refletidos em espelhos convexos, serão concorrentes, o que é impossível, pela quarta [proposição] deste [tratado]. Logo, quando o ponto C for visto por um raio incidente no lado de D, B será visto por um raio incidente mais próximo de D, e por isso aqueles raios conservarão a mesma posição que os pontos B e C, quer fales de «direita» e «esquerda», quer de «próximo» ou «afastado», e o mesmo sucede em relação às restantes diferenças de posição. Por esta razão, fica claro em todos os casos que, se os raios estiverem no mesmo plano, as coisas vêem-se em espelhos convexos tal como existem.

12 Ou seja, entre G e E.

Nunc demum visus non sint in eodem plano et sit speculi centrum .k. visus vero .ag. et .ah. .ag. refractus in .c.[225] et .ah. in .b.[226] Sint autem plana | in quo .agc. .dgf. in [O81r] quo vero .ahb. sit .dhe.[227] connectatur vero .ak. manifestum est ex vltimo Corollario prime huius quod plana .dgf. .dhe. sese secant in linea .ak. .gc. vero ex demonstratione quarte huius occurrit ipsi .ak. ad partes .g. non autem ad partes .c. Quare ipsius .ag. visus directi non commutabitur situs cum reflectetur, non enim occurret ipsi .ah.[228] [refracto] ad partes .b. Cum autem .dgf. habeat eundem situm quem et .c. videbitur in eodem situ in quo existit siquidem dextrum dextrum, sinistrum sinistrum et sic de aliis differentiis positus. Eodem modo et .b. signum. Quare .bc. sicuti est ita spectabitur. Haec pluribus egi, ne huius demonstratio Theorematis quam plurimis pateret calumniis. Obliquae igitur longitudines.

Theorema vndecimum. *Celsitudines et crassitudines a cauis speculis quecunque intra coincidentiam visuum sunt conuerse videntur, quemadmodum*

225 **.c.,** .b. *SO*
226 **.b.,** .c. *SO*
227 **.dhe.,** .dhb. *SO*
228 **.ah.,** .ak. *SO*

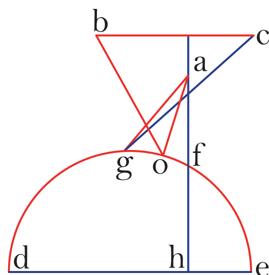


Fig. 169

[Fig. 170] | Finalmente, não estejam os raios no mesmo plano. Seja K o centro do espelho. Sejam AG e AH os raios; AG refletido para C e AH para B. Sejam os planos DGF, em que está AGC, e DHB, em que está AHB. Ligue-se A a K. É evidente, pelo último corolário da primeira [proposição] deste [tratado], que os planos DGF e DHE se intersectam na linha AK. GC encontra AK para o lado de G, e não para o lado de C, pela demonstração da quarta deste. Por esta razão, a localização do raio direto AG, ao refletir-se, não mudará, pois não encontrará AH refletido para o lado de B. Porém, como DGF tem a mesma localização que C, será visto no mesmo sítio em que está, ou seja, o que está à direita, à direita, o que está à esquerda, à esquerda, e assim em relação às outras diferenças de posição. O mesmo sucede com o ponto B. Por esta razão, BC vê-se como se encontra. Tratei destas coisas mais amplamente, para que a demonstração deste teorema não ficasse exposta a tantas críticas. Logo, comprimentos oblíquos.

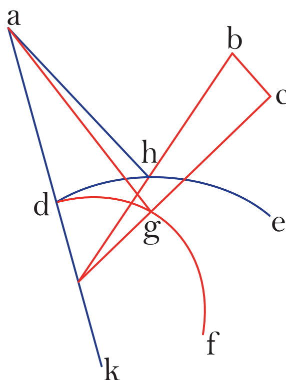


Fig. 170

Teorema undécimo. *Em espelhos côncavos, as alturas e profundidades que estão para dentro do ponto de concorrência dos raios visuais aparecem invertidas, tal como [sucede]*

in planis et conuexis speculis. Quecunque autem extra coincidentiam, sicut sunt ita et spectantur.

| Esto enim celsitudo .bc. visus cadentes in cauum speculum subiectum .ad. propinquior perpendiculari .ae.[229] vero remotior, reflexi in .bc. signa. Dico in primis si .bc. intercipiatur citra coincidentiam visuum conuersam spectari. [S86v]

Reflectatur enim .ad. visus in .b. producatur autem .ed. recta linea. et .bc. quousque occurrant vt in .f. Occurrent enim quoniam .bc. perpendicularis est ad subiectum planum in quo speculum et si a signo .a. in idem planum perpendicularis agatur, erit eadem ipsi .bc. parallela per 6am vndecimi atque .d. signum perpendiculari actae ab .a. signo propius accedit quam .e. ex hypotesi, quare producta recta linea per .ed. secabit vtranque parallelam, vt in Lemmate sequentis Theorematis 13^{mi} ostendetur, Quoniam tunc in triangulo .bdf. et in eius latere .fd. suscipitur signum contingens .e. a quo adducitur alia recta linea illa ergo secabit .fd. aut .db. siue .bf. non autem .fd. alioqui due recte linee superficiem concluderentur. Secet igitur aut .db. aut .bf. secet primo ipsam | .bf. vt in signo .c. intra triangulum .fbd. Signum igitur .b. sublimius est, .c. autem humilius. Videtur autem .b.[230] signum visu .ad. humiliore .c. vero visu .ae. sublimiore. .bc. igitur altitudo citra coincidentiam visuum posita conuersa videtur. [O81v]

229 **.ae.,** .ac. *SO*
230 **.b.,** .h. *SO*

em espelhos planos e convexos, e as que estão para fora do ponto de concorrência dos raios visuais vêem-se como se encontram.

[Fig. 171] | Seja BC uma altura. Sejam os raios visuais que caem no espelho côncavo subjacente, AD mais próximo da perpendicular[13] e AE mais afastado, refletidos para os pontos B e C. Afirmo, em primeiro lugar, que se se tomar BC aquém do ponto de concorrência dos raios visuais, [ela] aparece invertida.

Reflita-se o raio visual AD para B, e trace-se as linhas retas ED e BC até se encontrarem em F. Encontrar-se-ão porque BC é perpendicular ao plano subjacente em que se encontra o espelho e, se se traçar a perpendicular ao mesmo plano a partir do ponto A, esta será paralela a BC, pela sexta [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], e o ponto D está mais próximo da perpendicular traçada a partir do ponto A do que E, por hipótese. Por esta razão, a linha reta ED prolongada cortará ambas as paralelas, como se mostrará no lema do seguinte teorema décimo terceiro. Tomando-se um ponto contingente E no lado FD do triângulo BDF, e tirando-se dele uma linha reta; então, esta cortará FD ou DB ou BF. Não corta FD, de contrário duas linhas retas encerrariam uma área; corte, portanto, ou DB ou BF. Corte em primeiro lugar BF, seja em C, no interior do triângulo FBD. Então, o ponto B está mais alto e C mais baixo. Mas o ponto B é visto pelo raio mais baixo AD e C pelo raio mais alto AE. Então, a altura BC, situada aquém do ponto de concorrência, aparece invertida.

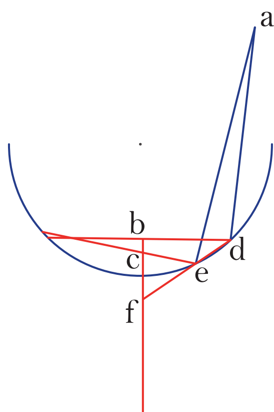


Fig. 171

13 Esta perpendicular não está traçada na figura, e cabe ao leitor imaginá-la baixada a partir do ponto A para o plano subjacente onde se encontra o espelho.

Rursus tenta hypothesi secet recta linea a signo .e. ducta latus .cd.[231] vt in signo .h. et producta tandem ocurrat ipsi .bc. in .b.[232] Tunc quoniam in triangulo .fbe.[233] in vnoque eius latere susceptum est signum .h. ab eoque recta linea vtrinque perducitur .hd. Secat igitur alterum trianguli latus, non quidem .eb.[234] nec .fe.[235] per nonam communem sententiam alioqui due recte lineae superficiem concluderent. Secet igitur reliquum latus .bf.[236] vt in .c.[237] manifestum est igitur .b. signum sublimius esse signo .c. | Videtur autem .b. signum radio .ae. sublimiore .c. vero visu .ad. [S87r] humiliore. Fastigium igitur .cb. sicut existit ita et spectatur. Positum est autem vltra coincidentiam visuum .eb. et .dc. in .h. Celsitudines igitur etc.

Si autem figuras has conuertas, erit eadem in profunditatibus ostensio quare Consimilis etiam ostensio accomodari poterit .7mo. et 8^uo. Theorematis huius. Suscipiatur autem in presenti Theoremate visus coincidentes. Quod si visus forsan alii nunquam ocurrentes dentur ab his videbuntur profunditates et celsitudines conuerse et eadem erit que in priori huius demonstrationis parte ostensio.

Theorema duodecimum. *Oblique longitudines a cauis speculis quecunque intra coincidentiam visuum iacent, vt sunt ita spectantur, quecunque vero extra conuerse.*

Sit quidem obliqua longitudo .bc. et .ae. et .ad. visus ex eadem parte atque eodem situ in speculum cauum procidentes, puta ex parte dextra .ae. quidem magis dextrum, et .ad. sinistrius. Reflectatur autem .ad. in .c. et .ae. in .b. et connectantur .ed. Siquidem .dc. et .eb. non sese secant. manifestum est quadrilaterum esse .bcde. rectamque lineam .dc. sinistriorem | esse recta linea .be. et signum igitur .c. minus [O82r] erit dextrum .b. vero dextrum magis. Videtur vero .c. signum .ad. visu sinistriore .b. vero .ae.[238] dexteriore[239] .cb. igitur sicuti est ita apparet vbi visus reflexi nondum occurrerint.

---

231 **.cd.,** .bd. *SO*
232 **.b.,** .c. *SO*
233 **.fbe.,** .fce. *SO*
234 **.eb.,** .ec. *SO*
235 **.fe.,** .fd. *SO*
236 **.bf.,** .ef. *SO*
237 **.c.,** .b. *SO*
238 **.ae.,** .ad. *SO*
239 **dexteriore** *O***,** dextriore *S*

[Fig.172] Novamente, mantendo-se a hipótese, a linha reta traçada do ponto E corte o lado CD, no ponto H e, prolongada, encontre BC em B. Uma vez que no triângulo FBE e num seu lado se tomou o ponto H e deste se traça a linha reta HD para ambos os lados; então, [HD] corta o outro lado do triângulo, que não EB ou FE, pela nona noção comum; de outra forma, duas linhas retas encerrariam uma área. Então, corte o restante lado BF em C. Então, é evidente que o ponto B é mais alto do que o ponto C. Mas o ponto B é visto por meio do raio mais alto AE e o ponto C por meio do raio mais baixo AD. Então, a altura CB vê-se tal como se encontra. E foi posta além do ponto de concorrência H dos raios visuais EB e DC; logo, alturas etc.

Se inverteres estas figuras, a prova será a mesma em profundidades. Por esta razão, uma prova deste teorema poderá ser adaptada ao sétimo e oitavo [teoremas deste tratado], mas tomem-se neste teorema raios concorrentes. No caso de raios que nunca se encontram; ver-se-ão as profundidades e alturas invertidas e a prova será igual à da primeira parte desta demonstração.

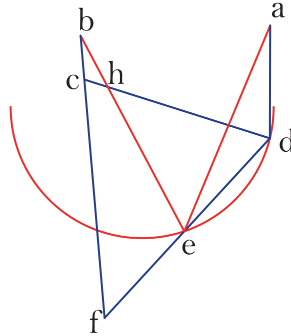


Fig. 172

Teorema duodécimo. *Em espelhos côncavos, os comprimentos oblíquos que jazem para dentro do ponto de concorrência dos raios visuais vêem-se como estão; os que se veem para fora do ponto de concorrência vêem-se invertidos.*

[Fig. 173] | Seja BC um comprimento oblíquo; e AE e AD os raios visuais que se estendem do mesmo lado e com a mesma posição para um espelho côncavo; por exemplo, do lado direito, AE, mais à direita e, do lado esquerdo, AD, mais à esquerda. Reflita-se AD para C e AE para B. Ligue-se ED. Uma vez que DC e EB não se intersectam, é evidente que BCDE é um quadrilátero e que a linha reta DC está mais à esquerda do que a linha reta BE. Então, o ponto C estará menos à direita e B mais à direita. Mas o ponto C vê-se pelo raio visual mais à esquerda AD, e [o ponto] B, pelo raio visual mais à direita AE. Ou seja, CB vê-se tal como aparece, enquanto os raios refletidos não se intersectarem.

Quod si prius occurrant vt in .h. necesse est illos commutare situm, ita vt .ad. reflectatur in .b. .ae. in .c. atque ob id conuerso modo apparebunt .bc. quoniam .c. videbitur visu .ae. dexteriore .b. vero visu .ad. sinisteriore. Longitudines ergo post coincidentiam visuum conuerse apparent.

| Eodem modo in vniuersum ostendetur de quocunque alio situ, nam eadem erit ostensio vbi tum visus in eodem fuerint plano. Quod si visus in diuersis planis inciderint, multo promptior erit demonstratio. Quod facile dicere poteritis ex vltima parte ostensionis Theorematis decimi huius. Oblique igitur longitudines etc. [S87v]

Lemma. *Si in binas rectas lineas paralelas, recta linea aliqua inciderit, alteram illarum secans ipsa in continuum et directum producta secabit et alteram.*
Sint enim paralele recte linee .ab. et .cd. in quarum vnam scilicet .cd. cadat recta linea .gk.[240] secans ipsam in signo .h.

240 **.gk.,** .gf. *SO*

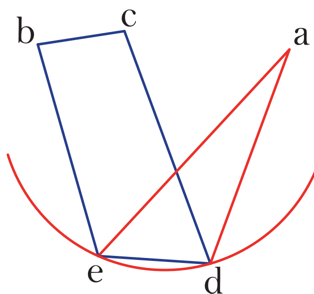


Fig. 173

[Fig. 174] | No caso de se encontrarem, como em H, é forçoso que mudem de posição, de forma que AD se reflete para B e AE para C. Por isso, B e C aparecerão de forma invertida, porque C ver-se-á por meio do raio visual AE mais à direita, e B, pelo raio visual AD mais à esquerda. Logo, comprimentos após o ponto de concorrência dos raios visuais aparecem invertidos.

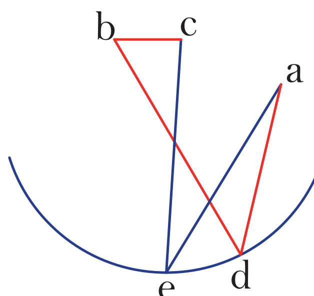


Fig. 174

Do mesmo modo se demonstrará em geral em relação a qualquer outra posição, pois a prova será idêntica quando os raios visuais estiverem no mesmo plano. No caso de os raios visuais incidirem em planos diferentes, a demonstração será muito mais acessível, porque podereis obtê-la facilmente a partir da última parte da prova do teorema décimo deste [tratado]. Logo, comprimentos oblíquos, etc.

Lema. *Se uma linha reta cair em duas linhas retas paralelas e cortar uma delas, cortará também a outra, se for prolongada continuamente e a direito.*

[Fig. 175] | Sejam AB e CD linhas retas paralelas. E que a linha reta GK caia numa delas, a saber: CD, e a corte no ponto H.

Dico quod .ghk. productam necessario concurrere cum .ab.

Connecto enim .ah. signa. Et quoniam in paralelas rectas lineas .ab. et .cd. cadit recta linea .ah. ergo per 29am primi equales sunt anguli .bah. et .ahc. Item quoniam super .cd. cadit recta linea .kh. ergo per 13am eiusdem .khd. et .khc. anguli duobus rectis aequales sunt. et exinde .khc. angulus duobus rectis minor. Probati sunt autem duo anguli .bah. et .ahk. duobus .cha. et .ahk. aequales. Sed quoniam .cha. et .ahk. vt probatum est supra, sunt minores duobus rectis, constituunt enim illi duo vna cum angulo .khd. duos rectos erunt et .bah. et .ahk. duobus rectis minores. Quare cum in rectas lineas .ab. et .ghk. incidat recta linea .ah. efficiens angulos interiores ad easdem partes duobus rectis minores. necessario per quintum postulatum ille due lineae concurrent, quod fuit probandum.

Aliter et breuius ad impossibile. tenta enim hypothesi priore si .ghk. non ocurrat ipsi .ab. productae | et sint in eodem | plano erit per diffinitionem .gk. ipsi .ab. paralela. est autem eidem .ab. .cd. paralela, ergo per 30am primi erunt .cd. et .gk. paralelae. sed per hypotesim concurrunt. Quod est impossibile per diffinitionem. Si igitur. [S88r] [O82v]

Theorema tertium decimum. *Idem spectare pluribus planis speculis est possibile.*
Sit oculus .a. visibile autem .b. planum autem speculum .cg. in quod ab oculo a perpendicularis demittatur per 12am vndecimi que sit .ac. Cadat similiter a signo .b. in idem planum perpendicularis .be. per eandem. Capiatur autem tunc .g. quodcunque aliud signum ab istis duobus et connectatur .ag. per primum postulatum cui lineae[241] .ag. per 31am primi paralela ducatur .bk. producatur autem .cg. in continuum et directum in infinitum. Quum itaque in ipsas .ag. .bk. paralelas incidat recta linea .cg. ergo per Lemma predemonstratum ipsa in infinitum producta cum .bk. concurret. Sit autem concursus in .k. Secetur demum

241 **lineae** *S*, linea *O*

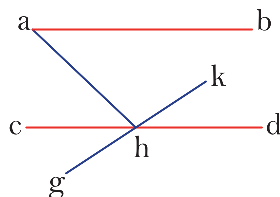


Fig. 175

Afirmo que é forçoso que GHK, prolongada, concorra com AB.

Ligo os pontos A e H. Uma vez que a linha reta AH cai nas linhas retas paralelas AB e CD; então, pela vigésima nona do primeiro, os ângulos BAH e AHC são iguais. Do mesmo modo, uma vez que a linha reta KH cai sobre CD; então, pela décima terceira do mesmo, os ângulos KHD e KHC são iguais a dois retos. Por conseguinte, o ângulo KHC é menor do que dois retos. Provou-se que os dois ângulos BAH e AHK são iguais aos dois [ângulos] CHA e AHK. Mas, uma vez que CHA e AHK são menores do que dois retos, como se provou em cima (pois ambos juntamente com o ângulo KHD formam dois retos), também BAH e AHK serão menores do que dois retos. Por esta razão, uma vez que a linha reta AH cai nas linhas AB e GHK, e faz os ângulos interiores para o mesmo lado menores do que dois retos, necessariamente, pelo postulado quinto, aquelas duas linhas serão concorrentes. O que se quis provar.

De outra forma e mais breve, *ad impossibile.* Mantendo-se a hipótese anterior, se GHK não encontrar a [reta] traçada AB e [ambas] estiverem no mesmo plano, GK será paralela a AB, por definição. Mas CD também é paralela a AB; logo, pela trigésima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], CD e GK serão paralelas. Mas são concorrentes por hipótese. O que é impossível, por definição. Então, se...

Teorema décimo terceiro. *É possível ver o mesmo [objeto] por meio de vários espelhos planos.*

[Fig. 176] | Seja A o olho; B, o objeto visível; e CG, o espelho plano. Baixe-se a perpendicular AC, a partir do olho, pela décima segunda [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*]. Da mesma forma, caia no mesmo plano, a partir do ponto B, a perpendicular BE, pela mesma [proposição]. Tome-se então um qualquer outro ponto G diferente desses dois e ligue-se A a G, pelo primeiro postulado [do primeiro livro dos *Elementos*]. Trace-se BK, paralela à linha AG, pela trigésima primeira do primeiro [livro dos *Elementos*]. Prolongue-se CG continuamente a direito até ao infinito. Uma vez que a linha reta CG cai sobre as paralelas AG e BK; então, pelo lema demonstrado previamente, ela será concorrente com BK, quando prolongada infinitamente. Seja K o ponto de concorrência. Finalmente, bissete-se GK no ponto

.gk. bifariam per decimam primi in signo .f. et per signum .f. excitetur perpendicularis ipsi .ek. in plano .bke. per vndecimam eiusdem que sit .fd. secetque .bk. in .h. Secabitque necessario ipsam .bk. cum .bke. tribus rectis lineis contineatur et sit triangulum cuius .bek. sit rectus, posuimus enim ipsam .be. perpendicularem super .ke. erit angulus .bke. minor recto per 32am primi. Est autem .dfk. rectus, ergo in rectas lineas .bk. et .fd. incidit recta linea .ke. faciens duos angulos interiores et ad easdem partes scilicet .hkf. .kfh. minores duobus rectis, et per consequens concurrent .kb. .df. Sit ille concursus in .h. vt diximus, connectanturque .hg.

Dico tunc quod si in .h. ponatur alterum speculum planum quod visibile .b. | [S88v] spectabitur per plura specula numero puta per duo, quod sic ostenditur.

Quoniam enim aequales posite sunt .kf. et .fg. .fh. autem communis et angulus .kfh. aequalis est angulo .hfg. vterque enim rectus ergo per 4am primi aequales sunt anguli .hkf. .hgf.[242] Item .khf. et .fhg.[243] Est autem per decimam quintam eiusdem .khf. angulus aequalis angulo .dhb. ergo | per primam communem sententiam [O83r] aequales sunt adinuicem .fhg. dhb .bh. igitur reflectitur in .g. per primam huius. Insuper quoniam paralelae sunt .kb. .ag. in quas incidit .ck. ergo per vicesimam nonam primi anguli .hkf. .agc. aequales sunt. Probati etiam sunt aequales .hkf. et .hgf. ergo per primam communem sententiam aequales sunt .age. et .hgf. Et per primam huius a speculo .gc. refringitur .hg. in .a. Illa autem spectantur ad que visus perueniunt. ergo cum .b. perueniat ad .a. per duo specula refractis lineis scilicet .bh. .hg. .ga. sequitur quod .b. videbitur ab .a. Idem igitur puta .b. pluribus speculis scilicet .h. et .g. spectatur. Quod fuit probandum.

242 **.hgf.,** .fgf. *SO*
243 **.fhg.,** .fkg. *SO*

F, pela décima do primeiro [livro dos *Elementos*]. Pelo ponto F, levante-se a perpendicular a EK no plano BKE, pela undécima do mesmo [primeiro livro dos *Elementos*], seja FD e corte BK em H. [FD] cortará BK forçosamente, uma vez que BKE é delimitado por três linhas retas e é um triângulo cujo ângulo BEK é reto; com efeito, pusemos BE perpendicular a KE. O ângulo BKE será menor do que um reto, pela trigésima segunda do primeiro [livro dos *Elementos*]. Mas [o ângulo] DFK é reto. Então, a linha reta KE cai nas linhas retas BK e FD, fazendo os dois ângulos internos do mesmo lado, ou seja, os ângulos HKF e KFH menores que dois retos; logo, KB e DF serão concorrentes. Seja H o ponto de concorrência, como dissemos, e ligue-se H a G.

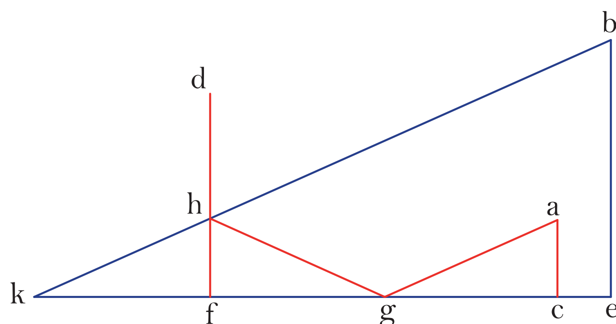


Fig. 176

Afirmo então que, se se colocar em H um segundo espelho plano, o visível B será visto por meio de mais espelhos, ou seja, por meio de espelhos no número de dois, o que se mostra da seguinte maneira.

Uma vez que KF e FG se puseram iguais, FH é comum, e o ângulo KFH é igual ao ângulo HFG, pois são ambos retos; então, pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], os ângulos HKF e FGH são iguais. O mesmo sucede com os ângulos KHF e FHG. Mas, pela décima quinta do mesmo [primeiro livro dos *Elementos*], o ângulo KHF é igual ao ângulo DHB. Logo, pela primeira noção comum, [os ângulos] FHG e DHB são iguais. Portanto, BH reflete-se para G pela primeira [proposição] deste [tratado]. Além disso, uma vez que são paralelas as retas KB e AG, nas quais cai CK; então, pela vigésima nona do primeiro [livro dos *Elementos*], os ângulos HKF e AGC são iguais. Mas também se provou serem iguais os ângulos HKF e HGF. Logo, pela primeira noção comum, os ângulos AGE e HGF são iguais. Pela primeira [proposição] deste [tratado], HG reflete-se no espelho GC para A. Mas, as coisas a que chegam raios visuais vêem-se; logo, uma vez que B chega a A por meio de linhas refletidas em dois espelhos (a saber: as linhas BH, HG e GA), segue-se que B se verá a partir de A. Portanto, o mesmo objeto (ou seja, B) vê-se por meio de vários espelhos: a saber, por meio de H e de G. O que se quis provar.

Lemma. *Circa quecunque data duo signa, circulum qui per ipsa transeat describere.*
Sint data duo puncta .ab. propositum est per illa describere circulum. Connectantur illa per primum postulatum et super illam lineam per primam primi constituatur triangulus aequilaterus qui per quintam quarti circulo[244] inscribatur: dico factum esse id quod queritur. Cum enim ex definitione eiusdem quarti circulus ille transibit per puncta extrema illius trianguli cum .a. et .b. sint duo ex illis, necessario transibit et per illa duo. Circa quecunque igitur etc.

Theorema decimum quartum. *Est autem et in quotlibet si quis constituat | speculis idem inspicere. Oportet autem iuxta speculorum numerum polygonum aequilaterum et aequiangulum constituere, binis lateribus excedens specula.* [S89r]
Non necessario oportet[245] quod constituatur polygonum aequilaterum binis lateribus excedens specula, nam nondum in vniuersum demonstratum est in quarto, omne polygonum posse inscribi circulo, vt de heptagono et nonagono patet. Tumque potest propositum theorema quam exactissime demonstrari in vniuersum sine illa limitatione quod sic probatur.

Sit oculus .a. visibile .b. dico .b. posse spectari per quotcunque numero proposita specula.

244 **circulo,** circuli *SO*
245 **oportet** *O*, oporte *S*

Lema. *Por quaisquer dois pontos dados, descrever um círculo que passe por eles.*
Sejam A e B dois pontos dados. Propôs-se descrever um círculo [que passe] por eles.

[Fig. 177] | Ligue-se os dois pontos pelo primeiro postulado [do primeiro livro dos *Elementos*]. Sobre esta linha, construa-se um triângulo equilátero, pela primeira do primeiro, e que este se inscreva num círculo, pela quinta do quarto [dos *Elementos*]. Afirmo que se fez o que se pede. Com efeito, uma vez que, por definição do mesmo [livro] quarto, o círculo passará pelos vértices do triângulo; [e] uma vez que A e B são dois deles, [o círculo] também passará, forçosamente, por esses dois. Portanto, por quaisquer, etc.

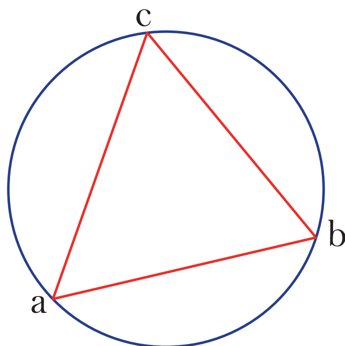


Fig. 177

Teorema décimo quarto. *É possível ver o mesmo [objeto] por meio de tantos espelhos quantos se queira. Quanto ao número de espelhos, é necessário construir um polígono equilátero e equiângulo que exceda os espelhos*[14] *em dois lados.*
Não é absolutamente necessário construir um polígono equilátero que exceda os espelhos em dois lados, pois não chegou a ficar demonstrado em geral, no quarto [livro dos *Elementos*], que qualquer polígono [regular] pode ser inscrito num círculo, como é evidente no caso do heptágono e do nonágono. Além disso, o teorema enunciado pode ser demonstrado em geral, da forma mais rigorosa possível, sem aquela restrição, o que se prova da maneira seguinte.

[Fig. 178] Seja A o olho, B o visível. Afirmo que B se pode ver por meio de espelhos dados em qualquer número.

14 Ou seja: que exceda o número de espelhos.

Ponamus gratia exempli quod per quatuor (idem enim erit de pluribus) circa duo signa .ab. per | demonstratum Lemma circulum describo, in cuius parte superiore et sectione altera manente indiuisa, signo quatuor signa vtcunque siue secent ipsam portionem circuli in partes aequales vel non aequas indifferenter que sint .cdef. connectanturque .ac. .cd. .de. .ef. .fb. diuidatur autem angulus .acd. per nonam propositionem primi bifariam per lineam .cg. Item angulus .cde. per eandem propositionem linea .dh. ipse autem .def. linea .ek. Demum .efb. angulus, linea .fl. Si ipsis igitur .cg. .hd. .ke. .lf. ponantur specula perpendicularia plana, vt puta ipsi .cg. speculum .mcn. .hd. autem speculum .odp. ipsi vero .ke. speculum .qer. ipsi .lf. speculum .sft. Tunc .b. propositum signum spectabitur ab oculo per proposita numero specula. Quod sic ostenditur. [O83v]

Quoniam enim aequales sunt anguli .gcm. .gcn. ex definitione perpendicularis lineae. Positi autem ex hypotesi et .gca. .gcd. aequales ergo illis demptis ab aequalibus remanebunt per tertiam communem sententiam .acm. .dc|n. anguli aequales. Et quoniam oppositi sunt circa perpendicularem .cg. ergo per primam huius visus .ac. refringitur in .cd. a speculo .mcn. Eadem ratione visus .cd. refringitur in .de. et sic consequenter vsque ad .b. progrediendo. Et perinde per secundam suppositonem perspectiuae ab oculo .a. videbitur .b. Quod fuit probandum. Igitur quotcunque[246] propositis speculis etc. [S89v]

246 **quotcunque** *S*, quodcunque *O*

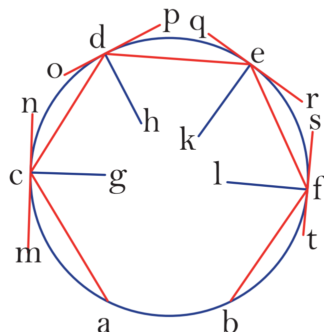


Fig. 178

Suponhamos, por exemplo, que se vê por meio de quatro espelhos (o argumento será igual para um número superior de espelhos). Pelo lema demonstrado, descrevo um círculo pelos dois pontos A e B. Na sua parte superior (a restante secção permanece sem divisões), assinalo quatro pontos ao acaso, quer cortem a dita porção do círculo em partes iguais ou desiguais, indiferentemente, e que estas sejam CD e EF. Ligue-se A a C, C a D, D a E, E a F e F a B. Bissete-se o ângulo ACD por meio da linha CG, pela nona proposição do primeiro [livro dos *Elementos*]. Do mesmo modo, [bissete-se] o ângulo CDE por meio da linha DH, pela mesma proposição, e o ângulo DEF, por meio da linha EK, e, finalmente, o ângulo EFB, por meio da linha FL. Se se colocarem espelhos planos perpendiculares a CG, HD, KE e LF; por exemplo, o espelho MCN, [perpendicular] a CG; o espelho ODP, [perpendicular] a HD, o espelho QER, [perpendicular] a KE; o espelho SFT, [perpendicular] a LF; então, o ponto B será visto pelo olho por meio dos espelhos dados no número [estabelecido], o que se prova da seguinte maneira.

Uma vez que os ângulos GCM e GCN são iguais, pela definição de linha perpendicular, e os ângulos GCA e GCD foram postos iguais, por hipótese; então, subtraídos estes de iguais, restarão os ângulos iguais ACM e DCN, pela terceira noção comum. Uma vez que são opostos em relação à perpendicular CG; então, pela primeira deste [tratado], o raio visual AC reflete-se para CD no espelho MCN[15]. Pela mesma razão, o raio visual CD reflete-se para DE e assim, consequentemente, progride até B. Do mesmo modo[16], pela segunda suposição da *Perspetiva*, B será visto pelo olho A. O que se quis provar. Portanto, por meio de espelhos dados em qualquer número etc.

---

15 Aqui a demonstração clarifica que o ponto fica dado em posição, o que faz com que os pontos não possam ser assinalados ao acaso, como Melo indicou no início da prova.

16 «Do mesmo modo», porque o argumento foi utilizado no final da proposição décima terceira.

Theorema decimum quintum. *Illud idem quoque et in conuexis et in cauis speculis videri potest.*

Retenta superiori figura producatur .gc. vsque in .i. in quo puncto ponatur centrum speculi conuexi .tcv. ita quod eius circunferentiam ingrediatur punctum .c. .dh. autem producatur in .x. quod sit centrum speculi conuexi alterius quod sit .zdy. et eodem modo de aliis fiat.

Dico tunc quod ab oculo .a. videbitur .b. per proposita numero conuexa specula.

Quoniam enim ea demonstratione praemissae anguli .acm. et .dcn. sunt aequales, et anguli .mcv.[247] et .nct. per primum corollarium primae huius. Sunt enim anguli contingentes quare ad angulos rectos est .ncm. ipsi .ic. ergo per communem sententiam erit | angulus totus .acv.[248] equalis toti angulo .dct.[249] Quare per primam [O84r] huius .ac. refringitur a speculo conuexo .vct. in .d. Eadem ratione probabitur .cd. refringi in .e. et .de. in .f. etc. ergo per secundam suppositionem perspectiuae .b. videbitur ab oculo .a. per proposita numero conuexa specula. Quod fuit probandum.

Eodem modo ponendo centrum speculi concaui in signo .g. puta .vct. Item alterius .zdy. in signo .h. et sic de aliis, ita quod superficies speculorum tangant super puncta .c.d.e.f. | dico quod vt prius videbitur .a. per proposita numero specula [S90r] concaua.

---

247 **.mvc.,** .mcn. *SO*
248 **.acv.,** .acn. *SO*
249 **.dct.,** .gct. *SO*

Teorema décimo quinto. *Aquele mesmo [objeto] também se pode ver por meio de espelhos convexos e côncavos.*

[Fig. 179] | Mantendo-se a figura anterior, prolongue-se GC para I e ponha-se neste ponto o centro do espelho convexo TCV, de tal forma que o ponto C fiq*Perspetiva*ue incluído na sua circunferência. Prolongue-se DH para X, e seja [este ponto] o centro do segundo espelho convexo ZDY, e proceda-se da mesma maneira em relação aos restantes.

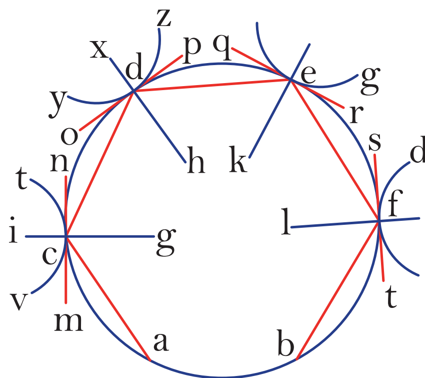


Fig. 179

Afirmo agora que [o objeto] B será visto a partir do olho A por meio dos espelhos convexos estabelecidos no número [indicado].

Com efeito, uma vez que, como se vê na demonstração da [proposição] anterior, os ângulos ACM e DCN são iguais, bem como os ângulos MCV e NCT, pelo primeiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado] (pois são ângulos de tangência, razão por que NCM é perpendicular a IC); então, por noção comum, o ângulo todo ACV será igual ao ângulo todo DCT. Por esta razão, pela primeira [proposição] deste [tratado], AC reflete-se para D no espelho convexo VCT. Pela mesma razão se provará que CD se reflete para E e DE para F, etc. Logo, pela segunda suposição da , B será visto a partir do olho A por meio dos espelhos convexos estabelecidos no número indicado. O que se quis provar.

[Fig. 180] | Da mesma maneira, se se colocar o centro de um espelho côncavo, por exemplo VCT, no ponto G, e, da mesma forma, de um segundo [espelho côncavo] ZDY, no ponto H, e assim também em relação aos restantes, de tal forma que as superfícies dos espelhos sejam tangentes nos pontos C, D, E e F, afirmo que, tal como antes, A será visto por meio dos espelhos côncavos estabelecidos no número [indicado].

Cum enim per eandem demonstrationem praemisse sit .acm. angulus aequalis angulo .dcn. demptis angulis .vcm.[250] et .tcn. etiam aequalibus per corollarium primum primae huius erit reliquus .acv.[251] aequalis reliquo .dct. per communem sententiam. Consimiliter igitur refringetur .ac. in .d. et eodem modo probabis de aliis quod .cd. refringatur in .e. etc. Idem igitur et in conuexis et in cauis speculis quotcunque videri potest. Quod fuit ostendendum.

Lemma. *Si ad datum signum date recte lineae producantur due lineae ad diuersas partes constituentes angulos ad verticem aequales, ille due lineae[252] in directum erunt.*
Sit enim .ab. recta linea, ad cuius signum .d. producantur due lineae .cd. .de. constituentes angulos .cda. .bde. aequales.

Dico .ce. esse vnicam rectam lineam.

Quoniam enim super rectam lineam .ab. erigitur .cd ergo per tertiam decimam primi .adc. .cdb. anguli duobus rectis sunt aequales. Est autem ex hypotesi angulus .cda. aequalis angulo .bde. ergo per communem sententiam adiuncto illis eodem angulo .cdb. erunt duo anguli .cda. .cdb. aequales duobus .cbd. .bde. Sed priores duo probati sunt aequales duobus rectis, ergo et duo posteriores. Ad signum igitur .d. recte lineae .ab. producte sunt due lineae .cd. .de. non ad easdem partes que faciunt duos angulos aequales duobus rectis. ergo per decimam quartam primi .ce. in directum est. quod fuit probandum. Si igitur ad datum.

---

250 **.vcm.,** .acm. *SO*
251 **.acv.,** .acn. *SO*
252 **lineae** *S*, rectae lineae *O*

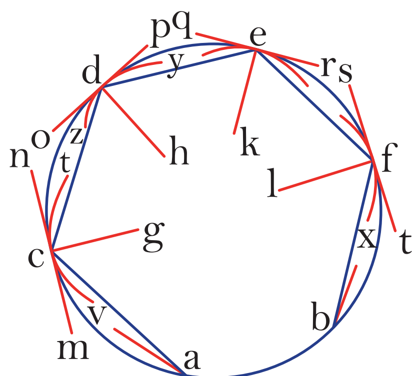


Fig. 180

Uma vez que, pela mesma demonstração da [proposição] anterior, o ângulo ACM é igual ao ângulo DCN; [então,] subtraídos os ângulos MCV e TCN, também eles iguais pelo primeiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], o [ângulo] restante ACV será igual ao restante ângulo DCT, por noção comum. Portanto, de modo semelhante, AC refletir-se-á para D e, da mesma maneira, provarás, a respeito dos restantes, que CD se reflete para E, etc. Logo, o mesmo [objeto] pode ser visto por meio de qualquer número de espelhos convexos e côncavos. O que se quis mostrar.

Lema. *Se, num ponto dado de uma linha reta dada, se traçarem duas retas para lados diferentes [da reta] e estas fizerem ângulos iguais no vértice, essas duas linhas estarão a direito.*
[Fig. 181] | Seja AB a linha reta, em cujo ponto D se traçam as duas linhas CD e DE, que fazem os ângulos CDA e BDE iguais.

Afirmo que CE é uma única linha reta.

Uma vez que sobre a linha reta AB se levanta [a reta] CD; então, pela décima terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], os ângulos ADC e CDB são iguais a dois retos. Mas, por hipótese, o ângulo CDA é igual ao ângulo BDE. Logo, se se lhes adicionar o ângulo CDB, os dois ângulos CDA e CDB serão iguais aos dois ângulos CDB e BDE, por noção comum. Mas provou-se que os dois primeiros são iguais a dois retos; logo, também os dois últimos [são iguais a dois retos]. Portanto, no ponto D da linha reta AB, traçaram-se as duas linhas CD e DE para lados diferentes, que fazem dois ângulos iguais a dois retos. Logo, pela décima quarta do primeiro [livro dos *Elementos*], CE está a direito. O que se quis provar. Portanto, se num dado...

| **Propositio decima sexta.** *In planis speculis vnumquodque eorum que sub aspectum cadunt, per illius quod sub aspe|ctum cadit perpendicularem videtur.* [O84v] [S90v]

Sit ergo speculum planum .def. duo oculi .a. .b. a quibus procidant visus reflexi in .c. .bh.[253] et .ag. producaturque perpendicularis a .c. signo super speculum .def. per vndecimam vndecimi que sit .ce.

Dico .c. visibile videri in linea .ce. producta et non alibi.

Producatur .ce. vsque in .k. et ponatur per tertiam primi .ek. ipsi .ce. aequalis. connectanturque .hk. .gk. Tunc quoniam angulus .ceh. aequalis est angulo .hek. (vterque enim rectus est), et .ce. linea ex hypotesi ipsi .ek. aequalis est

253 **.c. .bh.**, .cbh. *SO*

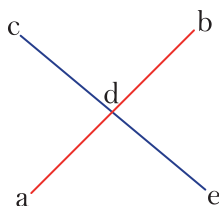


Fig. 181

Proposição décima sexta. *Em espelhos planos, qualquer objeto que cai sob o olhar vê-se na perpendicular do [objeto] que cai sob o olhar*[17].

[Fig. 182] | Seja DEF o espelho plano. Sejam A e B os dois olhos. A partir destes, estendam-se os raios visuais BH e AG, refletidos para C. A partir do ponto C, trace-se a perpendicular ao espelho DEF, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], seja CE.

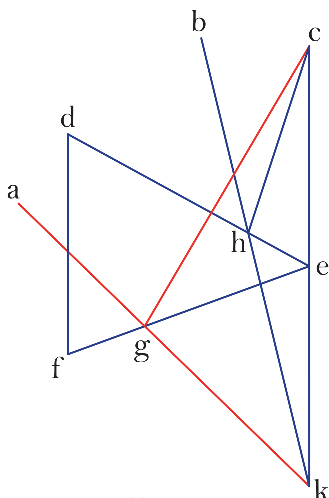


Fig. 182

Afirmo que o visível C se vê no prolongamento da linha CE, e não noutro sítio.

Prolongue-se CE até K. Ponha-se EK igual a CE, pela terceira [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Ligue-se H a K e G a K. Uma vez que o ângulo CEH é igual ao ângulo HEK (pois cada um deles é reto), e a linha CE é igual à linha EK (por hipótese), e EH é comum; então, pela quarta [proposição] do primeiro [livro

17 Ou seja, mais especificamente: «Em espelhos planos, qualquer objecto avistado aparece na perpendicular baixada do objecto para o plano do espelho»

.eh. autem communis ergo per quartam primi .che. angulus aequalis est angulo .ehk. Est autem .che. angulus per primam huius aequalis angulo .bhd. ergo per primam communem sententiam et .bhd. .ehk.[254] adinuicem aequales sunt. Quare per Lemma huius propositionis .bk. est recta linea. Eodem modo probabis .agk. rectam lineam esse. probabis scilicet .agf. .egk. angulis aequalibus per quartam primi et primam huius. Et per Lemma propositioni huic prepositum.

Cum autem ex secundo corrogato a nobis omne visubile videatur in concursu duorum visuum ab oculis productorum, sequitur quod .c. videbitur in .k. Quare cum .k. signum sit punctum lineae .ce. productae ex hypotesi, videtur .c. in linea .ce. producta quod fuit probandum. Indifferens est an visus .ag. .bh. sint in eodem plano vel non. Eodem enim modo probatur .ak. rectam lineam esse per angulos contrapositos aequales. In planis igitur speculis etc.

Theorema decimum septimum. *In speculis conuexis vnumquodque eorum que sub aspectum cadunt per eam que a re visa in sphaere centrum deducitur rectam lineam spectantur.*

Sint duo oculi .ab. speculum conuexum cuius centrum .k. visibile vero sit .c. in quod refringantur duo visus ab ocu|lis .ab. qui sint .bd. .ae. connectanturque .ck. signa, [S91r] visibile scilicet cum centro.

Dico .c. videri in recta linea .ck. producta.

Sint primum visus illi diuersis planis et concurrant | producti, [O85r] vt in precedenti propositione in signo .h. vbi per corrogatum secundum huius ipsum .c. videbitur. Quoniam igitur per tertium

254 **.ehk.**, .bek. *SO*

dos *Elementos*], o ângulo CHE é igual ao ângulo EHK. Mas o ângulo CHE é igual ao ângulo BHD, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Logo, pela primeira noção comum, também os ângulos BHD e EHK são iguais. Por isso, pelo lema desta proposição, BK é uma linha reta. Da mesma maneira provarás que AGK é uma linha reta, a saber: por serem iguais os ângulos AGF e EGK (pela quarta do primeiro e pela primeira deste), e pelo lema apresentado antes desta proposição.

Mas, uma vez que, de acordo com o nosso segundo corrogado, qualquer visível se vê no ponto de concorrência dos dois raios visuais traçados a partir dos olhos, segue-se que C será visto em K. Por isso, uma vez que K é um ponto da linha CE prolongada, por hipótese, C ver-se-á no prolongamento da linha CE. O que se quis provar. É indiferente se os raios visuais AG e BH estão no mesmo plano ou não; pois se prova do mesmo modo que AK é uma linha reta, por meio da igualdade dos ângulos contrapostos. Portanto, em espelhos planos, etc.

Teorema décimo sétimo. *Em espelhos convexos, qualquer objeto que cai sob o olhar, vê-se na linha reta baixada da coisa avistada para o centro da esfera.*

[Fig. 183] | Sejam A e B os dois olhos; seja um espelho convexo com centro K; e seja C, o visível, para o qual se refletem dois raios visuais a partir dos olhos; sejam BD e AE. Liguem-se os pontos C e K, ou seja, o visível com o centro.

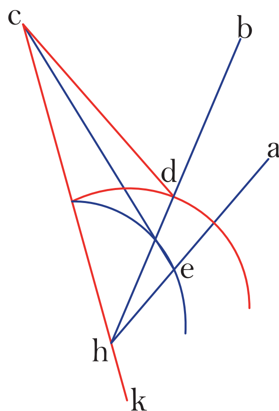


Fig. 183

Afirmo que C se vê no prolongamento da linha reta CK.

Em primeiro lugar, estejam os raios indicados em planos diferentes e, tal como na proposição anterior, depois de prolongados, sejam concorrentes no ponto H, onde se verá C, pelo segundo corrogado deste [tratado]. Uma vez que, pelo terceiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], K é um ponto pertencente a

corollarium prime huius .k. signum est in vtroque planorum .cdb. .cea. Est enim tota linea .ck. per illud corollarium vtrique plano communis, Quare per primam vndecimi[255] quelibet pars eius in vtroque illorum planorum est. Consimiliter vero et .c. est in vtroque illorum planorum .cdb. .cea. De .h. quod etiam sit in illis duobus planis patet, primo est in plano .cdb. quum sit in recta linea .db. producta per primam vndecimi, deinde per eandem in plano .cea. quum sit in recta linea .ae. producta. Manifestum est itaque .chk. signa esse in duobus planis, ergo in communi sectione que per tertiam vndecimi est recta linea. Videtur autem .c. in .h. et .h. est in linea .ck. producta. ergo propositum.

Si vero visus illi sint in eodem plano cum oculo, aut hoc fieri non potest, propter nasi eminentiam, aut si certe tandem progrediantur visus, in vnum coeunt, atque non efficitur certa visio, atque vtcunque res sese habeat nunquam certo visu res spectabitur, vt experimento satis compertum est.

Theorema decimum octauum. *In cauis speculis vnumquodque eorum que sub aspectum cadunt, per eam que a re visa in centrum sphaere ducitur rectam lineam spectatur.*

Sit enim spacium .dep. .gh.[256] cuius centrum .k. vt in precedente, visibile sit .c. oculi .ab. et ab oculo .a. cadat visus .ad. refractus in .c. ab oculo .b. cadat .be. visus refractus in idem .c. connectanturque .ck. signa.

Dico .c. | videri in ipsa .ck. linea producta. [S91v]

Quoniam enim .c. videtur duobus oculis, ergo per secundum corrogatum[257] huius videbitur in concursu duorum visuum .ad. .be. productorum et continuatorum. Sit igitur concursus ille in signo .f. Quoniam igitur per tertium corollarium prime huius .k. est in vtroque planorum .adc. .bec. vt in precedenti deduximus in quibus et .c. et consimiliter .f. in vtroque illorum per primam vndecimi, quum sit in lineis .ad. .be. productis. ergo tria signa .ckf. sunt in duobus diuersis planis, ergo in communi illorum sectione que per tertiam vndecimi est recta linea. Quare cum .c. videatur in .f. et .f. sit signum lineae .ck. producte, sequitur quod .c. | videbitur in [O85v]
linea .ck. quod fuit probandum.

255 **vndecimi**, decimi *SO*
256 **.gh.,** .ghl. *SO*
257 **corrogatum,** postulatum sexte *SO*

ambos os planos CDB e CEA (pois a linha toda CK é comum a ambos os planos, pelo mesmo corolário, [e] por isso, pela primeira [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], qualquer parte dela pertence [também] a ambos os planos), e, da mesma forma, C também pertence a ambos os planos CDB e CEA, então é evidente, a respeito de H, que está também nesses dois planos: está no plano CDB porque está no prolongamento da linha reta DB, pela primeira [proposição] do décimo primeiro [livro dos *Elementos*]; está no plano CEA, porque está no prolongamento da linha reta AE, pela mesma proposição. Assim sendo, é manifesto que os pontos C, H e K pertencem aos dois planos e que, por conseguinte, pertencem à interseção [dos dois planos], a qual, pela terceira do undécimo, é uma linha reta. Mas C vê-se em H e H está no prolongamento da linha CK; logo, o que se propôs...

Caso aqueles raios estejam no mesmo plano em que está o olho: ou isto não pode suceder, por causa do comprimento do nariz, ou, havendo a certeza de que os raios se podem estender, eles juntar-se-ão e não se terá uma visão nítida nem o objeto se verá tal como se encontra com um raio visual determinado, como ficou suficientemente esclarecido por experimentação.

Teorema décimo oitavo. *Em espelhos côncavos, qualquer objeto que cai sob o olhar, vê-se na linha reta traçada do objeto avistado até ao centro da esfera.*

[**Fig. 184**] | Seja DEPGH uma região, com centro K[18], como na [proposição] anterior. Seja C o visível. Sejam A e B os olhos. A partir do olho A, caia o raio visual AD, refletido para C; a partir do olho B, caia o raio visual BE, refletido para o mesmo C. Liguem-se os pontos C e K.

Afirmo que C se vê na linha CK prolongada.

Uma vez que C se vê com os dois olhos; então, pelo segundo corrogado deste [tratado], ver-se-á no ponto de concorrência dos dois raios visuais AD e BE, estendidos e continuados. Seja então esse ponto de concorrência o ponto F. Uma vez que, pelo terceiro corolário da primeira [proposição] deste [tratado], K pertence a ambos os planos ADC e BEC (como concluímos na anterior), aos quais pertence igualmente o ponto C, e, da mesma forma, uma vez que F pertence a ambos [os planos], pela primeira [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*] (pois está no prolongamento das linhas AD, BE), então os três pontos C, K e F pertencem aos dois planos diferentes. Logo, pertencem à sua interseção, a qual, pela terceira do undécimo, é uma linha reta. Por esta razão, uma vez que C se vê em F e F é um ponto da linha CK prolongada, segue-se que C se verá na linha CK. O que se quis provar.

---

18 A região indicada é a área côncava compreendida pelos arcos GHEP e GDP.

Corollarium.

Hinc in cauis speculis simulachra interdum in aere interdum intra speculum et oculos videntur, sed non est nisi a duobus oculis, altero enim clauso nihil tale apparet. Videtur enim semper vbi duo visuus procidentes concurrunt, qui aliquando in aere, aliquando in speculo concurrunt.

Theorema decimum nonum. *In planis speculis que dextra sunt, sinistra apparent, et que sinistra, dextra, et simulachrum aequum est rei visae, et distantia a speculo aequalis est.*

Sit speculum planum .fgh. oculus vero .a. res visa .ce. cadantque ab oculo .a. visus in speculum .fgh. .ab. refractus in .c. et .ad. refractus in .e. Sit obliquae longitudinis siue rei vise proposite pars .c. quidem dextra .e. | vero sit pars sinistra. [S92r]

Dico simulacrum ipsius .ce. longitudinis tantum distare a speculo .fgh. quantum distat ipsa .ce. res visa ab ipso speculo .fgh. et aequum esse simulachrum rei et ipsius .ce. partem dextram videri apparereque sinistram et sinistram dextram.

Ducuntur enim .cf. et .eg. perpendiculares super speculum per vndecimam vndecimi, que producantur in continuum et directum intra speculum.

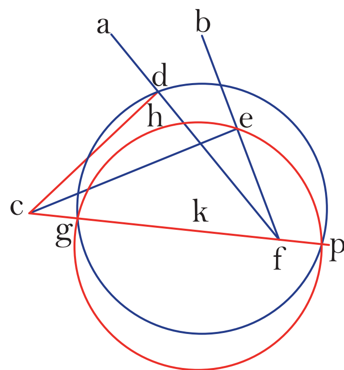


Fig. 184

Corolário.

Daqui [se segue] que, em espelhos côncavos, as imagens aparecem ora no ar, ora entre o espelho e os olhos. Mas não é assim senão usando os dois olhos; se se fechar um deles, não aparece o mesmo. Com efeito, só se vê quando os dois raios visuais estendidos são concorrentes; por vezes são concorrentes no ar, por vezes, no espelho.

Teorema décimo nono. *Em espelhos planos, as coisas que estão à direita aparecem à esquerda, e as que estão à esquerda aparecem à direita, e a imagem é igual ao objeto visto, e a distância ao espelho é igual*[19].

[Fig.185] | Seja FGH um espelho plano, A o olho e CE o objeto avistado. A partir do olho A, caiam no espelho FGH os raios visuais AB, refletido para C, e AD, refletido para E. Seja C o lado direito do comprimento oblíquo, ou seja, do objeto dado que se vê, e seja E o lado esquerdo.

Afirmo que a imagem do comprimento CE está tão distante do espelho FGH quanto o próprio objeto avistado CE do mesmo espelho FGH, e que a imagem é igual ao objeto, e que o lado direito de CE se vê aparecer à esquerda, e o lado esquerdo à direita.

Traçam-se as perpendiculares ao espelho CF e EG, pela undécima [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], sendo prolongadas continuamente a direito para dentro do espelho.

19 Quer dizer: a distância da imagem ao espelho é igual à distância que separa os olhos do espelho.

Eritque per decimam sextam huius simulachrum ipsius .c. in concursu linearum .ab. .cf. productarum, sit in .k. Item per eandem simulachrum ipsius .e. in concursu linearum .ad. .eg. productarum sit autem in .l. connectantur .cl. signa per primum postulatum.

Dico igitur .kl. que in simulachrum .ce. aequam esse magnitudinem ipsi .ce. rei vise, et tantum distare a speculo.

Connectantur enim .fe. .fl. tunc quoniam aequales sunt anguli per primam huius .abh. .cbf. .abh. autem per decimam quintam primi aequalis sit angulo .fbk. ergo per primam communem sententiam .cbf. .fbk. inter se aequales sunt. Aequales etiam sunt .cfb. .bfk. per secundam definitionem vndecimi. ergo per vicesimam sextam primi elementorum .fc. .fk. lineae aequales sunt. Consimiliter quoniam .adh. .edg. per primam huius aequales sunt, et per decimam quintam primi .adh. angulus | aequalis est ipsi .gdl. angulo, ergo per primam communem sententiam [O86r] .edg. .gdl. aequales sunt. Sunt et eodem modo .dgl. .dge. anguli adinuicem aequales per secundam definitionem vndecimi et .gd. linea communis. ergo .eg. .gl. lineae aequales sunt. Sunt autem .fc. .fk. item .ge. .gl. distantie rei vise et simulachri a speculo ergo vltima pars propositionis probata.

Quoniam vero .ck. | .el. recte lineae eidem plano puta .fgh. perpendiculares sunt, [S92v] ergo per sextam vndecimi paralele adinuicem erunt, et per septimam eiusdem in eodem plano cum ipsis paralelis .ce. ..fe. .fg. .fl. .kl. At quoniam aequales sunt anguli .fge. .fgl. (vterque enim rectus per secundam definitionem vndecimi). Probata etiam sunt aequalia latera esse .eg. .gl.[258] .fg. vero est latus commune. Erit ergo per quartam

---

258 **.gl.,** .el. *SO*

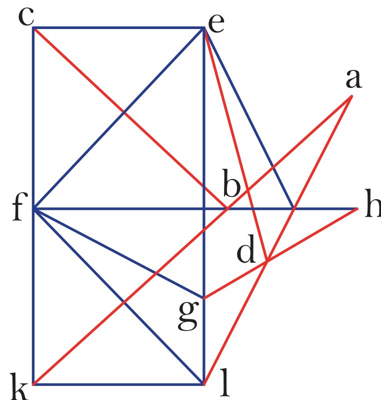


Fig. 185

Pela décima sexta deste [tratado], a imagem de C estará no ponto de concorrência do prolongamento das linhas AB e CF, seja em K. Do mesmo modo, pela mesma [proposição], a imagem de E [surgirá] no ponto de concorrência das linhas AD e EG prolongadas, seja em L. Liguem-se os pontos E e L, pelo primeiro postulado [do primeiro dos *Elementos*].

Afirmo que KL, que [é] a imagem de CE, é uma grandeza igual ao objeto visto CE, e que se encontra à mesma distância do espelho.

Tracem-se FE e FL. Uma vez que os ângulos ABH e CBF são iguais, pela primeira [proposição] deste [tratado], e o ângulo ABH é igual ao ângulo FBK, pela décima quinta do primeiro, então CBF e FBK são iguais, pela primeira noção comum. [Os ângulos] CFB e BFK também são iguais, pela segunda definição do undécimo [livro dos *Elementos*]; logo, as linhas FC e FK são iguais, pela vigésima sexta do primeiro dos *Elementos*. Da mesma forma, uma vez que ADH e EDG são iguais, pela primeira deste [tratado], e o ângulo ADH é igual ao ângulo GDL, pela décima quinta do primeiro, então [os ângulos] EDG e GDL são iguais, pela primeira noção comum. Do mesmo modo, os ângulos DGL e DGE também são iguais, pela segunda definição do undécimo. Mas a linha GD é comum. Logo, as linhas EG e GL são iguais. Mas FC e FK, do mesmo modo que GE e GL, são as distâncias do objeto avistado, e da imagem, ao espelho; logo, a última parte da proposição ficou provada.

Uma vez que as linhas retas CK e EL são perpendiculares ao mesmo plano, a saber: FGH, então serão paralelas entre si, pela sexta [proposição] do undécimo [livro dos *Elementos*], e as linhas CE, FE, FG, FL e KL [estarão] no mesmo plano que estas paralelas, pela sétima do mesmo. Mas, uma vez que os ângulos FGE e FGL são iguais (pois ambos são retos, pela segunda definição do undécimo), e se provou que os lados EG e GL são iguais, e FG é um lado comum; então, pela quarta do primeiro, a base FE é igual à base FL, e o ângulo GFL é igual ao ângulo GFE. Mas o

primi basis .fe. basi .fl. aequalis, et angulus .gfl. angulo .gfe. aequalis est. Sed totus angulus .gfc. toti angulo .gfk. aequalis est (uterque enim rectus per secundam definitionem vndecimi) demptis ergo ab illis aequalibus puta .efg.[259] .gfl. relicti per tertiam communem sententiam aequales erunt, qui sunt .cfe. .kfl. Quoniam itaque .cf. linea aequalis est ipsi .fk. et .fe. ipsi .fl. vt probatum est et angulus .kfl. angulo .cfe. ergo per quartam primi basis .ce. basi .kl. aequalis est. Est autem .ce. res visa .kl. autem simulachrum eius. ergo simulachrum aequum est rei vise. quod erat probandum.

Quoniam obliqua magnitudo .ce. per nonam huius sicut se habet sic videtur. igitur visu .ab. dextro, videtur .c. pars dextra relatione facta ad videntem, quare et .k. videbitur visu dextro, et .l. visu sinistro. et proinde cum imago .kl. spectanti aduersetur eius signum .k. quod dextre spectantis[260] respondet, erit sinistra pars imaginis, .l. vero dextra. Sed ponitur .k. simulachrum ipsius .c. partis dextre, .l. vero ipsius .e. partis sinistre. ergo dextra apparent sinistra, et sinistra dextra, cum superiora appareant inferiora, per septimam huius, quod fuit tertium probandum. Igitur in planis speculis etc.

Theorema vicesimum. | *In conuexis speculis sinistra, dextra, et dextra sinistra, spectantur, et interuallum*[261] *a speculo minus simulachro abest.* [S93r]

| Sit speculum .mdeol. cuius centrum .h. magnitudo visa sit .bc. oculus vero sit .a. a quo inquam oculo procidant radii visuales .ad. quidem reflexus in .b. .ae. vero reflexus in .c. Sit pars magnitudinis .bc., .b. dextra, .c. vero sinistra. [O86v]

259 **.efg.,** .cfg. *SO*
260 **spectantis,** spectanti *SO*
261 **interuallum,** add. simulachri *SO*

ângulo todo GFC é igual ao ângulo todo GFK (pois ambos são retos pela segunda definição do undécimo). Logo, subtraídos daqueles os ângulos iguais EFG e GFL, os restantes, que são CFE e KFL, serão iguais, pela terceira noção comum. Assim, uma vez que a linha CF é igual à linha FK, e FE a FL (como se provou), e o ângulo KFL é igual ao ângulo CFE; então, pela quarta do primeiro, a base CE é igual à base KL. Mas CE é o objeto visto, e KL é a sua imagem. Logo, a imagem é igual ao objeto avistado. O que se queria provar.

Uma vez que o comprimento oblíquo CE se vê tal como se encontra, pela nona [proposição] deste [tratado]; então, C, [que é] o lado direito [do objeto], relativamente ao observador, vê-se por meio do raio visual AB, que está à direita. Por esta razão, K também se verá por meio do raio visual à direita, e L por meio do raio visual à esquerda. Assim, uma vez que a imagem KL se encontra virada para o observador, o seu ponto K, que corresponde à direita do observador, constituirá a parte esquerda da imagem; e L, a direita. Mas põe-se que K é a imagem do lado direito C, e L, a do lado esquerdo E. Logo, as coisas que estão à direita aparecem à esquerda, e as que estão à esquerda aparecem à direita (tal como as que estão mais elevadas aparecem mais baixas [e vice-versa], pela sétima deste). O que se quis provar em terceiro lugar. Portanto, em espelhos planos, etc.

Teorema vigésimo. *Em espelhos convexos, as coisas que estão à esquerda vêem-se à direita e as que estão à direita vêem-se à esquerda, e a distância da imagem ao espelho é menor [do que a distância do objeto ao espelho].*

[Fig. 186] | Seja MDEOL um espelho com centro H; BC, a grandeza observada; A, o olho. A partir desse olho, estendam-se os raios visuais AD, refletido para B, e AE, refletido para C. Seja B o lado direito da grandeza BC; e C, o seu lado esquerdo.

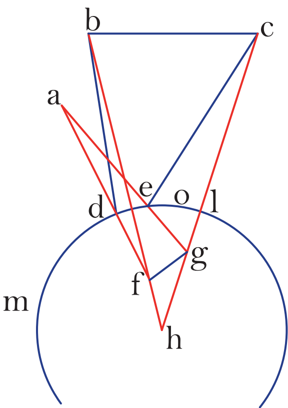


Fig. 186

Dico sinistra dextra, et dextra sinistra apparere.

Connectantur enim .bh. et .ch. et secet .ch. linea circunferentiam sphere in signo .l. et producantur .ad. .ae. in continuum et directum per decimam septimam huius .b. [videbitur] in concursu .bh. cum .ad. sit ille concursus .f. Item .c. per eandem videbitur. in concursu .ae. cum .ch. sit in .g. Quoniam igitur obliqua longitudo est .bc. ergo per decimam propositionem sicut est, sic spectatur. Quare cum .ad. radius sit dexter, dextra erunt et .b. et .f. relatione ad videntem facta per decimam huius, ac per eandem .cg. sinistra. Cum autem imago .fg. spectanti aduersetur eius signum .f. quod dextre spectanti respondet necessario erit pars simulachri sinistra, et .g. dextra, propter commutationem situs, vt videre est in hominibus aduersum iunctis, et respicientibus se inuicem, quorum alterius dextra manus, sinistre alterius respondet, et sinistra dextre. Cum igitur .f. ponatur simulachrum ipsius .b. partis dextre et .g. simulachrum ipsius .c. partis sinistre et spectetur .f. sinistrum, .g. ergo vero dextrum, clarum est quod sinistra dextra, et dextra sinistra apparent, quod fuit probandum.

Dico secundo quod simulachrum ipsius .bc. rei vise puta .fg. minus abesset a speculi circunferentia quam res visa.

Et in primis probemus .c. magis distare quam .g. Connectatur .e. | signum cum [S93v] .h. centro que producatur in continuum et directum vsque in .r. eritque .er. per secundum corollarium prime huius in eodem plano cum toto visu .aec. diuidetque angulum .aec. bifariam. Erit igitur .aer. angulus aequalis angulo .rec. Ducatur etiam per decimam septimam tertii per signum .e. in plano .aec. contingens sphaeram .delm. que sit .oe., producta concurrat cum .ch. in .k. concurreret autem inter .l. et .c. quia alioqui vel caderet contingens intra circulum, quod impossibile est | vt [O87r] ostenditur in decima sexta tertii vel .ae. radius cum .ec. esset vna recta linea, et non refracta (Constituit enim .ek. que eadem esset cum .ec. vna cum .er. angulum rectum). Quoniam igitur .oek. et .reh. recte lineae sese secant in signo .e. ergo per decimam quintam primi .aer. .heg. aequales sunt. Aequales etiam sunt .aer. .rec. ergo per communem sententiam .rec. .heg. aequales sunt. Per decimam sextam vero eiusdem primi maior est .rec. angulus angulo .ecg. ergo per primam communem sententiam additam a Campano[262] .heg. maior erit angulus angulo .ecg. Cum vero et triangulum sit .heg. cuius latus .hg. producitur, ergo per eandem decimam

262 **Campano,** Campaurit *SO*

Afirmo que o que está à esquerda aparece à direita, e o que está à direita aparece à esquerda.

Ligue-se B a H e C a H, e que a linha CH corte a circunferência da esfera no ponto L. Prolonguem-se AD e AE continuamente a direito. Pela décima sétima [proposição] deste [tratado], B vê-se no ponto de concorrência de BH com AD [prolongada], seja F este ponto de concorrência. Da mesma forma, pela mesma [proposição], C ver-se-á no ponto de concorrência de AE com CH; seja em G. Uma vez que BC é uma grandeza oblíqua; então, vê-se tal como se encontra, pela décima proposição. Por esta razão, uma vez que o raio visual AD se encontra à direita, B e F estarão à direita em relação ao observador, pela décima [proposição] deste [tratado]. Pela mesma [proposição], CG estará à esquerda. Mas, uma vez que a imagem FG está virada para o observador, o seu ponto F, que corresponde à direita do observador, será necessariamente a parte esquerda da imagem, e G, a parte direita, devido à mudança de posição, como é possível verificar quando dois homens se juntam de frente um para o outro e se olham mutuamente: a mão direita de um deles corresponderá à mão esquerda do outro, e a esquerda, à direita. Então, uma vez que se estabeleceu que F é a imagem de B, lado direito [do objeto], e G, a imagem de C, lado esquerdo [do objeto], e uma vez que F se observa à esquerda e G à direita, é claro que o que está à esquerda aparece à direita e que o que está à direita aparece à esquerda. O que se quis provar.

Afirmo em segundo lugar que a imagem do objeto avistado BC, a saber, FG, está menos afastada da circunferência do espelho do que o objeto avistado.

Em primeiro lugar, provemos que C está mais distante [do espelho] do que [Fig. 187] G. | Ligue-se o ponto E ao centro H, e prolongue-se [esta linha] continuamente a direito até R. Pelo segundo corolário da primeira [proposição] deste [tratado], ER estará no mesmo plano em que se encontra o raio visual todo AEC, e bissetará o ângulo AEC. Portanto, o ângulo AER será igual ao ângulo REC. Trace-se também, pela décima sétima [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*], pelo ponto E, no plano AEC, uma [reta] tangente à esfera DELM, seja OE. Que [esta tangente], prolongada, concorra com CH em K (será concorrente entre L e C, porque, de outro modo, ou a tangente cairia no interior do círculo, o que é impossível, como se prova na décima sexta do terceiro, ou o raio visual AE constituiria com EC uma linha reta e não quebrada, pois EK (que seria a mesma que EC) faz um ângulo reto com ER. Portanto, uma vez que as linhas retas OEK e REH são secantes no ponto E; então, pela décima quinta do primeiro, [os ângulos] AER e HEG são iguais. AER e REC também são iguais; logo, por noção comum, REC e HEG são iguais. Mas, pela décima sexta do mesmo [livro] primeiro, o ângulo REC é maior do que o ângulo ECG; logo, pela primeira noção comum acrescentada por Campano, o ângulo HEG será maior do que o ângulo ECG. Mas, uma vez que HEG também é um triângulo cujo lado HG se encontra prolongado; então, pela mesma décima sexta, o ângulo

sextam .egc. angulus maior est angulo .heg., multo maior igitur erit .egc. angulus angulo .ecg. Sed maiori angulo maius latus subtenditur, per decimam nonam primi ergo .ec. latus maius est .eg. latere. Quoniam vero per primam huius .aeo. angulus aequalis est angulo .cek. et per decimam quintam primi .aeo. aequalis .keg. ergo per primam communem sententiam .cek. .keg. aequales sunt. Quare quum in triangulo .ceg. .ok. recta linea secans angulum .ceg. bifariam secet et ba|sim in signo .k. erit per [S94r] tertiam sexti eadem ratio .ck. ad .kg. que .ce. ad .eg. Sed probata est .ce. maior quam .eg. ergo et .ck. maior est ipsa .kg. Est autem .cl. maior .ck. quia totum sua parte, a fortiori igitur .cl. maior est .lg. estque .cl. distantia ipsius .c. a[263] speculo et .lg. ipsius .g. distantia ergo .c. magis distat a speculo quam .g.

Eodem modo probabitur .f. minus[264] distare a speculo quam .b. connexis[265] .dh. signis et producta .dh. vsque in .p. et producta contingente .qds. Probabitur enim eodem modo .bd. maiorem esse quam .df. et eandem esse rationem .bd. ad .df. que .bs. ad .sf. et exinde maiorem esse distantiam .b. a sphaera, quam ipsius .f. ad eandem sphaere circunferentiam et sic de quocunque signo ipsius .fg. simulachri. Simulachrum igitur minus distat a circunferentia sphaere quam res visa, quod fuit probandum. In conuexis igitur speculis.

263 **.c. a,** .ca. *SO*
264 **minus,** magis *SO*
265 **connexis,** conuexis *SO*

EGC é maior do que o ângulo HEG; portanto, o ângulo EGC será muito maior do que o ângulo ECG. Mas o lado maior é subtenso pelo ângulo maior, pela décima nona do primeiro; logo, o lado EC é maior do que o lado EG. Mas, uma vez que, pela primeira [proposição] deste [tratado], o ângulo AEO é igual ao ângulo CEK, e, pela décima quinta do primeiro, AEO é igual a KEG; então, pela primeira noção comum, CEK e KEG são iguais. Por esta razão, uma vez que, no triângulo CEG, a linha reta OK bisseta o ângulo CEG e também corta a base no ponto K, [então,] pela terceira do sexto, será CK:KG=CE:EG. Mas provou-se que CE é maior do que EG, portanto CK também é maior do que KG. Ora, CL é maior do que CK, uma vez que o todo [é maior] do que a parte. Portanto, *a fortiori*, CL é maior do que LG. Mas CL é a distância de C ao espelho, e LG, a distância de G [ao espelho]; logo, C está mais distante do espelho do que G.

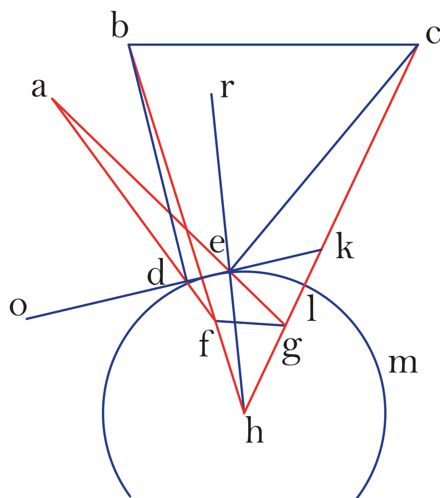


Fig. 187

[Fig. 188] | Provar-se-á do mesmo modo que F está menos distante do espelho do que B, ligados os pontos D e H, prolongada DH até P, e traçada a reta contingente QDS. Provar-se-á, com efeito, do mesmo modo, que BD é maior do que DF, e que BD:DF=BS:SF, e, por conseguinte, que a distância de B à esfera é maior do que a de F à mesma circunferência da esfera; e assim a respeito de qualquer ponto da imagem FG. Portanto, a imagem está menos distante da circunferência da esfera do que o objeto avistado. O que se quis provar. Logo, em espelhos convexos.

Theorema vicesimum primum. *In conuexis speculis simulachrum spectatis*[266] *minus est.*

| Sit conuexum speculum .ldem. cuius centrum .h. res uisa sit .bc. oculus autem .a. a quo procidant uisus refracti, .ad. quidem in .b. .ae. uero in .c. [O87v]

Dico simulachrum siue spectrum ipsius .bc.[267] minus esse et minus apparere quam sit ipsa .bc.

Vtcunque enim contingat vel quod .ad. .ae. visus refracti sint in eodem plano vel non (est enim indifferens) capiatur planum transiens per duo signa reflexionis in .de.[268] quod sit speculum planum .fodepg.[269] tunc quoniam .adl. angulus per primam huius aequalis est angulo .bdm. angulus autem .adl. maior est angulo .ado. quia totum maius sua parte ergo .bdm. angulus maior est

266 **spectatis,** spectantis *SO*
267 **.bc.,** .be. *SO*
268 **.de.,** .e. *SO*
269 **.fodepg.,** .fodepc. *SO*

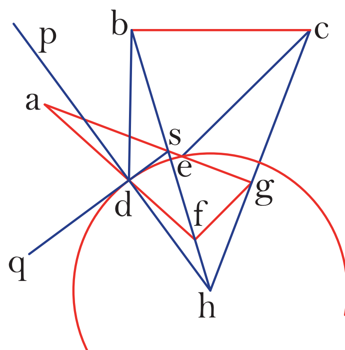


Fig. 188

Teorema vigésimo primeiro. *Em espelhos convexos, a imagem é menor do que os objetos avistados.*

[Fig. 189] | Seja LDEM um espelho convexo com centro H[20], BC, o objeto avistado, e A, o olho, a partir do qual se estendam os raios visuais AD, refletido para B, e AE, para C.

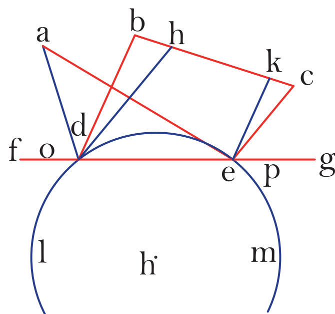


Fig. 189

Afirmo que a imagem ou visão de BC é menor e aparece menor do que BC.

Seja qual for a situação, ou seja, estejam os raios visuais AD e AE, refletidos, no mesmo plano ou não, pois tal é indiferente, tome-se o plano que passa pelos dois pontos de reflexão D e E. Tome-se o espelho plano FODEPG. Uma vez que o ângulo [misto] ADL é igual ao ângulo [misto] BDM, pela primeira [proposição] deste [tratado], e o ângulo [misto] ADL é maior do que o ângulo ADO, porque o todo é maior do que a parte, então o ângulo [misto] BDM é maior do que o referido ângulo ADO. Portanto, *a fortiori*, o ângulo retilíneo BDE, maior (pela nona noção

20 A figura repete a letra H, mas a letra referida ao centro não será novamente utilizada, não havendo perigo de confusão.

angulo eodem .ado. a fortiori igitur angulus | .bde. rectilineus maior angulo .bdm. [S94v] per nonam communem sententiam constituto scilicet ea recta linea et circunferentia .dem. maior erit angulo .ado. Non refringetur itaque .ad. visus a plano speculo .odepg. in .b. signum per primam huius. immo nec citra .b. versus punctum[270] .a. quia tunc adhuc multo magis in maiori angulo reflecteretur, quod falsum est per primam propositionem huius. Reflectetur igitur inter .b. et .c. producaturque quousque attingat magnitudinem siue rem visam .bc. et sit in .h. Consimiliter quoniam .ael. .cem. anguli aequales sunt, .cem. vero maior angulo .cep., .aed. vero rectilineus maior .ael. ex .ae. et .edl. circunferentia constitutus erit .aed. angulus rectilineus multo maior angulo .cep. et exinde per primam huius non refringetur .ae. in .c., nec vltra .c. sed citra, inter .db. et .ec. lineas. sit igitur .ae. visus refractus in .k.

Cum igitur .ad. a plano speculo refringatur in .h. et .ae.[271] in .k. per primam suppositionem perspectiue tantum .hk. basis <...> ahk. spectabitur. Cum autem .hk. pars sit totius .bc. sequitur quod non tota .bc. videbitur sub angulo .dae. a plano speculo sub quo videtur a conuexo speculo sed si videri debeat tota .bc. in plano speculo quod maiori angulo spectabitur, quam sit angulus .dae. At quoniam sub maiori angulo spectatur .bc. in plano | speculo in conuexo[272] autem minori (vt [O88r] iam ostensum est) maiore autem angulo spectata maiora apparent, minore autem minora, per quartam et quintam suppositiones perspectiue, ergo eadem .bc. res visa maior apparebit in speculo plano quam conuexo. Spectrum vero siue simulachrum rei vise (vt ostensum est in decima nona huius) in plano speculo apparet, et est aequum rei visae. ergo in conuexo apparet et est minus re visa.

Immo dato adhuc quod eodem angulo videretur spec|trum in conuexo speculo [S95r] quo in plano, quia in plano speculo distantia spectri a circunferentia aequalis est distantie ipsius rei vise, in conuexo autem minor (vt ostensum est in propositione vicesima huius) adhuc minus erit spectrum re visa cum in plano speculo spectrum sit aequale rei vise. In vniuersum enim quando lineae comprehendentes angulum plus extenduntur continuo basis illi angulo subtensa maior est modo semper ille lineae abscindantur aequales, et bases inuicem sint paralele (ut facile potest ostendi per quartam

---

270 **punctum,** puncta *SO*
271 **.ae.,** .ac. *SO*
272 **conuexo,** conuexa *SO*

comum) do que o ângulo [misto] BDM – quer dizer, o que é constituído pela linha reta [BD] e pela circunferência DEM – será maior do que o ângulo ADO. Portanto, o raio visual AD não se refletirá para o ponto B no espelho ODEPG, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Tão pouco se refletirá para cá de B, para o lado do ponto A, porque então se refletiria num ângulo ainda maior, o que é falso pela primeira proposição deste [tratado]. Reflita-se entre B e C, e prolongue-se até atingir a grandeza ou objeto avistado BC, seja em H. Da mesma forma, uma vez que os ângulos [mistos] AEL e CEM são iguais, mas CEM é maior do que o ângulo CEP, e o retilíneo AED, constituído por AE e pela circunferência EDL, é maior do que [o ângulo misto] AEL, [então] o ângulo retilíneo AED será muito maior do que o ângulo CEP; por isso, AE não se refletirá para C [no espelho plano ODEPG], pela primeira [proposição] deste [tratado], nem para lá de C, mas para cá, entre as linhas DB e EC. Portanto, reflita-se o raio visual AE para K.

Então, uma vez que AD se reflete no espelho plano para H, e AE para K, apenas se verá HK, a base [...][21], pela primeira suposição da *Perspetiva*. Uma vez que HK é uma parte do todo BC, segue-se que a totalidade de BC não se verá, no espelho plano, no ângulo DAE, ângulo no qual ela se vê no espelho convexo, e que, para se ver a totalidade de BC no espelho plano, ela será vista num ângulo maior do que no ângulo DAE. Uma vez que BC se vê num ângulo maior no espelho plano, e num ângulo menor no convexo (como já se demonstrou), e coisas vistas sob um ângulo maior aparecem maiores, e, sob um ângulo menor, menores (pela quarta e quinta suposições da *Perspetiva*), então o objeto visto BC aparecerá maior no espelho plano do que no convexo. Mas a visão ou imagem da coisa vista (como se provou na décima nona deste) aparece e é igual à coisa vista no espelho plano. Logo, aparece e é menor do que a coisa vista, no convexo.

Além disso, admitindo que se vê a imagem no espelho convexo sob o mesmo ângulo que no plano; uma vez que, no espelho plano, a distância da imagem à circunferência é igual à distância da coisa vista, ao passo que no convexo é menor (como se mostrou na proposição vigésima deste [tratado]); ainda mais pequena será a imagem, avistado o objeto, uma vez que no espelho plano a imagem é igual ao objeto avistado. Com efeito, em geral, quando as linhas que compreendem um ângulo se estendem mais continuamente, a base subtensa por aquele ângulo é [sucessivamente] maior, desde que essas linhas sejam cortadas sempre iguais e as bases sejam paralelas (como se pode mostrar facilmente pela quarta [proposição] do sexto [livro dos *Elementos*] e alternando a proporção). Imaginando, portanto,

21 O texto apresenta uma lacuna difícil de preencher (o manuscrito de Stralsund assinala-a com um pequeno espaço em branco). Provavelmente, o texto identificaria DE como a base do cone visual ADE, que corresponde à imagem de HK («basis .de. ipsius trianguli ADE, seu simulachrum ipsius»).

sexti et permutatam rationem). Imaginando igitur et spectra ipsius .bc. in plano et conuexo speculis quodam modo esse in triangulo vno, cum magis distet spectrum in speculo plano vt ostenditur in decima nona huius et aequum sit rei spectate necessario in conuexo speculo ipsum spectrum erit minus. Quod fuit probandum. In conuexis igitur speculis etc.

Corollarium. *Ob haec fieri arbitror vt raro se mulieres ad planum speculum: ad conuexa vero sepissime componant.*
Huius quidem ab omnibus cum doctis tum ineruditis rationem precipuam et vnicam accepi: quod mulieres omnes formose et dici et videri student. Immo haud aliquam inueneris quantumuis effoeto corpore: quantumuis deformi facie que non si de forma commendetur: sibi admodum plaudat: que non effuse letetur sui commendationem audiens.

Haec illa est (formam dico) prae qua coetera omnia nihili faciunt: in quam omnia sua dirigunt: | atque ordinant: quam[273] pre omnibus maxime suspiciunt: [O88v] colunt obseruant: pro qua acquirenda nihil intentatum relinquant vsque adeo sane hoc hominum genus philaucia ducitur: | Quis enim non videat quantis sumptibus [S95v] mundum muliebrem etiam magno aut parentum aut maritorum dispendio sibi comparant: rate vel hirce scilicet non paruum quid nature pulchritudini accessum ire[274]. Cui non satis perspectum quanto studio: stibio: cerussa: purpurisso: atque id genus mille medicamentis spectantium oculos fallant: Immo non pudet ut Elegiographi verbis vtar.

naturae decus mercato perdere cultu
Seque peregrinis vendere muneribus.

At proh dolor (vt inquit diuus hieronymus) vultum sustollere in coelum: quem conditor ipse non agnoscit. Quis praeterea ignorat quantis machinis: quantisque tormentis etiam a primis incunabulis matres familias teneriusculos filiorum artus torquentes nunc fasciis pectus stringentes: nunc ieiuniis famelicum ventrem macerantes: quo gratiliores appareant. At vt tandem finem faciam hic unicus muliebris foelicitatis scopus est. Nempe vt sint videanturque pulchre et formose: totam vitam reuera degentes praeclarissimi eulogii immemores. Fallax gratia et vana est pulchritudo. Mulier timens deum ipsa laudabitur. Nequaquam igitur iuerim inficias: mulieres ob pulchritudinem quam vsque adeo expetunt: cuiusque possessione mirum

273 **quam...ipsa laudabitur** *S*, om. *O*
274 **rate vel hirce scilicet...accessum ire** *S*, locus difficilis interpretationis nobis uidetur [forsan “ire”=”iri”?].

que as imagens de BC, em espelhos tanto convexos como planos, também estão, de certa maneira, num triângulo, uma vez que a imagem está mais distante no espelho plano, como se mostra na décima nona [proposição] deste [tratado], e é igual ao objeto avistado, necessariamente a mesma imagem será menor no espelho convexo. O que se quis provar. Logo, em espelhos convexos, etc.

Corolário. *Penso que é por isto que sucede que as mulheres se arranjam raramente a um espelho plano e frequentemente a espelhos convexos.*
A principal, e única, razão que encontrei em todos os autores, tanto doutos como leigos, para este facto é que todas as mulheres se esforçam por ser consideradas e por parecerem bonitas. E não encontrarás nenhuma, mesmo de corpo envelhecido ou rosto disforme, que não aprove plenamente um elogio a respeito da sua beleza ou que não se alegre profundamente ao ouvir uma lisonja da sua pessoa.

Esta (refiro-me à beleza) é aquela, por comparação com a qual consideram tudo o resto sem valor, para a qual dirigem e organizam todas as suas ações, que põem, cultivam e observam acima de tudo, não deixando nada por fazer para a obter, a ponto de até o género masculino se deixar levar por este narcisismo. Quem não vê com que enormes gastos adquirem adornos femininos, mesmo com grande despesa de familiares e maridos, pensando[22] elas que até um pedaço de uma pele de bode contribuirá para a sua beleza natural? Para quem não é evidente o enorme zelo com que procuram enganar os olhos de quem as vê por meio de antimónio, carbonato de chumbo, pó de púrpura e mil cosméticos do mesmo tipo? E mais: não as envergonha, para usar as palavras do elegiógrafo, «perder a beleza natural comprando artigos de luxo/e corromper-se com produtos estrangeiros»[23], e depois, infelizmente, voltar o rosto para o céu, sem que o próprio Criador o consiga reconhecer (como diz São Jerónimo)[24]. Além disso, quem ignora com quantos maquinismos, com quantos suplícios, mesmo desde o primeiro berço, as mães forçam as delicadas articulações dos filhos, ora apertando o peito com faixas, ora torturando o ventre esfomeado com jejuns, para que apareçam mais elegantes. E, para pôr um fim a esta arenga, este é o único objetivo da felicidade feminina: a saber, serem e parecerem bonitas e bem-parecidas, mas a verdade é que passam toda a sua vida sem conhecerem o mais notável elogio. A amabilidade é enganadora e a beleza é vã; só a mulher temente a Deus é que será louvada. Portanto, não contesto, de maneira alguma, que é por causa da beleza, que procuram a esse ponto e por cuja posse é admirável a quantidade de tempo que despendem, que as mulheres costumam usar espelhos

22 O texto latino parece-nos difícil de interpretar..
23 Propércio, 1.2.5.
24 *Epístolas*, 54.7.

quam oblectentur: conuexis speculis: non autem planis vti solitas: ne scilicet neuum aliquem aut maculam exactius deprehendant: que certe deprehensa tristitia illas afficiat: nimirum que vix depelli queat.

At non id nunc quaerimus. Sed cur in conuexis speculis facies eadem speciosior apparet quam in planis. Hoc enim non multum a nostro instituto alienum fuerit: et certe scitu non indignum. Nunc igitur latius id explicemus: relaxandi animi gratia. | [S96r] Atque in primis de pulchro disseramus: vt saltem cognoscatur quid pulchri appellatione significetur. Pulchrum sane in omnibus quid sit (iuxta diuini Platonis in Hippia maiore sententiam) definire admodum difficile est. Attamen quantum nunc veluti coniectura suspicari possum. Pulchrum id vocamus: quod in vnoquoque genere perfectum consummatumque est. Pulcherrimum vero in vniuersum quod in optimo genere: omnibus numeris absolutum est. In hac significantia Aristoteles Ethicorum primo: summe pulchrum dixit (ex Hesiodi sententia) ex Astrea quod gignitur: alma. In malis vero pulchrum nec recte dici potest: immo nec in bonis quod a perfecto sui generis deficit. At de hac pulchritudine in presentiarum disserere esset Pigmeo Herculis cothurnos aptare quod aiunt, Est enim nobis duntaxat in humano genere que sit elegans spectata probataque forma determinandum.

Hanc Cicero in Thusculanis Questionibus esse dixit aptam membrorum figuram cum quadam coloris suauitate: que non singulari quodam indiuiduoque colore diiudicanda est: quibusdam enim vt nobis albus aut candidus color vna cum immixto rubro probatur: gratior fortassis plerisque aliis niger: aliis ruber perplacet: et item aliis aliter. Sed commendandus maxime est is color quo plures oblectantur. Hic nimirum iuxta incolarum mores affectumque variandus: immo | et apud eiusdem [O89r] plage habitatores: alter viros: alter mulieres color decet: perinde atque ornatus: Mulieribus enim ornatus comptior et lasciuior: uiris autem breuior minusque cultus conueniens est. Nec certe displicuit sponse illi in Canticis sua forma que veluti iactabunda infit. Nigra sum sed | formosa filia Hierusalem. Hinc igitur satis clarum euadit [S96v] non colore qui facile aduenit aut detrahitur subiecto pulchritudinem forme iudicare

convexos em vez de planos, a saber: para não encontrarem com mais precisão alguma ruga ou sinal, cuja descoberta as encheria de tristeza, ainda mais se se verificasse ser difícil de tirar.

Contudo, agora não procuramos saber isto, mas antes, por que razão o mesmo rosto aparece mais belo em espelhos convexos do que em espelhos planos. Com efeito, isto não se afastaria muito do que determinámos fazer, nem seria indigno de investigação. Portanto, expliquemo-lo agora mais amplamente, para descansar o espírito. E comecemos por discutir o *Belo*, para que pelo menos se saiba o que se quer dizer com o termo *Belo*. É um pouco difícil definir o que é o *Belo* em todas as coisas sem exceção (de acordo com a opinião do divino Platão, no *Hípias Maior*). No entanto, quanto agora consigo supor, chamamos *Belo* àquilo que, em cada género de coisas, é perfeito e consumado, e *Belíssimo*, em geral, àquilo que é o melhor no seu género e completamente concretizado. É neste sentido que Aristóteles, no primeiro dos Éticos, afirma (partindo da opinião de Hesíodo) que o *Belo* supremo é o que nasce da justiça alimentadora[25]. Nas coisas más, não se pode propriamente falar de *Belo*; tão pouco nas boas, pode considerar-se *Belo* aquilo que se afasta da perfeição do seu género. Ora, debruçarmo-nos sobre esta Beleza neste momento seria, como se costuma dizer, prender os coturnos de Hércules a um Pigmeu. Apenas nos compete determinar qual é a figura considerada e reconhecida como elegante no género humano.

Nas *Questões Tusculanas*[26], Cícero definiu-a como a configuração apropriada dos membros juntamente com uma certa graciosidade da aparência, que não deve ser tomada por uma aparência particular ou individual, pois para alguns, como para nós, estima-se que é a aparência branca ou clara, misturada com carmim; porventura para muitos outros, é mais agradável a cor negra; a outros agrada mais o tom ruivo e, do mesmo modo, a outros, outros tons. Contudo, deve recomendar-se sobretudo aquela aparência que mais gente encanta. Esta deve variar sem dúvida de acordo com os hábitos e afeição dos naturais de uma região, e até mesmo entre os habitantes da mesma província: uma aparência é mais conveniente para os homens, e outra, para as mulheres. O mesmo do ornato: para as mulheres é conveniente um ornato mais sedutor e lascivo; para os homens, é conveniente um ornato mais sóbrio e em menor quantidade. Tão pouco desagradou àquela noiva nos *Cânticos* a sua beleza, a ela, que começa por dizer, como que por vaidade: «sou negra, mas formosa filha de Jerusalém»[27]. Portanto, daqui torna-se suficientemente claro que se deve avaliar a beleza da figura, não pela cor, que facilmente sobrevém ou é subtraída a um objeto,

25 *Ética a Nicómaco*, 1.4, 1099a28.
26 4.31.
27 *Cântico dos Cânticos*, 1.5.

et alio quopiam puta apta continuaque membrorum figura: que his tribus precipue numero: ordine: et partium symmetria: hoc est commensuratione quadam constat. Numero quidem: nam si vno tantum oculo nascatur quis: aut pluribus duobus. Etiamsi cumulatissime omnia fuerit adeptus. aut sic quidem in aliis partibus aut membris non pulcher statim etiam a quouis dicetur. Ordine vero. Si enim cuique supercilia sub palpebris locata sint, aut oculi in pectore: aut pollex vbi index atque ita in aliis idem censebitur. Symmetria constat quia si quis oculis sit grandiusculis: aut naso breui autem collo: facie aliisque minutulis partibus constans: consimiliter nec is pulcher dicetur. At certe cui haec tria decenter competunt: pulcher uenit appellandus. Cui vero adamussim omnia et singula data sunt: is pulcherrimus habebitur. Ad cuius speciem quanto quisque magis accedit: tanto formosior et venustior dicetur. Verum ex his tribus vltimum hoc quod diximus congruam partium symmetriam: hoc est membrorum ad inuicem proportioque conueniens tantum nostro instituto conducit. In qua symmetria illa magis optanda est que oculis erit gratior: humanique corporis officiis et perfunctionibus commodior. Qualisnam autem haec sit habenda ratio per membra singulatim referre maioris est operis quam vt hoc loco explicetur: immo prorsus huic nostro negotio inutile: in quo et superfluum multis videbitur tam diffuse haec de pulchritudine tractasse. Colligamus ex his ad pulchritudinem necessariam esse | quandam membrorum ad invicem aequalitatis rationem [S97r] a qua etiam quanto magis | alicuius membra dissonant tanto is minus pulcher [O89v] magisque deformis habetur. Coeterum natura compertum est: vt sicuti contraria iuxta se posita clarius dinoscuntur: ita in aliis que inaequalia sunt: quanto maior est maioris magnitudinis supra minorem excessus: tanto facilius: promptius: atque euidentius inaequalitas perspicitur: inaequalium etiam adinuicem habitudo agnoscitur. His sub compendio habitis ad id vnde digressi sumus revertamur: si modo prius Mathematico more nobis condonetur.

Lemma. *Quod si quatuor magnitudines eandem rationem inaequalitatis habuerint, maior erit excessus, differentiaque inter maiores.*

Sit namque .ab. ad .b. eadem ratio quae .cd. ad .d. Sit autem .ab. maior .cd.

Dico excessum .ab. supra .b. hoc est .a. maiorem esse excessu .cd. super .d. hoc est .c.

mas por outra coisa qualquer, como por exemplo, pela apropriada e continuada figura dos membros, que consta principalmente destas três coisas: número, ordem e simetria entre as partes, ou seja, de uma certa proporção. Consta de número, pois se alguém nascer com um olho apenas, ou com mais do que dois, quer possua todas as coisas [restantes] plenamente, quer seja assim em relação a outras partes e membros, não será considerado belo por quem quer que seja. Consta de ordem, porque se em alguém as sobrancelhas estiverem sob as pálpebras, ou os olhos no peito, ou o polegar onde está o indicador, e assim em relação às demais coisas, será considerado igualmente [feio]. Consta de simetria porque se alguém tiver os olhos ou o nariz grandinhos, mas possuir um pescoço, rosto ou outras partes pequeninas, tão pouco esta pessoa será considerada bonita. Aquele, porém, em quem concorrem estas três coisas de forma conveniente, certamente esse merece ser considerado bonito; e aquele a quem todas estas coisas e cada uma delas foram dadas com exatidão, esse será considerado belíssimo. Quanto mais alguém se aproximar do aspeto deste último, tanto mais será considerado formoso e encantador. Ora, destas três coisas, a última, a que chamámos conveniente simetria das partes, ou seja, a conveniente razão e proporção dos membros entre si, é a única relevante para o nosso tratado. E nesta simetria, mais deve ser apreciada a que for mais agradável aos olhos e mais vantajosa para os ofícios e funções do corpo humano. Indicar a razão que deve existir em cada membro individualmente é demasiado complexo para se explicar neste lugar e, além disso, afigura-se completamente inútil para o assunto que temos em mãos, no qual parecerá, a muitos, supérfluo ver exposto tanta coisa difusamente acerca da beleza. Por agora, concluamos de tudo isto que, para a beleza, é necessário uma determinada razão de igualdade dos membros entre si, da qual quanto mais os membros de alguém se afastarem, tanto mais ele será considerado menos bonito e mais feio. Quanto ao mais, verifica-se na natureza que, tal como os contrários se conhecem mais claramente colocados lado a lado, assim também sucede em relação às coisas que são desiguais: quanto maior é o excesso da grandeza maior sobre a menor, tanto mais facilmente, claramente e evidentemente se verifica a desigualdade e se reconhece a existência de coisas desiguais entre si. Feito este resumo, voltemos ao ponto em que começámos a digressão se nos for permitido o anterior registo matemático.

Lema. *Se quatro grandezas tiverem a mesma razão de desigualdade, o excesso, ou diferença, entre as maiores será maior.*

[Fig. 190] | Seja $(A+B):B=(C+D):D$. E seja $A+B>C+D$.

Afirmo que o excesso de A+B sobre B, ou seja, A, é maior do que o excesso de C+D sobre D, ou seja, C.

Quoniam enim .ab. ad .b. est eadem ratio, que .cd. ad .d. igitur cum .ab. sit maior .cd. erit .b. maior .d. per decimam quartam, quinti. Rursus quoniam eadem est ratio .ab. ad .b. que .cd. ad .d. Disiunctim igitur per decimam septimam quinti erit eadem ratio .a. ad .b. que .c. ad .d. Vicissim igitur per decimam sextam eiusdem eadem erit .a. ad .c. que .b. ad .d. Igitur per duodecimam eiusdem .ab. ad .cd. eadem que .a. ad .c. sed .ab. maior est .cd. igitur .a. est maior .c. quod fuit probandum. Quinetiam probatum est eandem rationem esse inter maiores vtriusque rationis magnitudines que inter excessus et differentias.

Hinc primo manifestum est, quam ob rem pueri speciosi|ores apparent in [S97v] primis annis quam in aetate prouecta. Cum enim omnia membra saltem adinuicem partes dissimiliores, vt manus, caput, pes, et huiusmodi secundum eandem rationem crescant, eademque ratio semper obseruetur in recens natis, et prouectioribus inter partes membrorum tametsi non inter membra adinuicem, consequens est ex predictis vt promptius inaequalitas, differentiaque a ratione et debita membrorum symmetria deprehendatur. Secundo patet quum in speculis planis spectrum appareat | quantum est ipsum visibile, In conuexis vero minus re visa, non [O90r] ita facile deprehendi posse, dissonantem a debita symmetria membrorum rationem, a conuexis sicut a planis. Atque ob id mulieres illas saltem que non exacte debitam membrorum rationem sunt assequute, conuexis speculis creberrime vti, planis vero minime. Hoc autem primum a nobis explicandum fuerat.

Lemma propositionis. *Si extra circulum suscipiatur aliquod signum, ab eo autem per centrum quidem recta linea agatur, ab eodem vero et complures alie praeter centrum, si aequales ille fuerint, que praeter centrum acte sint, aequales circunferentias auferent, cum ea que per centrum acta est. atque aequales angulos in conuexam superficiem efficient, sin vero inaequales, maior quidem maiorem circunferentiam quam minor comprehendet, contra vero, minor vero maiorem angulum cum circunferentia constituet quam maior.* Sit enim circulus quicunque cuius centrum .b. signum autem extra circulum sit .a. a quo ducatur recta linea .ab. secans circulum. cadant et alie due .ac. .ad.[275] ab vtraque par|te lineae .ab. [S98r]

275 **.ac. .ad.**, .ac. .ac. *SO*

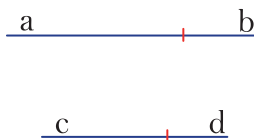


Fig. 190

Uma vez que (A+B):B=(C+D):D; então, como A+B>C+D, será B>D, pela décima quarta [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*]. Novamente, uma vez que (A+B):B=(C+D):D; então, *separando*, pela décima sétima do quinto, A:B=C:D. Então, *alternando*, pela décima sexta do mesmo, A:C=B:D. Assim, pela décima segunda do mesmo, (A+B):(C+D)=A:C. Mas A+B>C+D; logo, A>C. O que se quis provar. Além disso, provou-se que a razão entre as grandezas maiores das duas razões é igual à razão entre os excessos, ou diferenças.

Daqui é evidente, em primeiro lugar, a razão por que os rapazes parecem mais belos nos primeiros anos do que em idade avançada. Com efeito, uma vez que todos os membros – pelo menos as partes diferentes entre si, como as mãos, a cabeça, os pés, e coisas do mesmo género – crescem na mesma razão, e se observa, tanto nos recém-nascidos como nos mais velhos, uma razão igual entre as partes de cada membro, mas não entre os membros entre si, segue-se, do que foi dito, que mais rapidamente se percebe o desvio e variação em relação à razão e à simetria apropriada entre os membros. Em segundo lugar, uma vez que a imagem aparece, em espelhos planos, do mesmo tamanho que o objeto avistado, mas, em convexos, aparece menor do que o objeto avistado, não se consegue perceber tão facilmente em espelhos convexos que a razão se afasta da simetria entre os membros que devia existir, como se consegue fazer em espelhos planos. E por isso, as senhoras, pelo menos as que não chegam a obter exatamente a ideal proporção dos membros, fazem uso abundante de espelhos convexos, mas utilizam muito pouco os espelhos planos. Mas isto era o que queríamos explicar em primeiro lugar.

Lema da proposição. *Tomando-se um ponto qualquer fora de um círculo, e traçando--se a partir dele uma linha reta pelo centro, e outras [retas] sem ser pelo centro, se as que foram traçadas sem ser pelo centro forem iguais, estas, em conjunto com a que foi traçada pelo centro, cortarão arcos de circunferências iguais e farão ângulos iguais na superfície convexa. Se forem desiguais, a [reta] maior compreenderá um arco de circunferência maior do que a [reta] menor, mas a [reta] menor formará com a circunferência um ângulo maior do que a [reta] maior.*

[Fig. 191] | Seja um círculo qualquer com centro B. Seja A um ponto fora do círculo. A partir deste, trace-se a linha reta AB secante ao círculo. Caiam outras duas [linhas] AC e AD de cada lado da linha AB.

Dico quod si .ac. .ad. aequales sint, quod .cf. circunferentia aequalis erit circunferentiae .fd. Item et angulum .acf. aequum esse angulo .fda.

Connectantur .bc. .bd. tunc quoniam aequales sunt ex hypothesi .ac. .ad. Item et per diffinitionem circuli .bd. .bc., .ba. autem communis, ergo per octauam primi .cba. angulus aequalis est angulo .abd. Item .acb. angulus aequalis est angulo .adb. per trigesimam tertiam vero sexti anguli in eisdem circulis eandem habent rationem ipsis circunferentiis, ergo et circunferentia .cf. aequalis est circunferentiae .fd.

Quod erat primum probandum.

Item quoniam probati sunt anguli .acb. .adb. aequales, et .bdf. .bcf. anguli etiam sunt aequales, quia anguli semicirculi vt patet protrahendo .bd.[276] in partem oppositam. Consimiliter et .cb. Demptis ergo illis aequalibus[277] ab angulis .acb. .adb. qui relinquuntur erunt aequales per tertiam communem sententiam. | Relicti autem [O90v] sunt .acf. .adf. ergo illi sunt aequales, quod erat secundum probandum.

Dico secundo quod si .ac. maior sit quam .ad. quod circunferentia .cf. maior erit circunferentia .fd.[278] Item quod angulus .acf. minor erit angulo .adf.

Ponatur enim ipsi .ad. aequalis .ae.[279] (fiet autem hoc vt demonstratur in vltima particula octaue tertii) et connectantur .eb. eritque .ae. Per

276 **.bd.**, .cd. *SO*
277 **aequalibus**, aequalibus demptis *SO*
278 **.fd.**, .fb. *SO*
279 **.ae.**, .ac. *SO*

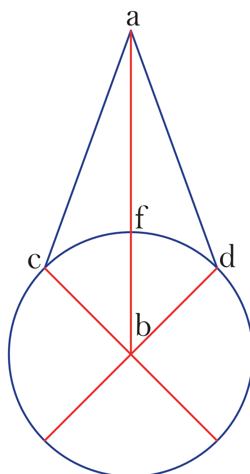


Fig. 191

Afirmo que, se AC e AD forem iguais, o arco de circunferência CF será igual ao arco de circunferência FD, e que, do mesmo modo, o ângulo [misto] ACF é igual ao ângulo [misto] FDA.

Ligue-se B a C e B a D. Uma vez que AC e AD são iguais, por hipótese, e BD e BC também [são iguais], pela definição de círculo, e BA é comum, então, pela oitava [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], o ângulo CBA é igual ao ângulo ABD. Da mesma maneira, o ângulo ACB é igual ao ângulo ADB. Mas, pela trigésima terceira do sexto, os ângulos nos mesmos arcos de círculo têm a razão igual à dos arcos de círculo; logo, o arco de circunferência CF também é igual ao arco de circunferência FD.

O que se queria provar primeiro.

Da mesma forma, tendo-se provado que os ângulos ACB e ADB são iguais, e uma vez que os ângulos [mistos] BDF e BCF também são iguais (porque são ângulos de semicírculo, como fica claro se se prolongar BD, assim como CB, para o lado contrário); então, tirados esses ângulos iguais aos ângulos ACB e ADB, os que restam serão iguais, pela terceira noção comum [do primeiro livro dos *Elementos*]. Mas os que sobram são ACF, ADF; logo, estes serão iguais. O que se queria provar em segundo lugar.

Afirmo em segundo lugar, que, se AC for maior do que AD, o arco de circunferência CF será maior do que o arco de circunferência FD, e que, da mesma forma, o ângulo [misto] ACF será menor do que o ângulo [misto] ADF.

[Fig. 192] | Ponha-se AE igual a AD (isto far-se-á como se demonstra na última parte da oitava [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]). Ligue-se E a B. Pela mesma

eandem octauam tertii minor .ac. [et maior .fa.] quare et ipsi propinquior, proximius itaque .e. signum ipsi .f. signo, quam sit .c. Sed vt supra ostensum est .ef. est aequalis ipsi .fd. et .ef. est minor .cf. quia pars minor toto, ergo et .fd. minor est quam .cf. quod erat secundum probandum.

Praeterea quoniam triangulum est .abc., a cuius latere .ab. constituuntur due lineae introrsum .ae. .eb. ergo il|le per vicesimam primam primi minores sunt, maiore-mque angulum continent, maior itaque est angulus .aeb. angulo .acb. Est autem .aeb. angulus aequalis angulo .adb. ergo et .adb. angulus maior est angulo .acb. Sunt autem .bcf. .bdf. anguli aequales, quia eiusdem semicirculi, ergo demptis illis ab inaequalibus angulis, id quod erat maius, adhuc manet maius, et id quod erat minus, manet minus per quintam communem sententiam. Angulus igitur .adf. maior est angulo .acf. quod erat probandum. Si extra circulum igitur etc. [S98v]

Lemmatis premissi conuersum. *Quod si extra circulum signum aliquod suscipiatur, a quo plures rectae lineae in circuli conuexam circunferentiam producantur, vnica vero per centrum, que aequales circunferentias cum ea que per centrum acta est intercipiunt, aut angulos aequales efficiunt, rectae lineae aequales adinuicem erunt. Sin minus que maiorem circunferentiam cum eadem amplectitur, aut minorem angulum efficit, maior est.*

oitava do terceiro, AE será menor do que AC e maior do que AF. Por esta razão também [estará] mais perto dela [ou seja, de AF], e, assim, o ponto E estará mais próximo do ponto F do que C. Como foi mostrado acima, EF é igual a FD. Mas EF é menor do que CF, porque a parte é menor do que o todo. Logo, também FD [é] menor do que CF. O que se queria provar em segundo lugar.

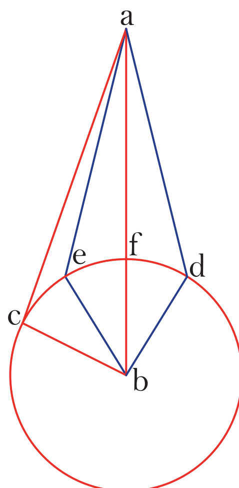


Fig. 192

Além disso, uma vez que ABC é um triângulo, a partir de cujo lado AB e em cujo interior se traçaram as duas linhas AE e EB, então, pela vigésima primeira [proposição] do primeiro [livro], estas são menores e contêm um ângulo maior [do que as linhas AC e CB]; logo, o ângulo AEB é maior do que o ângulo ACB. Mas o ângulo AEB é igual ao ângulo ADB; logo, o ângulo ADB também é maior do que o ângulo ACB. Mas os ângulos [mistos] BCF e BDF são iguais, porque [são ângulos] do mesmo semicírculo. Então, tirados esses ângulos aos ângulos desiguais, o que era maior permanece maior e o que era menor permanece menor, pela quinta noção comum [do primeiro livro dos *Elementos*]. Portanto, o ângulo ADF é maior do que o ângulo ACF. O que se queria provar. Logo, se, fora do círculo, etc.

Converso do lema anterior. *Tomando-se um ponto qualquer fora de um círculo, e traçando-se a partir dele várias linhas retas para a circunferência convexa do círculo, mas uma apenas pelo centro, as que, em conjunto com a que foi traçada pelo centro, cortam arcos de circunferência iguais ou fazem ângulos iguais serão linhas retas iguais, e aquela que, em conjunto com esta [reta traçada pelo centro], compreende um arco de circunferência maior ou faz um ângulo menor, é maior.*

Hoc praemissi Lemmatis conuersum est, quod hoc in loco demonstrandum non abs re suscepimus.

A signo igitur .a. extra circulum complures rectae lineae in conuexam circuli circunferentiam, cuius centrum .d. procidant .aed. | quidem per centrum .ag. .ab. et .ac. [O91r] praeter centrum.

Sit autem in primis circunferentia .be.[280] aequalis circunferentiae .ec. demonstratum est propositione octaua tertii elementorum .ab. et .ac. aequales esse quod si .g. cadat inter .be. signa, est in eadem propositione demonstratum .ag. minorem esse ipsa .ab. propinquiorem scilicet remotiore[281].

Iam dein dico si .abe. angulus aequalis fuerit | angulo .ace. .ab. et .ac. aequales [S99r] esse. Est enim per diffinitiones tertii elementorum angulus .dbe.[282] aequalis angulo .dce. Vterque enim semicirculorum aequalium, adiectis ergo .abe. et .ace. equalibus. Supponimus enim .dc.[283] et .bd. connecti erit per primam communem sententiam .abd. angulus aequalis angulo .acd. Sunt autem anguli .bda. et .ade.[284] aequales, alioqui .be. et .ec. circunferentiae per vltimam 6[285] inaequales essent. atque ob id per priorem partem huius .abe. et .ace. inaequales essent, quod non supponitur. Sunt ergo aequales anguli qui ad .d. et qui ad .b. et .c., .ad. vero communis ergo per vicesimam sextam primi elementorum .ba. ipsi .ac. aequalis erit.

Iam demum dico si fuerit .age. maior angulus quam .abe. rectam lineam .ag. minorem esse recta linea .ab. Sin minus, si fuerit .ab.

280 **.be.**, .de. *SO*
281 **remotiore**, remotiorem *SO*
282 **.dbe.**, .dbe. *SO*
283 **.dc.**, .bc. *SO*
284 **.ade.**, .adc. *SO*
285 **6**, .b. *SO*

Este é o converso do lema apresentado, que pensamos não ser desapropriado demonstrar neste local.

[Fig. 193] | Do ponto A fora do círculo, estendam-se várias linhas retas para a circunferência convexa do círculo com centro D: AED, pelo centro, AG, AB e AC, sem ser pelo centro.

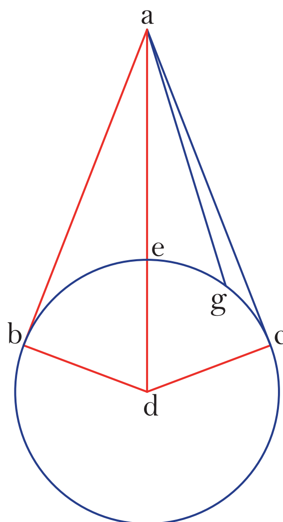


Fig. 193

Em primeiro lugar, seja o arco de circunferência BE igual ao arco de circunferência EC. Demonstrou-se, na proposição oitava do terceiro [livro] dos *Elementos*, que AB e AC são iguais. No caso de G cair entre os pontos B e E, demonstrou-se, na mesma proposição, que AG é menor do que AB, ou seja, a [reta] mais próxima [da reta traçada pelo centro é menor] do que a mais afastada.

Afirmo, de seguida, que, se o ângulo [misto] ABE for igual ao ângulo [misto] ACE, [então,] AB e AC são iguais. Com efeito, pelas definições do terceiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo [misto] DBE é igual ao ângulo [misto] DCE, pois ambos são [ângulos] de semicírculos iguais. Logo, acrescentados os ângulos [mistos] iguais ABE e ACE (pois supomos DC e BD ligados), o ângulo ABD será igual ao ângulo ACD, pela primeira noção comum. Mas os ângulos BDA e ADC são iguais, caso contrário os arcos de circunferência BE e EC seriam desiguais, pela última do sexto; por isso, pela primeira parte deste [lema], ABE e ACE seriam desiguais, o que é contra a hipótese. Logo, os ângulos em D e em B e em C são iguais. Mas AD é comum; logo, pela vigésima sexta do primeiro dos *Elementos*, BA será igual a AC.

Finalmente, afirmo que, se o ângulo [misto] AGE for maior do que [o ângulo misto] ABE, a linha reta AG é menor do que a linha reta AB. Caso contrário, se AB

ipsi .ag. aequalis aut .ag. ipsa[286] .ab. maior, erit per praemissum Lemma angulus .abe. aequalis angulo .age. aut eo maior contra hypotesim. non potest ergo .ag. aequalis esse ipsi .ab. aut ea maior, minor igitur, quod fuit probandum.

Eadem erit praemissi Lemmatis atque huius ostensio. Si recte lineae predictae in aequalium circulorum cauas[287] circunferentias inciderint. Conuexam autem circunferentiam appello extrinsecum circuli, aut orbis ambitum, cauam vero que introrsum ad centrum spectat.

Lemma secundum. *Sumptis duobus extra circulum signis, a quibus in conuexam eius circunferentiam complures rectae lineae procidant, binae autem per centrum agantur, que per centrum actae sunt, aequales angulos efficiunt, relique vero praeter centrum actae in minore an|gulo inclinantur.* [S99v]

Esto nanque primo circulus cuius centrum .a. sumptaque .bc. extrorsum | signa a [O91v] quibus .bea. et .cda. producantur per centrum .cn. vero praeter centrum.

Dico in primis angulos .bed. et .cde. aequales esse.

Nam per corollarium propositionis decimae sexte tertii elementorum bis repetitum .feg. et .hdk. contingentes producuntur, erunt .cdk. .cdh. .beg. et .bef. recti per eandem. Additis ergo .kdn. et .hde. aequalibus per primum corollarium primae propositionis huius, erunt anguli .cdn. et .cde. alterni aequales. Eadem ratione et anguli qui ad .e. constituuntur recta linea .bea. Iam dein quoniam angulus .adh. rectus aequalis est angulo .gea. recto. Demptis .dea. .eda. aequalibus aequalium semicirculorum angulis, relinquentur

---

286 **ipsa**, ipsi *SO*
287 **cauas,** conuexas *SO*

for igual a AG ou AG maior do que AB, [então,] pelo lema apresentado, o ângulo ABE será igual ao ângulo AGE ou maior do que ele, contra a hipótese. Logo, AG não pode ser igual a AB nem maior do que ela; então será menor. O que se quis provar.

A prova do lema anterior e a deste será igual no caso de as referidas linhas retas caírem nas circunferências côncavas de círculos iguais. Chamo circunferência convexa ao contorno externo do círculo ou orbe, [e chamo] côncava à que, no interior, está virada para o centro.

Lema segundo. *Tomando-se dois pontos fora de um círculo, se deles se entenderem várias linhas retas para a sua circunferência convexa, e se duas delas passarem pelo centro, as que foram traçadas pelo centro fazem ângulos iguais, e as restantes, traçadas sem ser pelo centro, inclinam-se num ângulo menor.*

[Fig. 194] | Em primeiro lugar, seja um círculo com centro A. Sejam B e C os pontos tomados no exterior. A partir destes, tracem-se [as retas] BEA e CDA pelo centro, e CN sem ser pelo centro.

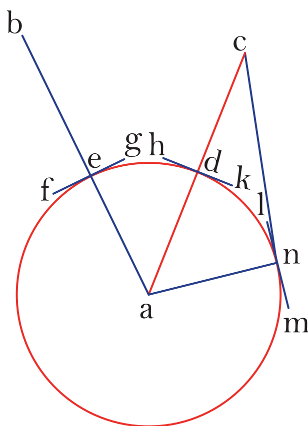


Fig. 194

Afirmo, em primeiro lugar, que os ângulos [mistos] BED e CDE são iguais.

Pelo corolário da proposição décima sexta [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*, duas vezes aplicada, traçam-se as tangentes FEG e HDK. [Os ângulos] CDK, CDH, BEG e BEF serão retos, pela mesma [proposição]. Então, acrescentados os [ângulos mistos] iguais KDN e HDE, os ângulos [mistos] CDN e CDE serão iguais, pelo primeiro corolário da primeira proposição deste [tratado]. Pela mesma razão, os ângulos que, em E, são constituídos pela linha reta BEA, também [são iguais]. De seguida, uma vez que o ângulo reto ADH é igual ao ângulo reto GEA; subtraídos os ângulos [mistos] iguais DEA e EDA, de semicírculos iguais, sobrarão

aequales .ged. .hde. quibus adiectis .beg. et .cdh. aequalibus (recti scilicet) erunt .cde. et .bed. anguli aequales, quod primo fuit probandum.

Rursus dico angulum .cnd. minorem esse angulo .cdn. producta enim .lnm. contingente per corollarium decime sextae tertii elementorum erit angulus .lna. rectus, quoniam autem .cna. angulus minor est duobus rectis. Duo vero anguli .cdk. et .kda. duobus rectis aequales, maiores ergo angulo .cna. demptis igitur, .nda. et .dna. aequalibus aequalium semicirculorum angulis, erit angulus .cdn. relictus maior angulo .cnd. Quod fuerat secundo probandum. Eadem erit vt prius in circulis aequalibus demonstratio.

Theorema vicesimum secundum. *In conuexis speculis a minoribus speculis minora simulacra spectantur.*

| Esto quidem speculum conuexum cuius centrum .c. circunferentia .ead. maius speculo .gaf. conuexo, cuius centrum sit .b. contingant autem sese in signo .a. atque ab oculo .h. procidant visus in .ka.[288] reflexi in .vx. [S100r]

Dico spectrum .vx. maius videri a speculo .ead. quam a speculo .gaf.

Et vt comptior breuiorque sit demonstratio. Suscipio speculorum loco planum id in quo visus reflectuntur, et | circulos qui ex sectione eius cum vtroque, vt in praemissis crebro repetitum est. [O92r] Ab oculo igitur .h. in speculum .gaf. procidat visus .ha. refractus in .x. connectantur enim .cb. centra circulorum sese contingentium recta linea .cb. que cum per centra contigentium circulorum transeat, per .a. quoque signum in quo sese contingunt transibit per vndecimam tertii igitur vtcunque extra producatur in .m. signum vt libet[289] et quoniam circulus .ead. maior est circulo .gaf. maior igitur erit .ca. ipsa .ba. ergo .b.[290] signum intercipitur inter .c. et .a. et per corollarium decimae huius angulus .xah. bifariam secabitur recta linea .mab. per centrum speculi et signum reflexionis transeunte, eritque ob id angulus .xam. aequalis angulo .mah. Et quoniam angulus .cad aequalis est angulo[291] .cae. quoniam vterque semicirculorum aequalium reliquus[292] .mad. reliquo .mae. erit aequalis. Demptis[293] igitur .mah. et .max. aequalibus per tertiam communem animi sententiam relinquentur .had. .xae. aequales, visus ergo .ha. incidens in speculum .ead. per primam huius reflectitur in .ax. quod fuit primo probandum.

288 **.ka,** .ca. *SO*
289 **libet,** bibet *SO*
290 **.b.,** .c. *SO*
291 **Et quoniam angulus .cad aequalis est angulo,** rep. *SO*
292 **reliquus,** reliquis *SO*
293 **Demptis,** Dempto *SO*

os [ângulos mistos] iguais GED e HDE. Acrescentados estes aos [ângulos] BEG e CDH, que são iguais por serem retos, os ângulos CDE e BED serão iguais. O que se quis provar em primeiro lugar.

Novamente, afirmo que o ângulo [misto] CND é menor do que o ângulo [misto] CDN. Com efeito, prolongada a tangente LNM, o ângulo LNA será reto, pelo corolário da décima sexta [proposição] do terceiro [livro] dos *Elementos*. Mas, uma vez que o ângulo CNA é menor do que dois retos, e os dois ângulos CDK e KDA [somados] são iguais a dois retos; então, [estes, somados,] são maiores do que o ângulo CNA. Então, subtraídos os ângulos [mistos] iguais NDA e DNA, de semicírculos iguais, o ângulo [misto] restante CDN será maior do que o ângulo [misto] CND. O que se queria provar em segundo lugar. Em círculos iguais, a demonstração será igual à de cima[28].

Teorema vigésimo segundo. *Em espelhos convexos, vêem-se imagens menores em espelhos menores.*

[Fig. 195] | Seja um espelho convexo, com centro C e circunferência EAD, maior do que o espelho convexo GAF, com centro em B. Sejam tangentes no ponto A. A partir do olho H, estendam-se os raios visuais para K e A, refletidos para V e X[29].

Afirmo que a imagem de VX se vê maior no espelho EAD, do que no espelho GAF.

Para que a demonstração seja mais elegante e mais breve, tomo, em lugar dos espelhos, o plano em que os raios se refletem, e os círculos [formados] pela secção com cada espelho, como se fez repetidas vezes nas [proposições] anteriores. A partir do olho H, estenda-se o raio visual HA, para o espelho GAF, refletido para X. Liguem-se os centros C e B dos círculos tangentes por meio da linha reta CB, a qual, uma vez que passa pelos centros dos círculos tangentes, também passará pelo ponto A, em que são tangentes, pela undécima [proposição] do terceiro [livro dos *Elementos*]. Então, prolongue-se para fora até onde se quiser para um qualquer ponto M. Uma vez que o círculo EAD é maior do que o círculo GAF, então CA será maior do que BA. Portanto, o ponto B é tomado entre C e A, e, pelo corolário da décima [proposição] deste [tratado], o ângulo XAH será bissetado pela linha reta MAB, que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de reflexão. Por isso, o ângulo XAM [será] igual ao ângulo MAH. Uma vez que o ângulo [misto] CAD é igual ao ângulo [misto] CAE, pois são ângulos de semicírculos iguais, o restante [ângulo misto] MAD será igual ao restante [ângulo misto] MAE. Então, tirados os iguais MAH e MAX, pela terceira noção comum do intelecto, sobrarão HAD e XAE iguais. Logo, o raio visual HA, incidente no espelho EAD, reflete-se para AX, pela primeira deste. O que se quis provar em primeiro lugar.

---

28 Provavelmente, Melo deseja, com esta fraseologia, estender a prova a espelhos côncavos, como fez na proposição anterior.

29 O texto refere sempre um ponto «u» que na figura aparece como «v», provavelmente, para distinguir claramente da letra «n». Optámos por grafar «v» tanto na figura como no texto da prova.

Rursus .hk. visus secabit circulum .ead. esto in .l. dico secundo .hl. visum non reflecti | in .u. [S100v]

Nam dato opposito producantur due recte lineae .bk. in .t. et .cl. in .n. secabit per corollarium primae huius .bkt.[294] angulum .vkh.[295] bifariam non cadit igitur .bk. in .kl. aut propius signo .a. in aliquo signo inter .l. et .a. intercepto .l. igitur signum ex altera parte est lineae .tb. .c. autem ex opposita parte eiusdem lineae, recta igitur linea .nlc. secat ipsam .tb. sit in .s. signo

Quod et probari aliter potest. Si notato signo in quo secat .bt. circulum .ead. illud cum .c. signo connectatur, fiat ex illa cum .tb. et ipsa .cb. triangulum cuius angulus necessario | diuidetur recta linea .cln. vt probari facile poterit. [O92v]

294 **.bkt.,** .bkl. *SO*
295 **.vkh.,** .ukh. *SO*

Fig. 195

Novamente, o raio visual HK cortará o círculo EAD, seja em L. Afirmo, em segundo lugar, que o raio visual HL não se reflete para V.

Pois, verificando-se o contrário, prolonguem-se as duas linhas retas BK, para T, e CL, para N. Pelo corolário da primeira [proposição] deste [tratado], BKT bissetará o ângulo VKH. Portanto, BK não cairá em KL, nem mais próximo do ponto A, em algum ponto tomado entre L e A. Então, o ponto L está num lado da linha TB e [o ponto] C está do outro lado da mesma linha. Portanto, a linha reta NLC corta [a linha] TB, seja no ponto S.

Isto também pode ser demonstrado de outra maneira. Se se marcar o ponto em que BT corta o círculo EAD, e se se ligar este ao ponto C, surge, a partir dessa, em conjunto com [as linhas] TB[30] e CB, um triângulo, cujo ângulo [KCB] será forçosamente dividido pela linha reta CLN, como se poderá provar facilmente.

---

30 Em rigor, não com TB, mas com a linha que vai de B ao ponto de interseção entre TB e EAD.

Producantur ergo contingentes .olp. et .qkr. haec quidem contingens[296] circulum .gaf. in .k. illa vero circulum .ead. in signo .l. Tunc quoniam in triangulo .kls. latus .sk. producitur, ergo per decimam sextam primi elementorum erit angulus .tkh. maior angulo .kls. Sed .kls. per decimam quintam primi aequalis est angulo .hln. igitur erit angulus .tkh. maior angulo .hln. rectus autem .nlo. aequalis est recto .tkr. ergo reliquus .hlo. maior reliquo .lkr. Est autem .lkr. per primam huius aequalis .ukq. igitur .hlo. maior est .ukq. Rursus in .ulk. latus .kl. protenditur in .h. ergo per decimam sextam primi angulus .hlu. maior est angulo .hkv. dempto ergo a maiore .hln. et a minore .hkt. qui probatus est maior ipso .hln. relinquetur per tertiam communem animi sententiam .nlu. maior ipso .tkv. Est autem aequalis .tkq. rectus recto .nlp. igitur demptis ab illis aequalibus .nlv. maiore, et .tkv. minore, relinquetur .vlp. minor ipso .vkq. Sed .vkq. minor probatus est ipso .hlo. ergo a maiore .vlp. minor[297] erit eodem .hlo. Sunt | autem aequales .ola. et .ple. per corollarium prime huius. Totus [S101r] ergo .vle. minor est ipso .hla. ergo .hl. non reflectitur per primam huius in .v. Sed vt patuit ex modo demonstrandi praemissarum in aliquod signum citra .v. quod secundo assumpsimus demonstrandum.

Iam tertio dico quod nec videbuntur in signo aliquo visu in speculo .dae. procidente inter .al. signa, vt a visu .hy. ita vt .hy reflectatur in .u., .y. vero suscipiatur inter .a. et .l. signa data.

Manifestum est in primis .ha. non concurrere cum centro .c. tandem producta, alioqui per primam huius in sese reflecteretur. Connectantur[298] igitur .hc. recta linea, que secet .ead. in signo .z. clarum item est quod .ul. per centrum .c. non producitur, alioqui angulus .ule. aequalis esset angulo .hza. per Lemma secundum propositionis huius. At per idem angulus .hza. | maior est angulo .hla. esset igitur .vle. [O93r] maior angulo .hla. Sed ex secunda demonstrationis parte minor, quod est impossibile. Connexis[299] igitur .vc. [recta linea] quae secet .ead. circulum in .e. signum .l. cadat inter <.e.> et .a. tunc quoniam a signo extra circulum .ead. producitur per eius centrum .c. recta linea .vec. praeter centrum vero .vl. et .vy.[300] igitur per primum Lemma propositionis huius angulus .vle. maior est angulo .vyl.[301] eodem .hla. minor est. Minor autem est per idem Lemma, vt prius angulus .hla. angulo .hya. igitur .hy. non reflectitur in .v. per primam huius sed vt in superiori demonstratione in signum aliquod inter .u. et .x. interceptum.

---

296 **contingens,** contingentes *SO*
297 **minor,** maior *SO*
298 **Connectantur,** Connectam *SO*
299 **Connexis,** Conuexis *SO*
300 **.vy.,** .vx. *SO*
301 **.vyl.,** .vlx. *SO*

Tracem-se as tangentes PLO e QKR; esta, tangente ao círculo GAF em K, e aquela, tangente ao círculo EAD no ponto L. Uma vez que, no triângulo KLS, se prolonga o lado SK; então, pela décima sexta [proposição] do primeiro [livro] dos *Elementos*, o ângulo TKH será maior do que o ângulo KLS. Mas KLS, pela décima quinta do primeiro, é igual ao ângulo HLN. Então, o ângulo TKH será maior do que o ângulo HLN. Mas o reto NLO é igual ao reto TKR. Logo, o restante HLO é maior do que o restante LKR. Mas LKR, pela primeira deste, é igual a VKQ. Então, HLO é maior do que VKQ. Novamente, no [triângulo] VLK, o lado KL estende-se para H; logo, pela décima sexta do primeiro, o ângulo HLV é maior do que o ângulo HKV. Logo, tirado HLN do maior e HKT (que se provou maior do que HLN) do menor, restará, pela terceira noção comum do intelecto, NLV maior do que TKV. Mas o reto TKQ é igual ao reto NLP. Então, tirados, destes iguais, o maior NLV e o menor TKV, sobrará VLP menor do que VKQ. Mas VKQ provou-se menor do que HLO. Logo, VLP será menor do que HLO, *a maiore*. Mas OLA e PLE são [ângulos mistos] iguais, pelo corolário da primeira [proposição] deste [tratado]. Logo, todo VLE é menor do que HLA; portanto, HL não se reflete para V, pela primeira [proposição] deste [tratado], mas, como ficou patente do modo de demonstração das anteriores, para algum ponto para cá de V. O que quisemos que fosse demonstrado em segundo lugar.

[Fig. 196] Em terceiro lugar, afirmo que também não se verão por meio de um raio visual incidente no espelho DAE num ponto entre os pontos A e L, como pelo raio HY, tal que HY se reflete para V, e Y é tomado entre os pontos dados A e L.

Em primeiro lugar, é evidente que HA, ainda que prolongada, não é concorrente com o centro C, caso contrário refletir-se-ia sobre si mesma, pela primeira [proposição] deste [tratado]. Então, ligue-se HC por meio de uma linha reta que corte EAD no ponto Z. Da mesma forma, é claro que VL não se estende pelo centro C, caso contrário o ângulo [misto] VLE seria igual ao ângulo [misto] HZA, pelo segundo lema desta proposição. Mas, pelo mesmo [lema], o ângulo [misto] HZA é maior do que o ângulo [misto] HLA. Então, VLE seria maior do que o ângulo HLA. Mas, pela segunda parte da demonstração é menor, o que é impossível. Então, liguem-se V e C [por meio de uma linha reta] que corte o círculo EAD no ponto E. [E que o ponto] L caia entre [E] e A. Uma vez que, de um ponto no exterior do círculo EAD se traça a linha reta VEC pelo seu centro, e [as linhas retas] VL e VY sem ser pelo centro; então, pelo primeiro lema desta proposição, o ângulo [misto] VLE é maior do que o ângulo [misto] VYL, [que é, por sua vez,] menor do que [o ângulo misto] HLA. Mas, pelo mesmo lema (tal como anteriormente), o ângulo [misto] HLA é menor do que o ângulo [misto] HYA. Então, HY não se reflete para V, pela primeira [proposição] deste [tratado], mas, como na demonstração acima, para um ponto qualquer tomado entre V e X.

Relinquitur igitur demum .u. signum non videri nisi aliquo visu in .ead. circulum procidente vltra .l. et ne nobis sit opus grae|co alphabeto, repetam ex praedictis [S101v] aliquot elementa. Sit ergo .hn. visus reflexus in .v. signoque .n. inter .l. et .e. signa, angulus igitur .nha. quo videtur .xv. in speculo .ead. maior est angulo .kha. angulo quo videtur idem .xv. ab speculo .gaf. producantur igitur a signo .x. due recte lineae .xb. et .xc. ab .v. vero binae rectae lineae .vb. et .vc. manifestum est per decimam septimam huius quod .x. signum in speculo .ead. videtur in concursu rectae lineae .xc. cum ipsa .ha. occurrant. ergo in signo .r. Ob id etiam videbitur .v. in eodem speculo in signo vbi occurrent .vc. et .hn.[302] quod sit .q. in speculo vero .gaf. videbitur per eandem decimam septimam bis repetitam .x. in signo vbi occurrent .ha. et .xb. quod sit .o. ob id .v. videbitur in eodem speculo in occursu rectarum linearum .hk. et .vb. estoque id signum .p. in speculo vero .ead. spectrum ipsius .vx. erit .qr. in speculo vero .gaf. ipsum .po. et cum recta linea .xb. sit propinquior .h. signo quam .xc. ex hypotesi prius occurret .ha. ipsi .xb. quam .xc. signum igitur .r. magis distat ab .h. oculo quam spectrum .o<. .q. vero magis distat ab .h. signo quam spectrum .p.; ergo .qr.> maiori angulo videtur vt probatum est. Igitur per suppositiones

302 **.hn.,** .hu. *SO*

Fig. 196

[Fig. 197] | Resta, portanto, finalmente, que o ponto V não se vê senão por meio de um raio visual incidente no círculo EAD para lá de L. Para não termos de usar o alfabeto grego, retomarei algumas das letras já referidas. Seja HN um raio refletido para V no ponto N, entre os pontos L e E. Então, o ângulo NHA, sob o qual se vê XV no espelho EAD, é maior do que o ângulo KHA, ângulo sob o qual se vê o mesmo XV no espelho GAF. A partir do ponto X, tracem-se as duas retas XB e XC, e, a partir de V, [tracem-se] as duas linhas retas VB e VC. É manifesto, pela décima sétima [proposição] deste [tratado], que o ponto X se vê no espelho EAD no ponto de concorrência da linha reta XC com a reta HA. Concorram, portanto, no ponto R. Por isso, também se verá V no mesmo espelho no ponto onde concorrem VC e HN, e seja Q. Mas, no espelho GAF, ver-se-á X no ponto onde concorrem HA e XB, pela mesma décima sétima duas vezes aplicada, e que esse ponto seja O. Pela mesma razão, V ver-se-á no mesmo espelho no ponto de encontro das linhas retas HK e VB, e seja esse ponto P. Mas, no espelho EAD, a imagem de VX será QR, e, no espelho GAF, [a imagem de VX] será PO. Uma vez que a linha reta XB está mais próxima do ponto H do que XC, por hipótese, HA encontra XB antes de XC. Então, o ponto R está mais afastado do olho H do que a imagem O [e Q está mais afastado do que P; logo QR] vê-se num ângulo maior do que OP, como se provou. Então, pelas suposições da

Perspectiue .ux. maius videbitur ab | speculo .ead. maiore quam a minore .gaf. Si [O93v] enim a maiore angulo tantum videretur in eadem distantia maius apparebit, multo igitur maior si videatur a maiori distantia, vt in praecedente propositione visum est. A maioribus igitur etc.

Theorema vicesimum tertium. *In curuis speculis simulacra conuexa spectuntur.* Hanc propositionem in vniuersum veritatem non ha|bere facile probari potest. [S102r]

Esto siquidem speculum .bd. cuius centrum sit .e. oculus autem <.a.> a quo recta linea per centrum producatur .abe. rursusque extendatur .ed. recta linea in .f. visus vero .al. reflectatur in .m. in recta linea .fde.[303]

Dico [ipsius] .fm. simulacrum esse rectum et non conuexum.

Manifestum est enim .f. signum videri visu .ag. signum autem .m. visu[304] .al. at .f. per decimam septimam huius apparet in concursu .ag. et .fe. sit in .h. ob id etiam apparebit .m. in occursu rectae lineae .al. cum linea .fe. qui sit in .k. Apparebit igitur .f.

303 **.fde,** .ade. *SO*
304 **visu,** signo *SO*

Perspetiva, VX, ver-se-á maior no espelho maior EAD, do que no [espelho] menor GAF. Com efeito, à mesma distância, bastaria ver-se num ângulo maior, para parecer maior; logo, parecerá ainda maior se for visto a uma distância maior, como se viu na proposição precedente. Logo, em espelhos maiores, etc.

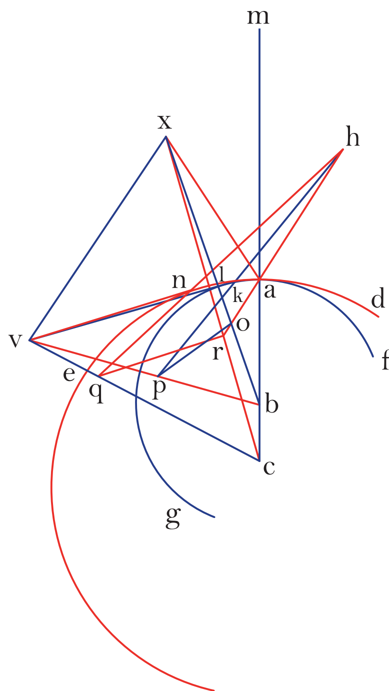


Fig. 197

Teorema vigésimo terceiro. *Em espelhos curvos, as imagens vêm-se convexas.* Consegue provar-se facilmente que esta proposição não é verdadeira em geral.

Seja BD um espelho, com centro E. [Seja] A o olho. A partir deste, trace-se a reta ABE pelo centro [do espelho]. Novamente, trace-se a linha reta ED para F. reflita-se o raio visual AL para M, na linha reta FDE[31].

Afirmo que a imagem de FM é reta e não convexa.

É evidente que o ponto F se vê por meio do raio visual AG e que o ponto M se vê por meio do raio visual AL. Mas F aparece no ponto de concorrência de AG e FE, pela décima sétima [proposição] deste [tratado]; seja H. Pela mesma razão, M aparecerá no encontro da linha reta AL com a linha FE; seja K. Então, [F] aparecerá em

31 O manuscrito não apresenta a figura correspondente a esta demonstração.

in .h.[305] et ipsum .m. in .k. estque .kh. recta linea. apparet igitur .fm. simulacrum recta linea. Est enim et eadem punctorum ratio, quo fit vt fastigia et profunditates a curuis speculis spectari.

Recta fastigia inquam quae supra speculi centrum producta incendunt. Idem et de profunditatibus dicendum.

Dico interdum contingere spectrum alicuius recti, curuum esse, In curuis speculis, atque id in conuexis probabitur, estque in caeteris non admodum diuersa ostensio.

Esto enim conuexum speculum cuius centrum .e. ipsum .bcd.[306] oculus autem .a. a quo recta linea per centrum agatur .abe. a signo vero .e. ipsi rectae lineae .ae. perpendicularis producatur .edf. extra speculum educta per vndecimam primi. Atque a signo .a. procidens visus .ac. reflectatur in .f. manifestum est ex 1ª huius atque ex corollario eiusdem .acf. esse in vno plano | in quo sunt .aef. binae rectae lineae, idque [O94r] planum per .e. speculi centrum transire, applicatumque circunferentiae speculi circulum maiorem efficere, cuius portio esto .bcd. A signo igitur .f. per vndecimam vndecimi perpendicula|ris vtrique educatur ad subiectum planum .aef. ipsa .hfg. [S102v] ponantur per tertiam primi elementorum .hf. et .fg. aequales.

Iam dico in hoc situ ipsam .fgh. curuam apparere.

Connectatur enim .eh. .eg. fietque triangulum .heg. in vno plano per secundam vndecimi in quo a signo .e. per trigesimam primam primi elementorum .eo. parallellus ducatur ipsi .hg. Cum autem sit .hg. perpendicularis plano .aef. erit per octauam vndecimi ab eo signo eidem perpendicularis. ergo per secundam diffinitionem eiusdem erit angulus .aeo. rectus. Est autem per hypothesim .ea. .ef.[307] rectus. secant autem sese .ef. et .eo. in signo .e. et sunt in plano .heg. ergo per quartam vndecimi erit .ae. recta linea perpendicularis ad subiectum planum .heg. Atque ob id per secundam diffinitionem eiusdem anguli .aeh. .aef. .aeg. recti et aequales, per quartum postulatum primi adinuicem.

Iam cadat ab .a. visus .ak. refractus in .h. eritque vt prius .akh. visus in vno plano, in quo .aeh., cuius et sphaere sectio erit maximus circulus. [cuius portio] esto .bkl. complexa a duabus rectis lineis .ae. et .eh. atque cum angulus rectus quartam partem circuli abscindat, erit .bl. quarta circuli pars, et similiter .bd. Atque ob id aequales sunt nanque quarte circulorum maiorum aequalium ob id eiusdem spherae, cum etiam sit .aeg. rectus angulus, planum .aeg. Secans spheram in communi sectione efficit circulum maiorem, atque quartam eius portionem intercipit aequalem ipsis .bl. et .bd. Esto igitur vt ea sit .bn. et quoniam posita est .hf. aequalis .fg. et .ef. Communis angulus autem .hfe. rectus aequalis angulo .efg. recto. Igitur per quartam primi erit .eh.

---

305 **in .h.,** .mh. *SO*
306 **.bcd.,** .bed. *SO*
307 **.ef.,** .aef. *SO*

H e M em K. A linha KH é reta. Então, a imagem FM aparece em linha reta. Com efeito, a ordenação dos pontos é a mesma, como sucede quando alturas e profundidades se veem em espelhos curvos.

Chamo alturas retas às que, prolongadas, caem no centro do espelho. O mesmo aplica-se a profundidades [retas].

Afirmo contudo que pode suceder que a imagem de um objeto reto seja curva em espelhos curvos. Isto provar-se-á em espelhos convexos, e nos outros a prova não é muito diferente.

Seja BCD um espelho convexo com centro E. [Seja] A o olho. A partir deste, trace-se a linha reta ABE pelo centro. Do ponto E trace-se EDF, perpendicular à linha reta AE, tirada para fora do espelho pela undécima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. A partir do ponto A, estenda-se o raio AC, e reflita-se para F. É evidente, pela primeira [proposição] deste [tratado], e pelo corolário da mesma que AC e CF estão no mesmo plano em que estão as duas linhas retas AE e EF, e que esse plano passa por E, o centro do espelho, e que, dirigido para a circunferência do espelho, produz um círculo máximo, do qual BCD é uma porção. Então, do ponto F, pela undécima do undécimo, levante-se HFG, perpendicular a ambas, [e, portanto,] ao plano subjacente AEF. Ponha-se, pela terceira do primeiro dos *Elementos*, HF e FG iguais.

Afirmo aqui que FGH aparece curva.

Ligue-se E a H e E a G. Surgirá o triângulo HEG num plano, pela segunda do undécimo. Neste, a partir do ponto E, pela trigésima primeira do primeiro dos *Elementos*, trace-se EO, paralela a HG. Uma vez que HG é perpendicular ao plano AEF, [a reta] traçada a partir desse ponto [E] será perpendicular ao mesmo [plano], pela oitava do undécimo. Logo, pela segunda definição do mesmo, o ângulo AEO será reto. Mas, por hipótese, [o ângulo] AEF é reto. [As retas] EF e EO intersectam-se no ponto E e estão no plano HEG. Logo, pela quarta do undécimo, a linha reta AE será perpendicular ao plano subjacente HEG. Por isso, pela segunda definição do mesmo, os ângulos AEH, AEF e AEG são retos; e iguais, pelo quarto postulado do primeiro.

Caia agora, a partir de A, o raio visual AK, refletido para H. Como anteriormente, o raio visual AKH estará no mesmo plano em que está AEH, cuja interseção com a esfera será um círculo máximo, do qual BKL, abarcada pelas duas linhas retas AE e EH, será uma porção. Uma vez que um ângulo reto corta uma quarta parte de um círculo, BL será uma quarta parte de um círculo, assim como BD. Por isso são iguais, pois são quartas [partes] de círculos máximos iguais; por isso, [são quadrantes] da mesma esfera. Uma vez que o ângulo AEG também é reto, o plano AEG, ao cortar a esfera, produz um círculo máximo, e corta uma quarta parte dela, igual às partes BL e BD. Seja BN. Uma vez que se pôs HF igual a FG; e EF é comum; e o ângulo HFE, reto, é igual ao ângulo EFG, reto; então, pela quarta do primeiro, EH será igual

aequalis ipsi .eg. et angulus .gef. aequalis angulo .hef. et vtraque per vicesimam eiusdem maior ipsa .ef. demptis igitur per diffinitionem aequalibus .el. .ed. et .en. | [S103r] erunt per communem sententiam .hl. et .gn. aequales et per alteram communem sententiam vtraque maior ipsa .fd. ipsi igitur | angulo .bek. aequalis ponatur per tertiam [O94v] decimam primi angulus .bem. erit igitur per vltimam sexti .bk. circunferentia aequalis ipsi .bm. et reliqua .kl. reliqua .mn. cadat igitur .am. visus vtcunque et sit circunferentia .bk. aequalis ipsi .bm. erit angulus .akb. per corollarium primi Lemmatis praemissae vicesimi secundi aequalis angulo .amb. Connectatur .mg. atque ob id cum sit .hl. aequalis ipsi .gn.[308] et circunferentia .kl. ipsi .mn., erit igitur angulus .gmn. aequalis angulo .hkl. Est autem per primam huius angulus hkd. aequalis angulo .hkb. erit ergo .gmn. aequalis angulo .akb. atque sibi aequali angulo .amb. aequalis igitur erit atque ob id .am. visus refringitur in .g. producatur iam .ak. quousque occurrat .eh. in .p. et .ac. occurrat ipsi .ef. in .q. et .am. occurrat .eg. in .r. ergo per decimam septimam huius quoties opus fuerit repetitam .h. signum videbitur in .p. et .f. in .q. .g. vero in .r.

Dico iam .rqp. non esse rectam lineam sed conuexam.

Sin minus esto recta linea .rqp. erit igitur triangulum .rpa. in vno plano, per secundam vndecimi, in quo erit recta linea .aq. et quoniam angulus .amb. aequalis est angulo .akb. Igitur per conuersionem Lemmatis vicesimi secundi, aequalis est .am. ipsi .ak. et .em. ipsi .ek. per diffinitionem spherae, igitur cum sit .ab. communis .mae. per octauam primi aequalis erit angulo .kae.[309] Est autem angulus .aer. aequalis angulo .aep. et .ae. latus commune. igitur per vicesimam sextam primi elementorum erit .ar. aequalis ipsi .ap. et .er. ipsi .ep. Est autem angulus | .req. aequalis angulo .qep. et .eq. communis igitur [S103v] per quartam primi erit .rq. aequalis .qp. Est autem ipsi .ar. aequalis .ap. et .aq. communis igitur .aqr. angulus per octauam primi aequalis erit .aqp. angulo et recta est .rqp. igitur per diffinitionem anguli recti erit vterque rectus. Quoniam autem tota .ar. aequalis est toti .ap. et .am. pars aequalis .ak. Igitur per communem sententiam reliqua .mr. aequalis erit reliquae .lp. ergo per octauam quinti eadem erit ratio .am., ad .mr. et .ak. ad .kp. connectantur .mk. cadet igitur .mk. intra | spheram, et seceturque[310] in signo .s. Tunc quoniam [O95r] trianguli .arp. diuiduntur latera .ar. et .ap. proportionabiliter igitur .mk. parallela est ipsi .pqr. per primam sexti, erit ergo angulus .ask. aequalis per vigesimam nonam primi angulo .sqp. recto. maior igitur per trigesimam secundam primi erit angulus .ask. angulo .aks. igitur per vigesimam eiusdem erit .ak. maior ipsa .as. multo igitur maior .ac. parte eius. ergo per primum Lemma vigesimae secundae, et suum conuersum erit angulus .aek.[311] maior angulo .aec.[312]et circunferentia .bc. maior .bk. circunferentia reliqua .cd. maior est reliqua .kl. per communem sententiam cum sint aequales .bd. et .bl.[313] cum autem sit maior .hl. ipsi .fd. ponatur .fd. aequalis .lt. per secundam primi, angulus ergo

---

308 **.gn.,** .gm. *SO*
309 **.kae.,** .fae. *SO*
310 **seceturque,** secet .rq. *SO*
311 **.aek.,** .aeb. *SO*
312 **.aec.,** .akb. *SO*
313 **.bl.** .bk. *SO*

a EG; e o ângulo GEF será igual ao ângulo HEF; e cada uma [das retas EH e EG] será maior do que EF, pela vigésima do mesmo. Então, tirados EL, ED e EN, iguais por definição [de esfera]; HL e GN serão iguais, por noção comum; e, por outra noção comum, cada uma delas é maior do que FD. Então, pela décima terceira [proposição] do primeiro, ponha-se o ângulo BEM igual ao ângulo BEK. Pela última do sexto, o arco de circunferência BK será igual ao arco de circunferência BM; e o restante [arco de circunferência] KL, ao restante MN. Caia, portanto, o raio visual AM de qualquer maneira, e seja a circunferência BK igual à BM. Pelo corolário do primeiro lema da proposição vigésima segunda, o ângulo AKB será igual ao ângulo AMB. Ligue-se M a G. Por isso, como HL é igual a GN e a circunferência KL à MN; então, o ângulo GMN será igual ao ângulo HKL. Mas, pela primeira deste [tratado], o ângulo HKD será igual ao ângulo HKB. Logo, [o ângulo] GMN será igual ao ângulo AKB e ao ângulo seu igual AMB. Então, será igual e, por isso, o raio visual AM reflete-se para G. Prolongue-se AK até que encontre EH em P, e AC encontre EF em Q, e AM encontre EG em R. Então, pela décima sétima deste, aplicada tantas vezes quantas for preciso, o ponto H ver-se-á em P, e F em Q e G em R.

Digo agora que RQP não é uma linha reta, mas convexa.

Caso contrário, seja RQP uma linha reta. Então, estará o triângulo RPA num plano, pela segunda do undécimo, em que está a linha reta AQ. Uma vez que o ângulo AMB é igual ao ângulo AKB; então, pelo converso do lema vigésimo segundo, AM é igual a AK e EM a EK, por definição de esfera. Então, uma vez que AB é comum, pela oitava do primeiro, [o ângulo] MAE é igual ao ângulo KAE. Mas o ângulo AER é igual ao ângulo AEP e AE é um lado comum. Então, pela vigésima sexta do primeiro dos *Elementos*, AR será igual a AP, e ER a EP. Mas o ângulo REQ é igual ao ângulo QEP, e EQ é comum; então, pela quarta do primeiro, RQ será igual a QP. Mas AP é igual a AR; e AQ é comum; então, o ângulo AQR, pela oitava do primeiro, será igual ao ângulo AQP e RQP é uma reta. Então, pela definição de ângulo reto, cada um será reto. Mas, uma vez que toda AR é igual a toda AP, e AM é uma parte igual a AK; então, por noção comum, a restante MR será igual à restante KP. Logo, pela oitava do quinto será AM:MR=AK:KP. Ligue-se M a K. Então, MK cairá no interior da esfera; e seja cortada no ponto S. Uma vez que os lados AR e AP do triângulo ARP se dividem proporcionalmente; então, MK é paralela a PQR pela primeira do sexto. Logo, o ângulo ASK será igual, pela vigésima nona do primeiro, ao ângulo reto SQP. Assim, pela trigésima segunda do primeiro, o ângulo ASK será maior do que o ângulo AKS. Então, pela vigésima do mesmo, AK será maior do que AS; por isso, será muito maior do que AC, sua parte. Logo, pelo primeiro lema da vigésima segunda, e pelo seu converso, o ângulo AEK será maior do que o ângulo AEC e a circunferência BK maior do que a circunferência BC. A restante CD é maior do que a restante KL, por noção comum, uma vez que BD e BL são iguais, mas como HL é maior do que FD, ponha-se FD igual a LT, pela segunda do primeiro. Então, uma

.tkl. cum sit minor circunferentia .kl. ipsa .dc. maior erit angulo .fcd. multo igitur maior erit .hkl. angulo .fcd. Est autem .hkl. per primam huius aequalis angulo .akb. igitur .akb. maior est angulo .fcd. ipso autem .akb. maior est angulus .acb. igitur .acb. maior est ipso .fcd. Visus igitur .ac. non reflectitur in .f. per primam huius, quod est contra hypothesim. Non est igitur .rqp. | recta linea, quod fuit probandum. In [S104r] curuis igitur speculis simulacra nonnunquam conuexa apparent. Non est admodum diuersa in cauis speculis ostensio, si quis penitius scrutetur, quam relinquo lectori ex praedictis eliciendam.

Theorema vicesimum quartum. *In cauis speculis si in centro oculus positus fuerit, ipse tantum oculus spectabitur.*

Esto cauum speculum .ab. cuius centrum .c. in quo oculus statuatur.

Dico in primis .c. oculum spectari.

Procidat enim visus quicunque vt .cd. in .d. erunt duo anguli .adc. .cdb. aequales semicirculorum scilicet aequalium per diffinitionem tertii elementorum. cum ergo visus .cd. cadat ad angulos aequales, in sese refringetur per secundam huius .cd. ipsum .c. signum repetet, quare ad .c. signum oculum scilicet visus .cd. refractus peruenit .c. igitur ab speculo .ab. | per secundam suppositionem perspectiuae videbitur. [O95v]

Iam secundo dico nil aliud spectari praeter .c. oculum.

Sin minus videatur .e. signum visu .cd. refracto in .c. Suscipio autem per .cde. signa planum secans cauum speculum, cuius communis sectio per primam primi Theodosii. Esto circulus .adb. vt facilior et concisior sit[314] demonstratio. Erit ergo angulus .cdb. per penultimam communem sententiam maior angulo .edb. est autem angulus .cda. aequalis angulo .cdb. ergo

314 **sit,** si *SO*

vez que a circunferência KL é menor do que a circunferência DC, o ângulo TKL será maior do que o ângulo FCD; então, HKL será muito maior do que o ângulo FCD. Mas HKL, pela primeira deste, é igual ao ângulo AKB. Então AKB é maior do que o ângulo FCD. Mas o ângulo ACB é maior do que AKB; então, ACB é maior do que FCD. Portanto, o raio visual AC não se reflete para F, pela primeira deste, o que é contra a hipótese. Então, RQP não é uma linha reta, o que se quis provar. Logo, em espelhos curvos, por vezes as imagens aparecem convexas. A prova não é muito diferente em espelhos côncavos, se alguém investigar mais a fundo. Deixo ao leitor para examinar a partir do que foi dito.

Teorema vigésimo quarto. *Em espelhos côncavos, se o olho for colocado no centro, apenas se verá o próprio olho.*

[Fig.198] | Seja AB um espelho côncavo com centro C, no qual se coloque o olho.

Em primeiro lugar, afirmo que se vê o olho C.

Estenda-se um raio visual qualquer, como CD, até D. Os dois ângulos [mistos] ADC e CDB serão iguais, pois são [ângulos] de semicírculos iguais, pela definição do terceiro livro [livro] dos *Elementos*. Então, uma vez que o raio visual CD cai em ângulos iguais, CD refletir-se-á sobre si mesmo, pela segunda [proposição] deste [tratado], e voltará ao ponto C. Por esta razão, o raio visual CD, refletido, atingirá o ponto C, ou seja, o olho. Portanto, C ver-se-á no espelho AB, pela segunda suposição da *Perspetiva*.

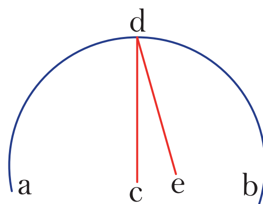


Fig. 198

Afirmo, em segundo lugar, que não se vê mais nada senão C.

Caso contrário, veja-se o ponto E por meio do raio visual CD, refletido para E. Tomo, pelos pontos CDE, um plano secante ao espelho côncavo. Seja a sua interseção [com o espelho], pela primeira [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, o círculo ADB, para a demonstração ser mais simples e concisa. Então, o ângulo [misto] CDB será maior do que o ângulo [misto] EDB, pela penúltima noção comum[32]. Mas o ângulo [misto] CDA é igual ao ângulo [misto] CDB; logo,

32 Melo faz apelo ao axioma: «O todo é igual à soma de todas as suas partes».

angulus .cda. eodem angulo .edb. maior erit. Quare .cd. visus per primam huius non refringitur in .e. Non ergo videtur .e. visu .cd. nec quocunque alio. nam et eadem erit in omnibus ostensio. non igitur aliud videtur quam .c. oculus qui positus est in centro. In cauis igitur speculis etc.

Lemma theorematis vicesimi quinti. | *Si in circulo hemispherii finitore signum aliquod praeter centrum suscipiatur, ab eodem inter terminos hemispherii, per eius centrum nulla recta linea produci potest.* [S104v]

Esto hemispherium .abc. perque eius centrum per secundam primi Theodosii inuentum finitor circulus .agc. cuius centrum per sextam primi eiusdem idem est et spherae.

Dico a nullo alio signo praeter .d. inter .ac. rectam lineam produci posse, quae per hemispherii centrum .d. transeat.

Alioqui ab .e. signo, in .b. cadat quecunque recta linea per centrum hemispherii transiens .eb. connectanturque in finitore .agc. signa .de. extendaturque dimetiens .ad.ec. cum ergo recta linea .be. per .d. transeat, nec sit eadem ipsi .adc.[315] cadit enim .b. per .e.[316] inter .ac. occurrit ergo rectae lineae .adc. et .eb. et duae rectae lineae superficiem concluderent, quod est impossibile ex vltima communi sententia. Non ergo .be. per centrum transit .d. hemispherii, quod fuit probandum. Eadem est in aliis ostensio. Si in circulo igitur etc.

---

315 **.adc.,** .ad.ec. *SO*

316 **per .e.,** per .te. *SO*

o ângulo CDA será maior do que o ângulo EDB. Por esta razão, o raio visual CD não se reflete para E, pela primeira deste. Logo, E não se vê por meio do raio visual CD, nem por meio de qualquer outro [raio visual], pois a demonstração será semelhante para todos. Portanto, não se vê mais nada senão o olho C, que se colocou no centro. Portanto, em espelhos côncavos, etc.

Lema do teorema vigésimo quinto. *Se, num círculo delimitador de um hemisfério, se tomar um ponto qualquer fora do centro, a partir desse ponto não é possível traçar-se nenhuma linha reta entre extremidades do hemisfério que passe pelo seu centro.*

[Fig. 199] | Seja ABC um hemisfério, e pelo seu centro, encontrado pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, [passe] o círculo delimitador AGC, cujo centro é o mesmo que o da esfera, pela sexta do primeiro do mesmo [de Teodósio].

Afirmo que não se consegue traçar nenhuma linha reta [entre extremidades do hemisfério] que passe pelo centro D do hemisfério, a partir de outro ponto entre A e C, que não D[33].

Caso contrário, caia em B, a partir do ponto E, uma linha reta qualquer EB, que passe pelo centro D do hemisfério. No [círculo] delimitador AGC, liguem-se os pontos D e E, e trace-se o diâmetro ADEC. Ora, uma vez que a linha reta BE passa por D, mas não é a mesma [reta] que ADEC (pois B cai em E entre A e C, e, portanto, EB também é concorrente com a linha reta ADC), e as duas linhas retas delimitariam uma área, o que é impossível pela última noção comum, então BE não passa pelo centro D do hemisfério. O que se quis provar. A prova será igual nos demais casos. Logo, se, no círculo, etc.

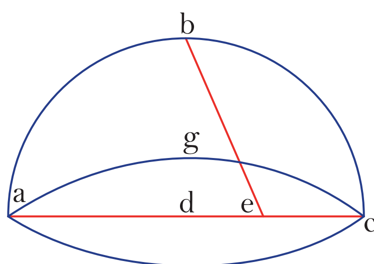


Fig. 199

33 Por «extremidades do hemisfério», Melo parece entender o caso em que se toma um ponto no círculo delimitador do hemisfério e outro ponto na superfície esférica do mesmo. A demonstração possui alguma ambiguidade porque Melo considera dois centros diferentes, o do círculo delimitador e o do hemisfério, que neste caso oincidem.

Theorema vicesimum quintum. | *In cauis speculis si in circunferentia aut extra circunferentiam oculus positus fuerit, oculus non spectatur.* [O96r]
Non explicat in proposito Euclides aut eius interpres quid circunferentiae nomine intelligat. Sed quantum coniectura assequi valeo, circunferentiam vocat circulum habentem eundem polum cum hemispherio speculi caui, extra vero circunferentiam quicquid in eo plano producto extra speculum suscipitur.

Sit ergo cauum speculum .acb. quod in proposito suscipitur, sectio quecunque per|fectae spherae. eius autem polus .c. planum quod appellat circunferentiam. [S105r] circulus .adb. per primam primi Theodosii, cuius idem sit polus .c. productum extra speculum in .e. manifestum est quod si .adb. centrum inueniatur, oculusque fuerit positus in eo oculum videri, siquidem fuerit idem totius speculi centrum, ex praemissa id concluditur. Sin minus si ab[317] eius centro[318] per centrum spherae speculi visus producatur, manifestum est ex praemissis angulos aequales effici, atque per secundam huius oculum videri

Eadem erit ostensio, si speculum spherae sectio fuerit hemispherio maior aut minor de[319] quocunque signo in circunferentia sumpto, propositi circuli, aut intra. quare intelligendum erit Theorema, vbi speculum non fuerit hemispherio maior, sed illi aequalis, ergo adiecta praedicta condictione quod vbicunque oculus ponatur in plano .adb. quod oculus non spectatur.

Sin minus ponatur oculus, vt in .b. cadatque visus .bc. vtcunque dico .bc. in se ipsum non refringi.

317 **ab,** .ab. *SO*
318 **centro,** centrum *SO*
319 **de,** .de. *SO*

Teorema vigésimo quinto. *Em espelhos côncavos, se o olho for posto na circunferência ou fora da circunferência, o olho não se verá.*

Neste teorema, nem Euclides nem o seu tradutor explicam o que querem dizer com o termo «circunferência». Mas tanto quanto consigo perceber, chamam «circunferência» ao círculo que possui o mesmo polo que o hemisfério do espelho côncavo, e «fora da circunferência» a tudo o que se considera naquele plano prolongado para fora do espelho.

[Fig. 200] | Seja o espelho côncavo ACB que se toma neste teorema uma secção de uma esfera perfeita, com polo C. Pela primeira [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio, [seja] o plano a que chama circunferência o círculo ADB, com o mesmo polo C. Seja prolongado para fora do espelho, para E. (É evidente que, caso se encontre o centro de ADB e aí se colocar o olho, o olho se vê: se [o centro de ADB] for o mesmo que o centro do espelho todo, isto conclui-se pela demonstração anterior; se não for, e se se traçar um raio visual a partir do seu centro pelo centro da esfera do espelho, é evidente que se constituem ângulos iguais, pelas anteriores [proposições], e que se vê o olho, pela segunda [proposição] deste [tratado].)

A demonstração [do teorema presente] será igual para qualquer ponto tomado na circunferência ou no interior do círculo proposto, quer o espelho seja uma secção de esfera maior do que um hemisfério, quer seja menor. Por isso, consideremos o teorema no caso em que o espelho não é maior [nem menor] do que um hemisfério, mas seu igual. Portanto, adicionada a condição referida, [entendamos] que, onde quer que se ponha o olho no plano ADB, o olho não se vê[34].

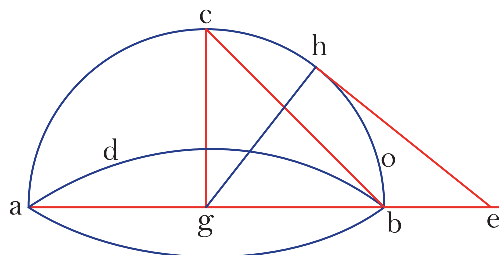


Fig. 200

Caso contrário, ponha-se o olho, como (por exemplo) em B, e caia o raio visual BC como se quiser. Afirmo que BC não se reflete sobre si mesmo.

34 À excepção, como se disse, do centro do círculo ADB.

Nam vt ex adiectis condictionibus facile ostendi potest .bc. praeter centrum agitur totius sphere. Ex vnico enim tantum signo, puta centro .adb. per lemma huius, per spherae centrum in .acb. visus produci potest. Siquidem in speculum atque in parte anteriore vt decet, desiliat, quod erudito lectori deducendum relinquo.

Inueniatur igitur spherae totius speculi centrum per secundam primi Theodosii. | Estoque .g. connectaturque[320] .gc. in plano .bcg. erit angulus .gcb. maior angulo [O96v] .ocb.[321] Statuo .o. inter .cb. vtcunque quare angulus .acg. aequalis angulo .gcb.[322] maior erit eodem angulo .bco. Est autem angulus .bca. maior angulo .gca. per penultimam communem sententiam. Multo igitur ma|ior erit .bca. angulus .bco. angulo. [S105v] Quare per primam partem tertiae huius .bc. non refringitur in se quod fuit probandum.

Eadem erit ostensio si in .e. extra circunferentiam in plano .adb. oculus statuatur, et cadat visus quicunque vt .eh. connexis[323] .hg. signis vbicunque ponatur oculus in plano .adb. non spectabitur, si modo in centro eius non statuatur. Quod fuit probandum. In cauis igitur etc.

Theorema vigesimum sextum. *In cauis speculis, si extendatur dimetiens spherae ex centroque ad angulos rectos quepiam recta linea ducatur, et in altera parte positus fuerit oculus, nihil eorum que sunt in parte, in qua oculus spectabitur, hoc est, nec eorum que sunt ad diametrum, nec eorum que extra diametrum, nec eorum que in diametro.*

Huius Theorematis contextum hyppothesis expositio explicabit, ne forsan plus aequo in eius interpretationem immoremur, et ut concisior faciliorque sit eius ostensio, capiam loco speculi caui circulum secantem speculum in cuius plano uisus et propositae dimetientes producuntur.

Esto igitur speculum .abce. cuius centrum per secundam primi Theodosii (aut primam tertii elementorum) sit .d. diameter producta vtcunque .eb. atque a signo .d. ad angulos rectos .adck. in infinitum producta. ponaturque ex altera parte dimetientis .adc. oculus, puta in parte .dc. in signo .f. Sit autem signum .g. in .fc. et .k. extra.

---

320 **connectaturque,** connectamque *SO*

321 **.ocb.,** .cob. *SO*

322 **.gcb.,** .gcl. *SO*

323 **connexis,** conuexis *SO*

Como facilmente pode ser demonstrado a partir das condições adicionadas[35], BC passa fora do centro da esfera toda. Com efeito, pelo lema deste [teorema], só se consegue estender um raio visual [a partir de um ponto] entre A e B que passe pelo centro da esfera a partir de um único ponto, a saber: a partir do centro de ADB, se é que ele cai no espelho, e na sua parte anterior, como convém, o que deixo ao erudito leitor para ser deduzido.

Ache-se o centro da esfera toda do espelho, pela segunda do primeiro de Teodósio; seja G. Ligue-se G a C, no plano BCG. O ângulo [misto] GCB será maior do que o ângulo [misto] OCB (ponho O em qualquer lugar entre C e B). Por esta razão, o ângulo [misto] ACG, igual ao ângulo [misto] GCB, será maior do que o referido ângulo [misto] BCO. Mas o ângulo [misto] BCA é maior do que o ângulo [misto] GCA, pela penúltima noção comum. Então, o ângulo [misto] BCA será muito maior do que o ângulo [misto] BCO. Por esta razão, pela primeira parte da terceira deste, BC não se reflete sobre si mesmo. O que se quis provar.

A prova será a mesma se se estabelecer o olho em E, fora da circunferência, no plano ADB, e um qualquer raio visual, como EH, depois de se ligarem os pontos E e H. Onde quer que se ponha o olho no plano ADB, não será avistado, desde que não se coloque no centro dele. O que se quis provar. Logo, em espelho côncavos etc.

Teorema vigésimo sexto. *Em espelhos côncavos, se se estender o diâmetro da esfera, e se se traçar uma linha reta perpendicular a partir do centro, e o olho for colocado num dos lados, não se verá nada do que está no lado em que está o olho; isto é, nenhum dos objetos que estão ligados ao diâmetro, ou que estão fora do diâmetro, ou que estão no diâmetro.* A exposição da hipótese explicará o sentido global deste teorema; para que, porventura, nos não demoremos na sua explicação mais do que o que é justo, e para que a sua prova seja mais simples e mais fácil, tomarei, em lugar do espelho côncavo, o círculo que corta o espelho, em cujo plano se estendam, tanto os raios visuais, como os diâmetros referidos.

[**Fig. 201**] | Seja ABCE um espelho, com centro D, pela segunda [proposição] do primeiro [livro] de Teodósio (ou pela primeira do terceiro dos *Elementos*). Trace-se um diâmetro qualquer, EB, e a perpendicular ADCK traçada infinitamente a partir do ponto D. Ponha-se o olho num dos lados do diâmetro ADC, por exemplo, no lado DC, no ponto F. Esteja o ponto G em FC, e K [do lado de] fora.

35 Melo refere-se ao lema que antecede esta proposição e à sua primeira parte.

Dico ab oculo .f. non videri .d. signum, nec aliquod signum inter .dk. visu cadente inter .bc.

Alioqui videatur .fh. visu[324] .g. signum, aut .d. vel .k. et connectatur | .dh. et .hg. [O97r] erit ergo angulus .fhb. maior angulo .dhb. sed angulus .dhb. aequalis est angulo .dhc. et .dhc maior angulo .fhc. multo igitur maior est angulus .fhb. angulo .fhc. | ergo per [S106r] tertiam huius .fh. visus refringitur in angulo .fhb. non autem in .d. quoniam angulus .dhb. maior est angulo .fhc. quia aequalis angulo .dhc. ergo per primam huius non refringitur .fh. in .d. nec eadem ratione in signum aliquod inter .df. non autem refringitur ad partes .fk. vt probatum est, quia non refringitur in angulo .fhc. Visu ergo .fh. non videbitur aliquod ex signis .dc. que sunt ad dimetientem nec .g. in dimetiente nec .k. extra. Eadem erit in omnibus probatio.

Dico secundo quod a signo aliquo in dimetiente .cd. poterit videri .a. signum, aut aliud in dimetiente .da.

324 **uisu,** uisi *SO*

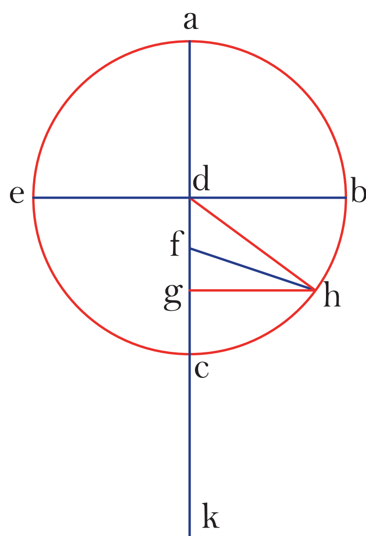


Fig. 201

Afirmo que, a partir do olho F, não se vê o ponto D nem qualquer ponto entre D e K, por meio de um raio visual que caia entre B e C[36].

Caso contrário, admita-se que se vê o ponto G, ou o ponto D, ou o ponto K, por meio do raio visual FH. Ligue-se D a H e H a G. Então, o ângulo [misto] FHB será maior do que o ângulo [misto] DHB. Mas o ângulo [misto] DHB é igual ao ângulo [misto] DHC, e DHC é maior do que o ângulo [misto] FHC. Então, o ângulo FHB é muito maior do que o ângulo FHC. Logo, pela terceira [proposição] deste [tratado], o raio visual FH reflete-se no ângulo FHB, mas não para D, uma vez que o ângulo DHB é maior do que o ângulo FHC, pois é igual ao ângulo DHC. Logo, pela primeira [proposição] deste [tratado], FH não se reflete para D; nem para ponto algum entre D e F, pela mesma razão. Mas também não se reflete para o lado de FK, como se provou, porque não se reflete no ângulo FHC. Logo, por meio do raio visual FH, não se verá nenhum dos pontos D e C, que estão ligados ao diâmetro, nem G, [que está] no diâmetro, nem K, [que está] fora. A prova será idêntica em todos [os casos].

[Fig. 202] | Em segundo lugar, afirmo que é possível ver-se o ponto A, ou outro no diâmetro DA, a partir de um certo ponto no diâmetro CD.

36 As figuras e o texto mostram que Melo considera que a expressão «fora do diâmetro» indica os pontos situados no prolongamento do diâmetro e que estão fora da circunferência, mas o segundo caso da proposição mostra que a expressão pode querer indicar os pontos que se encontram dentro do semicírculo, mas que não pertencem ao raio ou à circunferência.

Ponatur enim .h. signum inter .bc. contingens[325] vtcunque, ipsique .ha. ponatur aequalis .hg. patet vt in praemissis. Saepius est repetitum .g. cadere vltra .c. secarique rectam lineam .cd. a recta linea .hg. in .f. Si ergo visus .fh. cadat, refringetur per primam huius in .a. Sunt enim sectiones aequales eiusdem circuli .hcg. et .hba. atque ob id angulos aequos suscipientes a signo ergo .f. videri potest signum .a. visu cadente inter .bc. Eadem erit probatio quod videatur aliquod signum inter .da. nec multum absimilis, quod si oculus ponatur extra .cd. in quadrante .bcd. spectari aliquod signum in .ad.[326] quod eliciendum studioso lectori relinquo. Atque ex his patet quando haec propositio veritatem habeat, necne. In cauis igitur etc.

Theorema vicesimum septimum. *In cauis speculis si in dimetiente ponantur oculi aequaliter distantes a centro, neuter oculorum spectatur.*

Hanc propositionem in omnibus veram non esse facile conuinci potest.

Siquidem fuerit .abc. speculum | cauum, cuius centrum .d. diameter .adc. oculi [S106v]
aequaliter distantes a centro .fe. Si enim a signo .d. | perpendicularis erigatur .db. con- [O97v]
nectanturque .be. et .bf. cum sint ex hyppotesi .df. et .de.[327] aequales et .db. communis vterque angulus qui ad .d. rectus ergo per quartam primi erit angulus .ebd. aequalis angulo .dbf. quibus demptis ab angulis .dbc. et .dba. semicirculorum aequalium

325 **contingens,** contingentes *SO*
326 **.ad.,** .cd. *SO*
327 **.de.,** .cde. *SO*

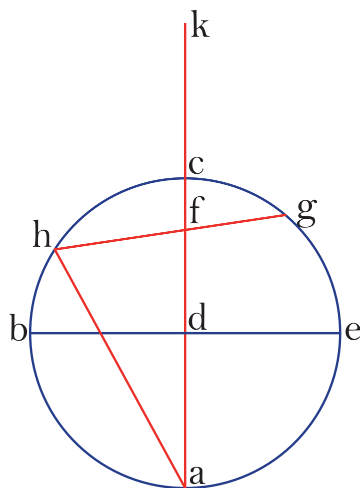


Fig. 202

Ponha-se um ponto qualquer, H, contingente entre os pontos B e C. Ponha-se HG igual a HA. É claro, como tantas vezes se afirmou nas [demonstrações] anteriores, que G cai para lá de C e que a linha reta CD é cortada pela linha reta HG em F. Logo, se se estender o raio visual FH, ele refletir-se-á para A, pela primeira [proposição] deste [tratado], pois HCG e HBA são secções iguais do mesmo círculo e subtendem, por isso, ângulos iguais. Então, a partir do ponto F, consegue ver-se o ponto A por meio de um raio visual que cai entre B e C. A prova será a mesma no caso em que se afirma que se vê algum ponto entre DA e não será muito diferente para o caso em que se afirma que, se o olho se colocar fora de CD, no quadrante BCD, se vê algum ponto em AD. O que deixo para ser feito pelo leitor aplicado. E, destas [palavras], fica claro quando é que esta proposição é verdadeira ou não. Logo, em côncavos etc.

Teorema vigésimo sétimo. *Em espelhos côncavos, se se colocarem os olhos no diâmetro à mesma distância do centro, não se vê nenhum dos olhos.*
Facilmente se pode ficar convencido de que esta proposição não é verdadeira em todos os casos.

[Fig. 203] | Se ABC for um espelho côncavo, com centro D e diâmetro ADC, e se F e E forem os olhos à mesma distância do centro; se, a partir do ponto D, se levantar a perpendicular DB e se se ligar B a E e B a F; uma vez que, por hipótese, DF e DE são iguais, e DB é comum, e ambos os ângulos em D são retos; então, pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], o ângulo EBD será igual ao ângulo DBF. Tirados estes aos ângulos [mistos] DBC e DBA, de semicírculos iguais, restam [os

relinquuntur .eba. et .fbc. aequales .eb. igitur refringitur in .f. et .fb. in .e. quare aliquo modo videbitur .e. ab .f. oculo visu[328] scilicet .fbe. et econtra.

Dico secundo quod non recta visione, tum primo quia vtriusque oculi imagines per eandem viam delatae confunduntur. Tum secundo quia ex decima octaua huius .e. signum videtur, vbi occurrunt .fb. visus directus cum .ed. producta et per vltimam communem sententiam non occurrunt nisi in .f. oculus igitur .e. videbitur in .f. et contra .f. in .e. que non esset certa, sed confusa et inepta visio. Patet ergo quemadmodum hoc intelligi Theorema debeat. In cauis igitur.

Theorematis vicesimi octaui. Lemma primum. *Omne quadrilaterum cuius ex opposito latera aequalia sunt, parallelogrammum est.*

Esto quadrilaterum .abcd. cuius que ex opposito latera .ab. et .cd. similiter .ad. et .cb. sint aequalia.

Dico et que ex opposito latera parallela esse, atque ob id .abcd. parallelogrammum fore.

Connectantur .ac. et quoniam .ad. aequalis est ipsi .cb. per hippotesim et per eandem .dc. ipsi .ab. est autem .ac. communis ergo per octauam primi. .dca.[329] aequalis erit angulo .cab.[330] quibus subtendantur latera .ad. et .bc. aequalia recta ergo linea .ac. in

328 **visu, visi** *SO*
329 **.dca.,** .dac. *SO*
330 **.cab.,** .cdb. *SO*

ângulos] iguais EBA e FBC. Logo, EB reflete-se para F, e FB, para E. Por esta razão, de certo modo, E ver-se-á a partir do olho F, ou seja, por meio do raio FBE e vice--versa.

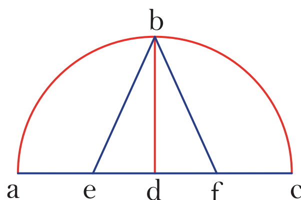


Fig. 203

Em segundo lugar, afirmo que não [se vê] com uma visão precisa. Em primeiro lugar, porque as imagens de cada olho, trazidas pelo mesmo caminho, se confundem. Em segundo lugar, porque, pela décima oitava [proposição] deste [tratado], o ponto E se vê onde o raio direto FB se encontra com o prolongamento de ED; e, pela última noção comum, não se encontram, senão em F. Portanto, o olho E ver-se-á em F; e, por seu lado, F ver-se-á em E. Esta, no entanto, não seria uma visão precisa, mas confusa e desadequada. Logo, fica claro o modo como se deve entender este teorema. Logo, em côncavos.

Lema primeiro do teorema vigésimo oitavo. *Todo o quadrilátero cujos lados opostos são iguais é um paralelogramo.*

[Fig. 204] | Seja ABCD um quadrilátero; e sejam iguais os seus lados opostos AB e CD, e, da mesma forma, AD e CB.

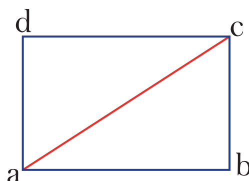


Fig. 204

Afirmo que os lados opostos também são paralelos e que, por isso, ABCD será um paralelogramo.

Ligue-se A a C. Uma vez que AD é igual a CB, por hipótese; e [uma vez que], pela mesma [hipótese], DC [é igual] a AB, e AC é comum; então, pela oitava [proposição] do primeiro [livro], [o ângulo] DCA será igual ao ângulo CAB, [ângulos] pelos quais são subtensos os lados iguais AD e BC. Logo, a linha reta AC cai nas

rectas lineas .dc. et .ab. cadens alternos angulos .dca. et .c|ab. aequos efficit ergo per vigesimam septimam primi elementorum .dc. et .ab. sunt parallele. Eodem modo probabis .ad. et .cb. parallelas esse. Si .db. signa connectas, Parallelogrammum igitur est .abcd. quod fuit probandum. [S107r]

Eiusdem lemma secundum. | *Si quadrilateri duo latera proxima aequalia fuerint, itemque duo alia que ex opposito proxima, atque prioribus inaequalia, que ex opposito latera concurrent ad partes, ad quas minora latera tenduntur.* [O98r]
Esto quadrilaterum .abcd. cuius duo latera .ca.[331] et .ab. sint aequalia. Similiter et duo latera .cd. et .db. sint autem .db. maior ipsa .ca. et .cd. maior .ab.

Dico .db. et .ca. non concurrere ad partes .cd. sed ad partes .ab. Similiter .cd. et .ab. concurrere ad partes .ca. non ad oppositas.

Connectantur in primis .da. et .cb. quae sese secabunt, sit in signo .e. et quoniam est .cd. aequalis .db. et .ca. ipsi .ab. communis autem .ad. per octauam primi erit angulus .cde. aequalis angulo .edb.[332] et .cd. ipsi .db. aequalis. Communis vero .de. ergo per quartam primi erit uterque angulus qui ad .e. aequalis ergo per diffinitionem .de. perpendicularis erit ipsi .cb. quadratum igitur .cd. per penultimam primi aequum erit quadratis duobus .ce. et .ed. eadem ratione et quadratum .ca. aequum erit duobus .ce. et .ea. quadratis. Est autem quadratum .dc. maius quadrato .ca. maior enim ponitur recta linea .cd. ipsa recta linea .ca. duo igitur quadrata .ce. et .ed. maiora sunt duobus quadratis .ce. et .ea. Dempto

331 **.ca.,** .ea. *SO*
332 **.edb.,** .cdb. *SO*

linhas retas DC e AB fazendo os ângulos alternos DCA e CAB iguais. Logo, pela vigésima sétima do primeiro dos *Elementos*, DC e AB são paralelas. Do mesmo modo provarás que AD e CB são paralelas, se ligares os pontos D e B. Portanto, ABCD é um paralelogramo. O que se quis provar.

Lema segundo do mesmo. *Se dois lados adjacentes de um quadrilátero forem iguais, e se os outros dois* [*lados*] *adjacentes* [*seus*] *opostos também* [*forem iguais entre si*], *mas desiguais em relação aos primeiros, os lados opostos serão concorrentes para o lado para que se estendem os lados menores.*

[Fig. 205] | Seja ABCD um quadrilátero, e sejam iguais [entre si] os seus dois lados CA e AB, e assim também os seus dois lados CD e DB. Seja DB maior que CA e CD maior do que AB.

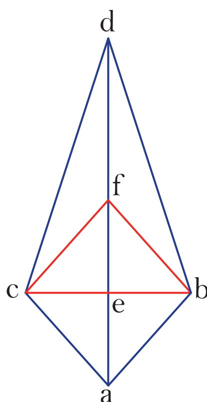


Fig. 205

Afirmo que DB e CA não são concorrentes para o lado de CD, mas para o lado de AB; [afirmo,] da mesma forma, que CD e AB são concorrentes para o lado de CA, e não para o [lado] oposto.

Em primeiro lugar, ligue-se D a A e C a B, que se intersectarão no ponto E. Uma vez que CD é igual a DB e CA a AB, e AD é comum, o ângulo CDE será igual ao ângulo EDB, pela oitava [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. [A linha] CD [é] igual a DB, e DE é comum; logo, pela quarta do primeiro, ambos os ângulos em E são iguais. Portanto, por definição, DE será perpendicular a CB. Então, o quadrado de CD será igual aos dois quadrados de CE e ED [somados], pela penúltima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Pela mesma razão, o quadrado de CA também será igual aos dois quadrados de CE e EA [somados]. Mas o quadrado de DC é maior do que o quadrado de CA, pois se supõe que a linha reta CD é maior do que a linha reta CA. Então, os dois quadrados de CE e ED [somados] são maiores do que os dois quadrados de CE e EA [somados]. Subtraí-

.ce. communique | quadrato relinquetur .de. quadratum maius quadrato .ea. et ob id linea .ed.[333] maior recta linea .ea. Ponatur per tertiam primi elementorum .ef. ipsi .ea. aequalis, et connectantur .cf. et .fb. per primum[334] primi: cum vterque angulus .fec. et .cea. sit rectus, per quartum postulatum hi anguli sint aequales adinuicem. Ponitur autem .ef. aequalis .ea. et .ec. communis. Igitur per quartam primi aequalis <erit .cf.> ipsi .ca. ob id etiam .fb. aequalis erit .ab. sunt autem .ca. et .ab. aequales, ergo quadrilaterum .acfb. erit aequalium laterum eorum etiam que ex opposito. ergo per praemissum Lemma primum parallelogrammum. Per vigesimam nonam igitur primi erunt duo anguli .cab. et .abf. | duobus rectis aequales, duo igitur .cab. et .abd. maiores duobus rectis. Non ergo concurrent .ca. et .db. ad partes .cd. per vigesimam sextam primi, sed tertiam decimam eiusdem bis repetitam, et vltimum postulatum concurrent ad partes .ab. ob id etiam .cd. et .ab. concurrent ad partes .ca. non ad partes .db. quod fuit probandum. Si quadrilateri igitur etc. [S107v] [O98v]

Theorema XXVIII. *In cauis speculis, si eam que ex centro bifariam secans, et ad angulos rectos educens quis ponat oculos aeque distantes ei que ex centro vel per medium diametri, et eius que ad rectos angulos vel in ipsa que ad rectos angulos ipsorum oculorum nullus spectabitur.*

Quando propositio haec verum habeat, queue sint adiiciendae conditiones, et qualiter sit intelligenda, ex hoc nostro commentario lector eruditus aestimet. Nam in Theonis vulgata traditione nihil est quod no|bis adiumento esse possit. [S108r]

Sit ergo .abc. speculum cauum, cuius centrum .d. diameter vero .adc. erecta perpendicularis per vndecimam primi .db. Suscipio autem loco caui speculi (vt concisior sit ostensio), circuli sectionem, diuidatur autem .db. bifariam per decimam primi in signo .e. atque per vndecimam eiusdem ad angulos rectos .gef. ponanturque .gf. oculi aeque distantes a signo .e. Dico primum .gf. aliquo modo spectari, non autem recta visione.

333 **.ed.,** .cd. *SO*

334 **primum,** quartam *SO*

do o quadrado comum de CE, sobrará o quadrado de DE, maior do que o quadrado de EA; e, por isso, [restará] a linha ED, maior do que a linha reta EA. Ponha-se EF igual a EA, pela terceira [proposição] do primeiro dos *Elementos*, e ligue-se C a F e F a B, pelo primeiro [postulado] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Uma vez que cada um dos ângulos FEC e CEA é reto, estes ângulos são iguais entre si, pelo quarto postulado. Mas EF pôs-se igual a EA, e EC é comum. Então, pela quarta do primeiro, CF será igual a CA. Por isso FB também será igual a AB. Mas CA e AB são iguais. Portanto, o quadrilátero ACFB terá os lados iguais, mesmo os [lados] opostos. Logo, pelo anterior lema primeiro, [será] um paralelogramo. Então, pela vigésima nona do primeiro, os dois ângulos CAB e ABF serão iguais a dois retos. Portanto, os dois [ângulos] CAB e ABD são maiores do que dois retos. Logo, CA e DB não serão concorrentes para o lado de CD, pela vigésima sexta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]; pelo contrário, são concorrentes para o lado de AB, pela décima terceira do mesmo duas vezes aplicada, e pelo último postulado. Por isso, CD e AB também são concorrentes para o lado de CA, mas não para o lado de DB. O que se quis provar. Portanto, se [dois lados adjacentes] de um quadrilátero etc.

Teorema vigésimo oitavo. *Em espelhos côncavos, se se bissetar um semidiâmetro, e se se levantar uma perpendicular [ao semidiâmetro no ponto da bissecção], se se colocar os olhos à mesma distância do semidiâmetro, seja entre o diâmetro e a perpendicular, seja na própria perpendicular, não se verá nenhum dos olhos.*

Quando é que esta proposição é verdadeira, ou que condições lhe devem ser acrescentadas, ou como deve ser entendida, o leitor instruído julgará a partir deste nosso comentário, pois na tradição corrente de Teão nada existe que nos possa servir de socorro.

[Fig. 206] | Seja ABC um espelho côncavo, com centro D, seja ADC o diâmetro e seja DB uma perpendicular levantada [ao diâmetro], pela undécima [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*]. Tomo, em vez do espelho côncavo (para a prova ser mais concisa), uma secção do círculo. Bissete-se DB no ponto E, pela décima do primeiro. Pela undécima do mesmo, [trace-se] a perpendicular GEF. Coloquem-se os olhos G e F à mesma distância do ponto E [na perpendicular GEF]. Em primeiro lugar, afirmo que se vê GF, de certa maneira, mas não com visão nítida.

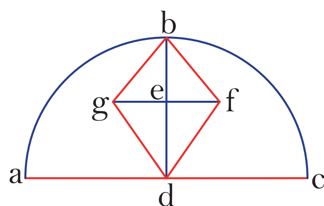


Fig. 206

Connectatur enim .gb. et .bf. cum autem sit angulus vterque qui ad .e. rectus .ge. ipsi .ef. aequalis .eb. vero communis, ergo per quartam primi .gbe. aequalis erit angulo .ebf. demptis ergo ab angulis .eba. et .ebc. erunt duo anguli .gba. et .fbc. aequales. Quare (vt in praemissae propositionis ostensione probabatur), per primam huius .gb. visus refringitur in .f. et contra .fb. visus in .g. aliquo modo igitur videbitur tum .g. tum .f.

Dico rursus quod non videbuntur certa visione.

Connectantur enim .gd. et .fd. erit per quartam primi vt prius repetitam bis .dgbf. quadrilaterum aequalium laterum. Quare per primum Lemma non | concur- [O99r] rent .df. et .gb. Si autem videatur certa visione .f. ex octaua decima huius, oportet vt .gb. visus et .df. concurrant, non ergo videtur ipsum .f. visu .gb. visione certa, nec alio visu quam vnico videtur, vt in perspectiua a nobis ostensum est. ob id etiam non videbitur .g. visu certo[335] quod primo fuerat probandum.

Dico secundo quod si sumatur quodcunque signum inter .ed. vt .h. et ponantur oculi aequaliter distantes ab .h. signo .fg. spectari quidem .gf. oculos sed non certa visione si enim, vt prius, connectantur .fb. .bg. .db.[336] ostendetur sicut in praemissa .fb. visum refringi in .g. et contra .gb. in .f. | atque ob id vtrunque oculum aliqua- [S108v] tenus videri.

Iam rursus dico non videri aliquem ex oculis .fg. visione certa.

Cum enim .bh. sit maior ipsa .hd. est enim .be. aequalis .ed. atque maior ipsa .hd. et .bh. igitur eadem multo maior erit quadratum .bh. maius erit quadrato .hd. et .fh. quadratum commune. Quare per penultimam primi bis repetitam erit quadratum .fb. maius quadrato .fd. et recta linea .fb. maior recta linea .fd. Sunt autem, vt in praemissa probabatur demonstrationis particula .fb. et .bg. Similiter .fd. et .dg. aequales. Quare per secundum Lemma huius non concurrent .fb. et .dg. ad partes .bg. quod oportet per 18am[337] huius.

335 **visu certo** *S*, visione certa *O*
336 **.db.**, .dg. *SO*
337 **18am** *O*, 13am *S*

Ligue-se G a B e B a F. Uma vez que cada um dos ângulos em E é reto, [e] GE é igual a EF, e EB é comum; então, pela quarta do primeiro, [o ângulo] GBE é igual ao ângulo EBF. Logo, subtraídos estes dos ângulos [mistos] EBA e EBC, os dois ângulos [mistos] GBA e FBC serão iguais. Por esta razão (como se provou no argumento da proposição anterior), pela primeira [proposição] deste [tratado], o raio visual GB reflete-se para F; e, por seu lado, o raio visual FB, [reflete-se] para G. Portanto, de certa maneira, ver-se-á, tanto G, como F.

Novamente, afirmo que não se verão com visão nítida.

Ligue-se G a D e F a D. Pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*] duas vezes aplicada como anteriormente, DGBF será um quadrilátero de lados iguais. Por esta razão, pelo lema primeiro [deste teorema], DF e GB não serão concorrentes. Mas, para F se ver com visão nítida, os raios GB e DF teriam de ser concorrentes, pela décima oitava deste [tratado]; logo, não se vê F por meio do raio visual GB com visão nítida, mas também não se vê por mais nenhum outro [raio] senão por um único [que é aquele], como mostrámos na *Perspetiva*. Pela mesma razão, também não se verá G com visão certa. O que se queria provar em primeiro lugar.

[Fig. 207] | Em segundo lugar, afirmo que se se tomar um ponto H entre E e D, e se se puser os olhos F e G à mesma distância do ponto H, então ver-se-ão os olhos G e F, mas não com visão precisa. Se, como anteriormente, se ligar F a B, B a G e D a B, mostrar-se-á, como na anterior, que o raio FB se reflete para G e, por seu lado, GB para F. Por isso, qualquer dos olhos se vê de certa maneira.

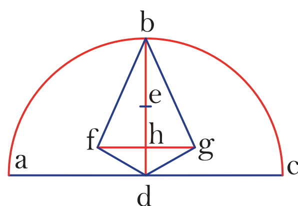


Fig. 207

Afirmo agora, de novo, que não se vê nenhum dos olhos com visão nítida.

Uma vez que BH é maior do que HD (pois BE é igual a ED e esta é maior do que HD; e, portanto BH é muito maior do que esta), o quadrado de BH será maior do que o quadrado de HD. Mas o quadrado de FH será comum. Por esta razão, pela penúltima do primeiro duas vezes aplicada, o quadrado de FB será maior do que o quadrado de FD, e a linha reta FB será maior do que a linha reta FD. Mas FB e BG, como se provou na parte anterior da demonstração, são iguais. O mesmo sucede com FD e DG. Por esta razão, pelo segundo lema deste [teorema], FB e DG não serão concorrentes para o lado de BG, como conviria pela décima oitava deste [tratado]. Para se ver [G]

Si igitur videatur certa visione[338], <...> eadem ratione nec videbitur .f. certa visione quemadmodum in priore huius demonstrationis particula explicatum est. non videbitur ergo in eo situ .fg. certa visione. quod secundo probandum fuit.

Dico tertio quod si signum aliquod ponatur vt .o. inter .be. et oculi et .fg. aeque distantes ab .o. et <ad> angulos rectos, vtrunque oculum certa visione spectari, dextrum quidem in sinistra imaginis parte et sinistrum in dextra.

Connectantur .fb. et .bg. .fd. et .dg. erit vt in prioris demonstrationis secunda particula ostensum est, .fb. minor .fd., .bg. autem minor .gd. atque quadrilaterum .fbgd. cuius duo latera .fb. et .bg. aequalia minora sunt duobus lateribus .fd. et .dg. aequalibus. Quare per secundum Lemma huius .fd. et .bg. concurrent ad partes .fb. vt in .h. et .fb. | atque .dg. vt in .k. quare per primam huius (sicut in praemissis [O99v]
demonstratum est) .fb. reflectitur in .g. et contra .gb. in .f. videturque per decimam octauam huius <.f.> in .h. et per eandem .g. in .k. signo. Cum autem imaginis situs sit contrarius positioni oculorum, dextrum imaginis erit sinistrum aspicientis, et contra. quare cum in eodem situ spectantis vi|deantur oculi (vt ex figura patet) [S109r]
dexter oculus in sinistra imaginis parte spectabitur, et sinister in dextera, visione etiam certa. Quod tertio probandum assumebatur. Et in vniuersum patet, quemadmodum propositio sit intelligenda, atque eius quam breuissime potui ostensio. In cauis igitur speculis etc.

---

338 **visione** *O*, ratione *S*

com visão nítida [os raios DG e FB teriam de ser concorrentes, logo não se vê G por meio do raio visual FB com visão nítida][37]. Pela mesma razão não se verá F com visão nítida, tal como se explicou na primeira parte desta demonstração. Logo, não se verá FG naquele sítio com visão nítida. O que se quis provar em segundo lugar.

[Fig. 208] | Em terceiro lugar, afirmo que se se colocar um ponto O entre B e E; e os olhos F e G à mesma distância de O e perpendicularmente [a BOED], cada olho se vê com visão nítida: o [olho] direito no lado esquerdo da imagem, e o esquerdo no [lado] direito.

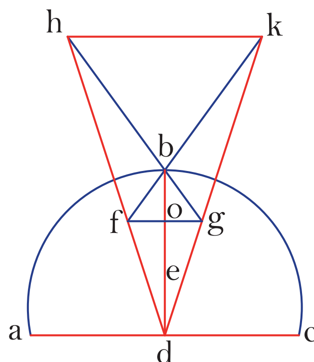


Fig. 208

Ligue-se F a B e B a G, F a D e D a G. Como se mostrou na segunda parte da demonstração anterior, FB será menor do que FD e BG será menor do que GD, e FBGD, será um quadrilátero, cujos dois lados iguais FB e BG são menores do que os dois lados iguais FD e DG. Por esta razão, pelo segundo lema deste [teorema], FD e BG serão concorrentes para o lado de FB, por exemplo em H, e FB e DG [serão concorrentes], por exemplo em K. Por esta razão, pela primeira [proposição] deste [tratado] (como se demonstrou nas anteriores), FB reflete-se para G e GB para F, e, pela décima oitava deste, [F] vê-se no ponto H, e, pela mesma [proposição], G [vê-se] no ponto K. Mas, uma vez que a disposição da imagem é inversa à posição dos olhos, o lado direito da imagem corresponderá à esquerda do observador e vice-versa. Por esta razão, uma vez que os olhos do observador se veem com a mesma disposição (como é claro pela figura) o olho direito ver-se-á no lado esquerdo da imagem; e o esquerdo, no direito; e além disso, com visão nítida. O que em terceiro lugar se queria provar. E é claro como a proposição deve ser entendida em todos os casos, assim como [é clara] a sua prova, tão breve quanto consegui. Logo, em espelhos côncavos etc.

37 Este trecho está em falta, mas deve ser reconstituído conforme o primeiro caso da demonstração.

Theorema vigesimum nonum. *Si vero extra diametrum ponantur oculi, ea que dextra sunt, dextra, et que sinistra sunt, sinistra spectantur. et simulacrum minus est spectato in eo quod medium est inter spectatum et speculum.*

Sit cauum speculum .abc. cuius centrum vt prius .d. atque ad angulos rectos .db. vtcunque[339] producta in .e. extra speculum.

Dico si .fg. oculi aequaliter distantes ponantur a signo .e. .fg. oculos videri visione certa, oculum quidem dextrum in dextra parte imaginis[340], sinistrum vero in sinistra.

Connectantur .fb. et .gb. vt in praemissa, visus ergo .fb. in .g. reflectitur et econtra atque angulus .hfe. aequalis est angulo .kgf. Connectanturque .df. et .dg., erunt per quartam primi cum sint anguli qui ad .e. recti .dfe. et .dge. aequales, producatur .fd. que secabit .bg. per vltimum corrogatum primi elementorum, vt in .k. Ob id etiam secabit .gd. producta .bf. vt in .h. connectanturque .hk. tunc quoniam in triangulo .kfg. angulus qui ad .g.[341] aequalis est angulo qui ad .f. trianguli .hfg. Angulus autem .kfg. aequalis probatus est angulo .hgf.[342] latusque .fg. Commune ergo per vicesimam sextam primi erit .hf. aequalis .kg.[343] et tota .fb. toti .bg. Reliqua igitur .hb. reliquae .bk. aequalis erit. Atque per duodecimam, et octauam quinti pluries | re|petitam erit eadem ratio .fh. ad .hb. quae .gk. ad .kb. quare per secundam sexti elementorum erit .kh. parallela ipsi .fg. Cum autem per decimam octauam huius videatur .g. in .h. et in .k. videatur .f. permutato situ aspicientis (vt ex figura magis patet) Que ergo sunt dextra spectantis in proposito situ videntur dextra imaginis, et sinistra etiam eiusdem sinistra. Eadem esset probatio de aliis positis diferentiis. [O100r] [S109v]

339 **vtcunque,** utrinque *SO*
340 **imaginis,** in dextra parte imaginis dextra *SO*
341 **ad .g.,** .adg. *SO*
342 **.hgf.,** .fgf. *SO*
343 **.kg.,** .hg. *SO*

Teorema vigésimo nono. *Se se colocar os olhos fora do diâmetro, o que está à direita vê-se à direita e o que está à esquerda, vê-se à esquerda, e a imagem é menor do que o que se vê e aparece entre o que se vê e o espelho.*

[Fig. 209] | Seja ABC um espelho côncavo, com centro em D, como anteriormente. [Seja] DB perpendicular [a AC], e seja prolongada para E, fora do espelho.

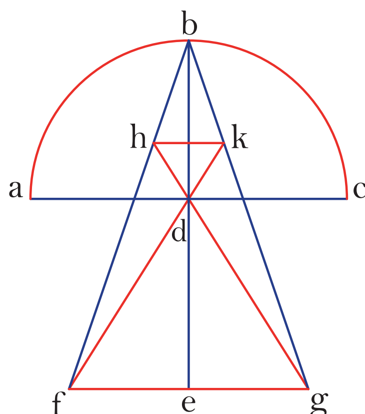


Fig. 209

Afirmo que, se se colocar os olhos F e G à mesma distância do ponto E, os olhos F e G se veem com visão precisa: o olho direito, no lado direito da imagem, e o esquerdo, no esquerdo.

Ligue-se F a B e G a B, como na [proposição] anterior. Então, o raio visual FB reflete-se para G, e vice-versa, e o ângulo HFE é igual ao ângulo KGF. Ligue-se D a F e D a G. Pela quarta [proposição] do primeiro [livro dos *Elementos*], uma vez que os ângulos em E são retos, os ângulos DFE e DGE serão iguais. Prolongue-se FD, que cortará BG em K, pelo último corrogado do primeiro dos *Elementos*. Pela mesma razão, GD, prolongada, também cortará BF em H. Ligue-se H a K. Ora, uma vez que o ângulo em G do triângulo KFG é igual ao ângulo em F do triângulo HFG, e se provou que o ângulo KFG é igual ao ângulo HGF, e, além disso, o lado FG é comum; então, pela vigésima sexta do primeiro, HF será igual a KG. Mas toda FB a toda BG. Então, a restante HB será igual à restante BK. Pela duodécima e pela oitava do quinto aplicada diversas vezes, FH:HB=GK:KB. Por esta razão, pela segunda do sexto dos *Elementos*, KH será paralela a FG. Mas, uma vez que, pela décima oitava deste [tratado], G se vê em H e F em K, alterada a disposição do observador (como é mais claro pela figura), as coisas que estão à direita do espectador vêem-se no sítio indicado à direita da imagem, e as coisas que estão à esquerda também à esquerda da mesma. A prova seria a mesma a respeito das outras diferenças de posição.

Dico secundo .hk. spectrum siue imaginem spectantis minorem esse .fg.

Cum enim .hk. sit parallela ipsi .fg. angulus .bhk. aequalis erit angulo .bfg. atque angulus .bkh. angulo .bgf.[344] per vicesimam nonam primi elementorum, Atque angulus qui ad .b. communis igitur aequi anguli sunt trianguli .hbk. .fbg.[345] quare per quartam sexti erit eadem ratio .fb. ad .bh. que .fg. ad .hk. maior autem est .fb. ipsa .bh. ergo maior erit .fg. ipsa .hk. quod secundo probandum fuerat. Si extra diametrum igitur etc. Eadem erit ostensio in hippotesi tertiae particulae demonstrationis praemissi Theorematis,[346] quod spectrum siue imago aspicientis maior videatur quam oculorum[347] interuallum, siue spectantis facies. Si quis pensiculatius huius demonstrationem examinet.

Corollarium. *A cauis speculis spectrum nonnunquam minus videtur spectante, nonnunquam etiam maius.*

Problema XXX. *Speculum construere est possibile, vt in eo spectentur plures facies, et maiores et minores, alique propius, alique longius, et aliae dextrae, aliae sinistrae.*

| Constructo ex idonea materia corpore in quo plures sint speculorum superficies, [S110r] aliae quidem planae, aliae conuexae, cauae aliae, maiores aliae, aliae minores ex praemissa et xxii, xxi, xx, xix, xii, xi, x, ix, viii et septima huius patet propositum, quod deducendum studioso lectori relinquo.

Theorema XXXI. | *Ex cauis speculis ad solem positis ignis accenditur.* [O100v]

Si enim ex calibe aut idonea aliqua materia cauum speculum construatur, ad solem conuersum idoneae etiam magnitudinis, manifestum est infinitos solis radios per eius centrum in speculi superficiem decumbere, qui omnes ex secunda huius rursus idem centrum repetuntur, omniumque calor in centro globatur adhibita conueniente materia ignem accendit, propter caloris vehementiam, in eo signo coniuncti.

Et quoniam exacta est, huius etiam demonstratio a Theone scripta, et facilis promptaque huius explicatio. Nec hippotesim exponam, quam eruditus lector suopte ingenio facile assequetur.

Haec in Speculariam[348] Euclidis tumultuariae scripsimus: per que Euclidis sensum satis expositum arbitror.

Specularia Euclidis Addito Francisci de Mello Commentario Explicit

344 **.bgf.,** .bfg. *SO*
345 **.fbg.,** .bfg. *SO*
346 **Theorematis,** Lemmatis *SO*
347 **oculorum,** oculi *SO*
348 **speculariam,** speculari *SO*

Em segundo lugar, afirmo que a imagem HK, ou seja, a imagem do espectador, é menor do que FG.

Uma vez que HK é paralela a FG, o ângulo BHK será igual ao ângulo BFG, e o ângulo BKH, ao ângulo BGF, pela vigésima nona do primeiro dos *Elementos*; mas o ângulo em B é comum, logo os triângulos HBK e FBG são equiângulos. Por esta razão, pela quarta [proposição] do sexto [livro dos *Elementos*], FB:BH=FG:HK. Mas FB é maior do que BH, logo FG será maior do que HK. O que se queria provar em segundo lugar. Logo, se fora do diâmetro etc. A prova será igual na hipótese da terceira parte da demonstração da proposição anterior: que o espectro ou imagem do observador se vê maior do que o intervalo dos olhos, ou o rosto do espectador, se alguém se der ao trabalho examinar a demonstração deste facto com mais cuidado.

Corolário. *Em espelhos côncavos, por vezes a imagem aparece menor do que o espectador, por vezes aparece maior.*

Problema trigésimo. *É possível construir um espelho, tal que nele se observem vários rostos, uns maiores, outros mais pequenos, uns mais próximos, outros mais afastados, uns à direita, outros à esquerda.*
Se se construir um objeto com a matéria apropriada, e nele estiverem muitas superfícies de espelhos, umas planas, outras convexas, outras côncavas, umas maiores, outras menores; pela proposição anterior e pelas proposições vigésima segunda, vigésima primeira, vigésima, décima nona, décima segunda, décima primeira, décima, nona, oitava e sétima deste [tratado], fica patente o que se propôs, que deixo para fazer ao leitor aplicado.

Teorema trigésimo primeiro. *A partir de espelhos côncavos virados para o sol acende-se fogo.*
Se se construir um espelho côncavo, com metal ou algum material apropriado, virado para o sol, e ainda de tamanho apropriado, é evidente que os infinitos raios do sol caem na superfície do espelho passando pelo seu centro e que todos eles, pela segunda [proposição] deste [tratado], voltam de novo a esse mesmo centro. O calor de todos, acumulando-se no centro, provoca lume, devido à intensidade do calor concentrado naquele ponto, usado um material apropriado.

Uma vez que a demonstração [do teorema] escrita por Teão é rigorosa, e a respetiva explicação fácil e manifesta, não desenvolverei a hipótese, que o leitor erudito facilmente obterá com o seu engenho.

Escrevemos estes comentários à *Especulária* de Euclides à pressa, e penso que com eles o sentido [do texto] de Euclides foi suficientemente apresentado.

Especulária de Euclides, acrescentado o comentário de Francisco de Melo. Fim.

COMENTÁRIOS AO *SOBRE OS* [*CORPOS*] *INCIDENTES EM LÍQUIDOS*

| Archimedis de Incidentibus in Humidis cum Francisci de Mello Commentariis [S111r, O101r]

Duplex principiorum genus

Diffinitiones

Quoniam propter naturalem quorundam corporum compositionem non potuit eorundem per geometriam certa haberi proportio, et quoniam praecia quorundam quibus emuntur et venduntur debent magnitudinibus ipsorum corporum proportionari necessarium fuit per ipsorum pondera corporum eorum magnitudinum proportiones[1] reperire: vt singulis magnitudinibus <per> proportiones suorum ponderum cognitis valeant certa sociari.

[1] Primo igitur instrumenti per quod examinantur ponderum quantitates ratio danda est.
Est enim instrumentum examinis ponderum: virgula recta: in cuius medio est foramen recipiens perpendiculum cum quo sustinetur virgula cum ponderibus in extremitatibus ipsius appensis: cum debet ponderis alicuius quantitas per mensuras ponderum deprehendi.

[2] Calcus est minima ponderum mensura, ad quam omnes mensurae ponderum referantur: et sunt eius multiplicia.

[3] Illius corporis ponderi calculi aequari dicuntur, | quo corpore in vna extremitate virgulae appenso et calculis in alia, virgula in neutram partem nutum facit. [S111v]

[4] Illius ponderis dicuntur esse calculi: quorum pariter acceptorum pondus illi[2] ponderi adaequatur.

[5] Scitum pondus est: cuius calculorum numerus est scitus.

[6] Corpus naturaliter descendens graue dicitur: leue vero eorum que habent ex natura ascendere.

| [7] Duorum grauium vnius ad aliud relatio duplici modo considerari potest: vno modo secundum speciem: alio modo secundum numerositatem. [O101v]

[8] Secundum speciem: vt si volumus grauitatem auri in specie ad grauitatem argenti comparare. Et hoc debet fieri supposita corporum auri et argenti aequalitate.

[9] Secundum numerositatem fit relatio unius duorum corporum ad aliud: quando volumus discernere per pondus: an massa

---

1 **magnitudinum proportiones**, magnitudinem proportionis *OS*

2 **illi**, illius *OS*, corr. Clagett

Sobre os [corpos] incidentes em líquidos de Arquimedes com os comentários de Francisco de Melo

Duplo género de princípios

Definições

Uma vez que, devido à composição natural de alguns corpos, não se conseguiu obter a sua proporção exata por meio da geometria; e uma vez que os preços de alguns, pelos quais se vendem e compram, devem ser proporcionais às grandezas desses corpos, tornou-se necessário encontrar a proporção da grandeza desses corpos por meio dos seus pesos, a fim de se [lhes] poder associar um preço certo, conhecidas as respetivas grandezas por meio das proporções dos seus pesos.

[1] Em primeiro lugar, deve dar-se uma explicação do instrumento por meio do qual se examinam as quantidades dos pesos. O instrumento de medição dos pesos é uma barra direita, no meio da qual está uma abertura que recebe um perpendículo, com o qual se suporta a vara com os pesos suspensos nas suas extremidades, quando é preciso determinar a quantidade de um determinado peso por meio de medidas de pesos.

[2] Um *cálculo* é a medida mínima de pesos, à qual se reduzem todas as medidas dos pesos, e [estas] são seus múltiplos.

[3] Diz-se que os cálculos são iguais ao peso de um corpo, quando, se se pendurar o corpo numa extremidade da barra e os cálculos na outra, a barra não se inclina para nenhum dos lados.

[4] Diz-se que os cálculos são de determinado peso, quando o peso deles em conjunto é igual a esse peso.

[5] Um peso conhecido é aquele cujo número de cálculos é conhecido.

[6] Um corpo [que é] descendente por natureza chama-se *grave*; chama-se *leve* aos que têm por natureza ascender.

[7] A relação de um de dois graves para o outro pode considerar-se de duas maneiras: de uma maneira, em espécie; de outra maneira, em número.

[8] Em espécie, por exemplo, se queremos comparar a gravidade do ouro em espécie com a gravidade da prata; e isto deve fazer-se supondo-se a igualdade dos corpos de ouro e prata[1].

[9] Em número, estabelece-se a relação de um de dois corpos para o outro numericamente, quando queremos discernir por meio do peso se uma massa de

1 "Gravidade" corresponde, portanto, à noção atual de peso específico.

auri sit grauior quam massa argenti, cuiusque magnitudinis sint datae massae.

[10] Duorum corporum grauius secundum numerositatem dicitur: cuius virgula instrumenti nutum facit eisdem corporibus in extremitatibus vir[gul]ae appensis, vel cuius pondus ponderi plurium calculorum aequatur.

[11] Corpora eiusdem generis dicuntur inter que nulla est substantialis nec accidentalis quoad grauitatem vel leuitatem quemadmodum natura fit: differentia vt auri ad aurum comparati: et argenti ad argentum. Consequenter enim eandem formam elementorum eadem proportio atque mixtura: quam eadem grauitas et leuitas sequatur.

[12] Differentia duorum corporum in magnitudine est | magnitudo in qua maius excedit minus. **[S112r]**

[13] In pondere vero pondus in quo grauius excedit levius.

[14] Duorum aequalium corporum unum altero gravius esse in[3] specie dicitur cuius pondus maiori calculorum numero adaequatur.

[15] Aeque grauia in specie corpora dicuntur: quorum aequalium pondus est aequale.

Postulata

[1] Nullum corpus in seipso graue esse: vt aqua in aquam [sic]: oleum in oleum [sic]: aer in aerem [sic] non est alicuius gravitatis.

[2] Omne corpus: in aere quam in aqua maioris esse ponderis.

[3] Omnia pondera suis calculis proportionalia sunt.

[4] Corporum eiusdem generis magnitudinum et ponderum est ordine eodem sumpta proportio.

| **Propositio prima. Theorema Primum.** *Omnis corporis pondus in aere quam in aqua maius est*[4] *per pondus aquae sibi aequalis in magnitudine.* **[S113r, O102r]**

Esto quidem .a. corpus quodcunque: cuius in aere pondus sit .bc.

---

3 **in specie** *O*, specie *S*

4 **est**, esse *SO*

ouro é mais grave do que uma massa de prata, sejam de que grandeza forem as massas datas.

[10] Diz-se que o mais grave de dois corpos em número é aquele cujo braço da balança se inclina quando os dois corpos se penduraram nas extremidades da barra, ou aquele cujo peso é igual ao peso de mais cálculos.

[11] Corpos do mesmo género são aqueles entre os quais não existe nenhuma diferença acidental ou substancial no que diz respeito à [sua] gravidade ou leveza tal como se encontram na natureza; por exemplo, de ouro comparado com ouro, ou de prata com prata. Em consequência, a uma mesma combinação de elementos associe-se, tanto uma mesma proporção ou mistura, como uma mesma gravidade ou leveza[2].

[12] A diferença entre dois corpos em grandeza é a grandeza pela qual o maior excede o menor.

[13] E [diferença entre dois corpos] em peso, [é] o peso pelo qual o mais grave excede o mais leve.

[14] De dois corpos iguais, diz-se que um é mais grave em espécie do que o outro, quando o seu peso é igual a um maior número de cálculos.

[15] Corpos igualmente graves em espécie são aqueles que, sendo iguais, têm peso igual.

Postulados

[1] Nenhum corpo é grave em si mesmo; por exemplo: a água não tem qualquer gravidade na água, nem o azeite no azeite, nem o ar no ar.

[2] Qualquer corpo tem maior peso no ar do que na água.

[3] Todos os pesos são proporcionais aos seus cálculos.

[4] De corpos do mesmo género, a proporção das grandezas e dos pesos é tomada na mesma ordem[3].

Proposição primeira. *Teorema primeiro. O peso de qualquer corpo é maior no ar do que na água pelo peso de água que lhe é igual em grandeza.*

[**Figs. 210 e 211**] | Seja A um corpo qualquer. Seja B+C[4] o seu peso no ar.

2 Ou seja uma mesma combinação (*forma*) de substâncias simples possui sempre a mesma proporção e relação entre os seus componentes, tal como o mesmo peso específico.

3 Ou seja, em corpos do mesmo género, a razão dos volumes é a mesma que a dos pesos.

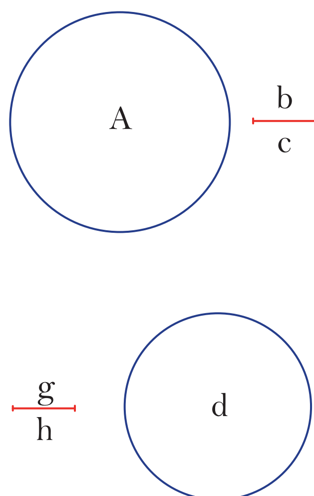
4 Melo nunca se expressa algebricamente. Procedemos como Marshall Clagett para facilitar a leitura (veja-se Clagett 1978).

Si igitur .a. non plus ponderat quam aqua sibi aequalis in magnitudine, non descendet per aquam: per secundum postulatum. Quare in aere plus ponderat quam in aqua per pondus aquae sibi aequalis in magnitudine. Id quidem necessario concluditur: si .a. in specie fuerit aeque graue sicut aqua.

Si vero leuius[5] fuerit: non oportet vt in hisce propositio intelligatur. Oleum quidem si aqua leuius in specie fuerit: non oportet quod in aere plus ponderet: quam in aqua per pondus aquae sibi aequalis in magnitudine. Si quidem .a. fuerit oleum: et in specie aqua leuius: oportet per diffinitionem pondus .a. minus esse[6] quam pondus aquae sibi aequalis in magnitudine. Intelligenda igitur erit conclusio in hisce corporibus que specie non sunt minus grauia quam aqua: atque de corpore aeque graui cum aqua satis ostensum est.

Iam sit .a. specie grauius aqua: descendet igitur .a. per aquam, atque per diffinitionem grauioris in specie: erit .a. corpus grauius aqua sibi aequali magnitudine: que sit .d. pondus autem ipsius .a. sit .bc. quod illud in statera ad aequalitatem sustineat in aere. Et cum per secundum postulatum .a. corpus in aqua sit leuius: minore igitur pondere ex opposito appenso: quam .bc. .a. corpus non faciet nutum. Sit igitur illud .b. atque sit ipsius .a. pondus | vniversum siue grauitas .gh. divisa ad imaginationem [S113v] in pondus .g. aequum ponderi ipsius .d. aquae aequalis .a. corpori aequali <aquae> in magnitudine atque reliquum pondus sit .h. dico .c. pondus, quod est excessus ponderis [ipsius] .a. in aere ad eiusdem pondus in aqua, aequum esse ponderi .d., hoc est g. Quoniam enim .bc. ad aequalitatem sustinet .a. corpus in aere. est autem ipsius a .gh. pondus est | igitur .gh. ipsi .bc. aequale. Rursus quoniam .g. gravitas siue pondus est [O102v] pondus aequum .d. aquae aequalis <.a. corpori aequali> aquae in magnitudine, igitur

5 **leuius,** leuior *SO*, corr. Clagett
6 **pondus .a. minus esse**, .a. pondus esse minus *SO*



Figs. 210 e 211

Se A não pesa mais do que a água que lhe é igual em grandeza, não descerá através da água, pelo segundo postulado. Por esta razão, pesa mais no ar do que na água pelo peso de água que lhe é igual em grandeza. Isto conclui-se necessariamente, caso A seja tão grave em espécie como a água.

Caso seja leve, não é lícito pensar-se que a proposição se lhe aplica, pois se o azeite for mais leve em espécie do que a água, daí não se segue que pesa mais no ar do que na água pelo peso de água que lhe é igual em grandeza. Com efeito, se A for o azeite, e se for mais leve em espécie do que a água, então, por definição, o peso A é menor do que o peso de água que lhe é igual em grandeza. Logo, a conclusão deve ser entendida nos corpos que não são menos graves em espécie do que a água. Quanto ao corpo tão grave como a água, mostrou-se o suficiente.

Seja agora A mais grave em espécie do que a água. [O corpo] A descerá, portanto, na água e, pela definição de «mais grave em espécie», o corpo A será mais pesado do que a água que lhe é igual em grandeza. Seja D a água que lhe é igual em volume, e seja B+C o peso de A, tal que o sustenha na balança em equilíbrio no ar. Visto que, pelo segundo postulado, o corpo A é mais leve na água, então, suspenso no lado oposto [da balança] um peso menor do que B+C, o corpo A não produzirá inclinação. Seja B [este peso]. Seja G+H o peso universal ou gravidade de A dividida mentalmente no peso G, igual ao peso da água D, igual em grandeza ao corpo A; e H o peso restante. Afirmo que o peso C, que é o excesso do peso de A no ar sobre o peso do mesmo [A] na água, é igual ao peso de D, isto é, a G. Visto que o peso B+C sustém no ar em equilíbrio o corpo A, e G+H é o peso de A, então G+H é igual a B+C. Novamente, visto que a força ou peso G é igual ao peso da água D, igual em grandeza ao corpo A, então

.a. corpus per aquam non descendet a virtute .g. per primum postulatum. Nec enim solum per illud postulatum intelligimus nullum corpus in seipso graue esse aut leue sed quod nullum corpus aeque graue in specie cum altero per illud descendet. Opporteret enim tunc ab aequalitatis ratione actionem prouenire: Quare virtus ipsius .a. in aquam[7] descendendi erit tantum .h. pondus. Sed in eo situ .b. tantum pondus ad aequalitatem sustinet ipsum .a. cuius pondus in eo situ est .h. Igitur .hb. pondera aequalia sunt. Sed totum .gh. ipsi .bc. ostensum est aequale. Igitur reliquum .g. pondus aequum est ipsi .c. ponderi, hoc est pondus aquae .d., aequalis aquae in magnitudine ipsi .a. [corpori aequali] .c. ponderi, quod est differentia ponderis .a. in aere ad pondus eiusdem in aqua: Quod fuit probandum.

Corollarium. *Hinc patet quod omne corpus in quocunque leuiore plus ponderat quam in grauiore medio: siquidem grauiore non sit leuius: per pondus corporis sibi aequalis de specie grauioris.*
Corollarium eodem modo probandum est sicut et propositio. Tum etiam propositio intelligenda vbi corpus cuius | pondus in duobus mediis inaeque grauibus perpenditur: non sit leuius medio grauiore. [S114r]

Propositio secunda. Theorema secundum. *Omnium duorum corporum eiusdem siue diuersi generis est vnius ad aliud proportio tanquam differentiae ponderis vnius eorum in aere: ad pondus eiusdem in aqua: ad differentiam ponderis alterius in aere ad pondus eius in aqua.*
Sint quecunque duo corpora .a. et .b: .a. pondus in aere sit .cd: in aqua vero .c. tantum. Ipsius vero .b. pondus in aere sit .ef. in aqua tantum .e.

7 **quam**, qua *SO*, corr. Clagett

o corpo A não descerá pela água por causa da virtude de G, pelo primeiro postulado – com efeito, com aquele postulado, queremos dizer, não apenas que nenhum corpo é grave ou leve em si mesmo, mas também que nenhum corpo tão grave em espécie como outro descerá por este [último], porque a ação decorreria a partir de uma razão de igualdade. Por essa razão, a força que faz A descer na água será apenas o peso H. Mas neste sítio [=na água], é apenas o peso B que sustém em equilíbrio o corpo A; e o seu peso neste sítio [= na água] é H. Então, os pesos H e B são iguais. Mas mostrou-se que o todo G+H é igual ao todo B+C; logo, o restante peso G é igual ao peso C; isto é, o peso da água D, igual em grandeza ao corpo A, [é igual] ao peso C, que é a diferença entre o peso de A no ar e seu peso na água. O que se quis provar.

Corolário. *Daqui fica claro que qualquer corpo pesa mais num meio mais leve do que num meio mais grave pelo peso do corpo que lhe é igual da espécie do mais grave, desde que não seja mais leve do que o mais grave.*
O corolário deve provar-se do mesmo modo que a proposição. Neste caso também, a proposição deve entender-se quando o corpo cujo peso se pesa em dois meios desigualmente graves, não é mais leve do que o meio mais grave.

Segunda proposição. Teorema segundo. *De quaisquer dois corpos do mesmo ou de diferentes géneros, a proporção de um para o outro é como a [proporção] da diferença entre o peso de um deles no ar e o seu peso na água, para a diferença entre o peso do outro no ar e o seu peso na água.*
[Fig. 212] | Sejam A e B dois corpos quaisquer. Seja C+D o peso de A no ar e C o seu peso na água. Seja E+F o peso de B no ar e E o seu peso na água.

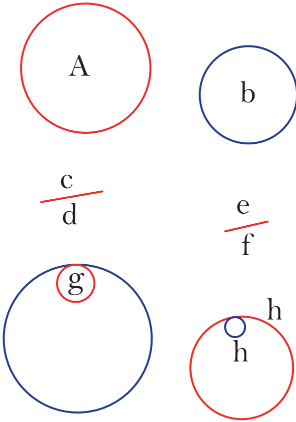


Fig. 212

Dico .a. ad .b. eandem rationem esse quae .d. ad .f.

Quoniam enim ex praemissa .a. | in aere quam in aqua magis ponderat per pondus aquae sibi aequalis in magnitudine. Est igitur .d. pondus aquae aequalis magnitudine ipsi .a. que sit .g. Ob id etiam erit .f. pondus aquae aequalis magnitudine ipsi .b. que sit .h. Cum igitur .g. sit aequalis .a. et .h. ipsi .b. erit igitur eadem ratio .a. ad .b. que .g. ad .h. per septimam quinti bis repetitam. Sed .g. ad .h. eadem est que .d. ad .f. suorum ponderum: cum .g. et .h. sint eiusdem generis magnitudines: per postulatum a nobis additum ad tertium. Igitur per vndecimam quinti eadem est ratio .a. ad .b. que .d. ad .f. quod erat probandum. [O103r]

Haec etiam (vt vides) est in eisdem corporibus intelligenda et eodem modo sicut praemissa: et simile corollarium succedet.

Propositio tertia. Theorema tertium. *Si alicuius corporis in duobus liquoribus et in aere fuerint pondera data: grauitas vnius eorumdem liquorum ad grauitatem alterius in specie erit proportio data.*

| Proportio duorum corporum grauitatis in specie dari dicitur: quando captis duobus aequalibus eorundem generum: ponderis vnius ad pondus alterius ratio data erit. Dicitur autem in specie dari, quia inter quecunque duo corpora aequalia diuersorum generum, cuiuscunque magnitudinis sint: eorundem grauitatis est eadem ratio sicut inter grauitates quoruncunque aliorum duorum aequalium eorundem generum. Hoc sic ostendo. Sint enim .ab. duo corpora aequalia diuersorum generum: atque ob id inaequalis grauitatis: sitque pondus [ipsius] .a. .c: ipsius vero .b. pondus sit .d. Sint rursus .g. .h. duo alia corpora aequalia cuiuscunque magnitudinis .g. eiusdem generis cum .a. et .h. .b. sit pondus .g. .k. ipsius vero .h. .f. Dico eandem esse rationem .c. ad .d. quae .k. ad .f. Quoniam enim .a. et .g. sunt eiusdem generis: erit eadem ratio .a. ad .g. que ponderis .a. ad pondus .g. hoc est .c. ad .k. per postulatum post tertium a nobis additum. Ob id etiam erit eadem ratio | .b. ad .h. quae .d. ad .f. Et quoniam .ab. sunt aequales et .g. et .h. Igitur per septimam et vndecimam quinti eadem erit ratio .a. ad .g. que .b. ad .h. Atque ob id eadem .c. ad .k. que .d. ad .f. igitur vicissim per decimam sextam quinti eadem est ratio .c. ad .d. que .k. ad .f. Quod fuit probandum. [S114v] [O103v]

Afirmo que A:B=D:F.

Visto que, pela [proposição] anterior, A pesa mais no ar do que na água pelo peso de água que lhe é igual em grandeza, então D é o peso de água igual em grandeza a A; seja G. Pela mesma razão, F será o peso de água igual a B em grandeza; seja H. Uma vez que G é igual a A, e H a B, então A:B=G:H, pela sétima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*] duas vezes tomada. Mas G:H=D:F (dado que G e H são grandezas do mesmo género), pelo postulado por nós acrescentado ao terceiro. Então, pela undécima do quinto, A:B=D:F. O que se queria provar.

Também esta, como vês, se deve entender nos mesmos corpos, e da mesma maneira, que a anterior, e um corolário semelhante terá seguimento.

Proposição terceira. Teorema terceiro. *Se os pesos de um corpo em dois líquidos e no ar forem dados, a proporção da gravidade de um dos líquidos para a gravidade do outro será dada em espécie.*

[Fig. 213] | Diz-se que a proporção da gravidade de dois corpos é dada em espécie, quando, tomados dois [corpos] iguais e do mesmo género, a razão do peso de um para o peso do outro for dada. Além disso, diz-se que é dada em espécie porque entre quaisquer dois corpos iguais e de géneros diferentes, sejam de que grandeza forem, a razão das suas gravidades é a mesma que entre as gravidades de outros dois [corpos] iguais dos mesmos géneros. Isto, mostro-o assim. Sejam A e B dois corpos iguais de géneros diferentes e, por isso, de gravidade diferente. Seja C o peso de A; seja D o peso de B. Novamente, sejam G e H outros dois corpos iguais de qualquer grandeza; G do mesmo género de A, e H do mesmo género de B. Seja K o peso de G, e F o peso de H. Afirmo que C:D=K:F. Visto que A e G são do mesmo género, A:G=PesoA:PesoG, isto é, A:G=C:K, pelo postulado por nós acrescentado a seguir ao terceiro. Por isso, também B:H=D:F. Mas, visto que A=B, e G=H, então, pela sétima e pela undécima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*] será A:G=B:H. Ainda por essa mesma razão, C:K=D:F. Então, *alternando*, C:D=K:F, pela décima sexta do quinto. O que se quis provar.

Iam ostenditur propositio. Sit .a. quodcunque corpus quod appendatur in duobus diuersis liquoribus aere quidem grauioribus: quibus etiam .a. in specie sit grauius: in aere etiam appendatur: eiusque pondus sit .bc. datum. eiusdem in aqua pondus sit tantum .b. datum etiam. Sitque eiusdem pondus in aere .df. in oleo autem tantum .d. et utrunque datum.

Dico grauitatis aquae ad grauitatem olei rationem datam esse.

Quoniam | enim .bc. datum est. et eius pars .b. igitur per unum postulandorum datorum Euclidis .c. reliqua pars data erit. Ob id etiam .f. datum erit: quare per primam datorum eiusdem ratio .c. ad .f. data erit. Est autem per primam huius et eius corollarium .c. pondus aquae aequalis ipsi .a. in magnitudine: .f. vero pondus olei eidem aequalis magnitudine. Igitur per diffinitionem a nobis statim[8] praemissam dabuntur aqua et oleum in specie: siue grauitatis aquae ad gravitatem olei in specie: ratio data erit. Eodem modo ostendes in quibuscunque aliis liquoribus corpus vtroque grauius appendetur. Quod fuerat probandum. [S115r]

8 **a nobis statim** *S*, statim a nobis *O*

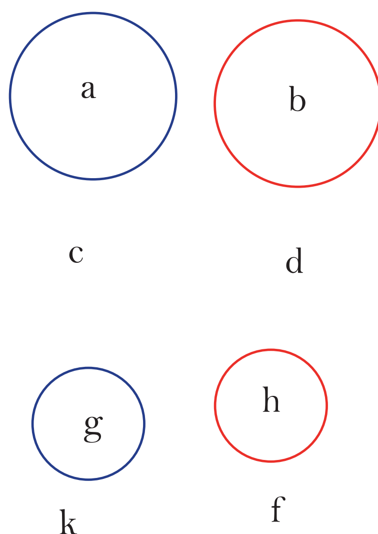


Fig. 213

[**Fig. 214**] | Demonstra-se agora a proposição. Seja A um corpo qualquer e seja pesado em dois líquidos diferentes, mas seguramente mais graves do que o ar, e seja A mais grave em espécie do que eles. Seja [A] pesado no ar. Seja B+C o seu peso dado [no ar], e seja apenas B o seu peso, dado também, na água. Seja D+F o seu peso no ar e seja apenas D o seu peso no azeite, e sejam ambos dados.

Afirmo que a razão da gravidade da água para a gravidade do azeite é dada.

Visto que B+C é dado, assim como a sua parte B, então, por um dos postulados dos *Dados* de Euclides, a restante parte C será dada. Por isso[5], F também será dado. Por esta razão, pela primeira [proposição] dos *Dados*, a razão do mesmo C para F será dada. Mas, pela primeira [proposição] deste [tratado] e pelo respetivo corolário, C é o peso da água igual a A em grandeza, e F é o peso do azeite igual ao mesmo [A] em grandeza. Logo, pela definição que apresentámos imediatamente acima, a água e o azeite serão dados em espécie; ou seja, a razão da gravidade da água para a gravidade do azeite será dada em espécie. Do mesmo modo mostrarás, sejam quais forem os líquidos em que se pesar um corpo mais grave do que cada um deles. O que se queria provar.

5 Ou seja, porque D+F e D são dados.

Propositio quarta. Theorema quartum. *Si duorum quoruncunque corporum: vt auri et argenti pondera in aqua et in aere data fuerint: eorundem proportiones in magnitudine et in specie erunt datae.*

Sint enim .a. et .b. quecunque duo corpora, atque ipsius .a. pondus in aere .cd. datum: ipsius vero .b. in aere .ef. pondus datum etiam: a. pondus in aqua: aut in quocunque alio aere grauiore: leuiore tamen a corpore et etiam .b. Sit .c. pondus tantum: datum: etiam. Atque in eodem liquore .b. pondus esto .e. pondus tantum datum.

Dico primo .a. et .b. rationem | in magnitudine dari. [O104r]

Nam cum .cd. et .ef. sint data: atque eorundem .c. et .e. partes datae. Igitur (vt in praemissa ostendebatur) erit ratio .d. ad .f. data. Differentiae ponderis .a. in aere ad pondus eiusdem in aqua: ad differentiam ponderis .b. in aere: ad pondus eiusdem in aqua. Sed eadem, per secundam huius est .d. ad .f. que .a. ad .b. Ergo .a. ad .b. ratio in magnitudine datur. Quod fuit primo probandum.

Dico secundo quod gravitatis .a. ad gravitatem .b. ratio in spe|cie datur. [S115v]

Sicut enim .a. ad .b. ita sit .cd. pondus ad .k. pondus quod quidem sit pondus .g. corporis eiusdem generis cum .a. corpore: quod per pondera facile fieri potest. Tunc quoniam eadem est ratio .cd. ad .k. que .a. ad .g., cum sint eiusdem generis magnitudines: per postulatum post tertium a nobis additum: igitur cum .cd. ad .k. sit eadem ratio que .a. ad .b.

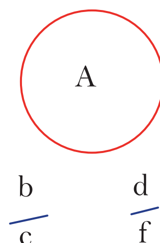


Fig. 214

Proposição quarta. Teorema quarto. *Se os pesos na água e no ar de dois corpos quaisquer, como ouro e prata, forem dados, as suas proporções em grandeza e espécie serão dadas.*
[Fig. 215] | Sejam A e B dois corpos quaisquer. Seja C+D o peso dado de A no ar. Seja E+F o peso de B no ar, também dado. [Seja] apenas C o peso de A na água, ou em qualquer outro [líquido] mais grave do que o ar, mas mais leve do que o corpo A e também do que [o corpo] B, e seja dado. Seja apenas E o peso de B no mesmo líquido, e seja dado.

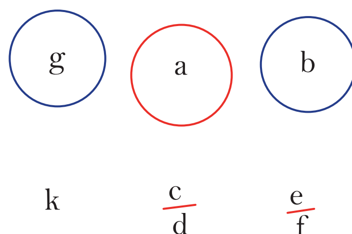


Fig. 215

Afirmo, em primeiro lugar, que a razão A:B é dada em grandeza.

Visto que C+D e E+F são dados, e a suas partes C e E também são dadas, então, como se mostrava na anterior, será dada a razão D:F, ou seja, a razão da diferença entre o peso de A no ar e o peso do mesmo na água, para a diferença entre o peso de B no ar e o peso do mesmo na água. Mas, pela segunda [proposição] deste [tratado], D:F=A:B. Logo, a razão A:B é dada em grandeza. O que se quis provar em primeiro lugar.

Afirmo, em segundo lugar, que a razão da gravidade de A para a gravidade de B é dada em espécie.

Como A:B, assim esteja o peso C+D para o peso K,e seja este o peso de um corpo G do mesmo género do corpo A, o que pode ser feito facilmente por meio de pesos. Visto que (C+D):K=A:G, pois são grandezas do mesmo género, pelo postulado por nós acrescentado depois do terceiro, então, visto que (C+D):K=A:B,

erit per vndecimam quinti eadem ratio .a. ad .g. que .a. ad .b. Ergo per nonam quinti erunt .g. et .b. magnitudines aequales. Et quoniam ratio .a. ad .b. est data: est autem eadem .a. ad .b. que .cd. ad .k. igitur .cd. ad .k. ratio data erit. Datum est autem .cd. pondus per hypotesim: dabitur igitur et .k. pondus ipsius .g. per secundam datorum Euclidis. Dabitur igitur ratio .k. ad .ef. pondus datum per primam datorum eiusdem: que sunt pondera .g. et .b. aequalium magnitudinum eorundem generum cum .a. et .b. Igitur per diffinitionem in praemissa conclusione positam dantur .a. et .b. specie in gravitate. Igitur etc.

Propositio quinta: Problema primum. *Corporis mergibilis vt ferri ad corpus immergibile: vt ad ceram proportionem in magnitudine et in pondere secundum speciem inuenire.*

Ante praemissae conclusioni subiungebatur problema quoddam quod nos censuimus in calce huius tractatuli reponendum: in omnibus exemplaribus que nobis videre contigit. Quinetiam in praemissa conclusione non nihil mendarum fuerat: quod facile si reposuimus. Sensu tamen quo in aliis exemplaribus nihil immutato, tametsi meo iudicio sit aliquid addendum: | vt paulo post declarabimus. [O104v]

Corpus igitur mergibile in proposito | vocatur corpus quod sua virtute nulloque [S116r] adminiculo extraneo per aquam aut alium liquorem descendit. Immergibile contra: id intelligendum est: quod sua vi nequaquam per id medium descendit: sed alteri adiunctum: quemadmodum ferrum quidem sua vi per aquam descendit: ligneum vero nequaquam: quodsi lignum ferro alligaueris: poterit tanta ferri virtus inesse: vt vtrunque in aqua demergatur. Poteris etiam ferrum tantillum tanto ligno alligare: vt super aquam utrunque enatet: quemadmodum videre promptum est in anchoris navium: quibus ligna alligantur ad mensuram quandam. Hinc primo patet quod corpus mergibile velocius descendit si solum demittatur: quam si illi aliquid immergibile adiungatur. Cum enim corpus mergibile solitarie defertur: liquor tantum per quem descendit: illi motui resilit. Contra vero cum ei corpus aliquod alligatur immergibile: repugnat etiam immergibilis corporis natura simul cum liquoris resistentia: Nec tamen aliquam vim superaddit mergibili corpori cui alligatur. Sed contra eius naturam ab eo trahitur. Quare necesse est: vt eadem potentia manente aucta vero

pela undécima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*], A:G=A:B. Logo, pela nona do quinto, G e B serão volumes iguais. Visto que a razão A:B é dada, mas A:B=(C+D):K, então a razão (C+D):K será dada. Mas o peso C+D foi dado, por hipótese; logo, também será dado K, o peso de G, pela segunda dos *Dados* de Euclides. Então, pela primeira dos *Dados* do mesmo autor, será dada a razão de K para o peso dado E+F. Mas estes [K e E+F] são os pesos dos volumes iguais de G e de B, que são dos mesmos géneros que A e B. Então, pela definição colocada na conclusão anterior, A e B são dados em espécie em gravidade[6]. Logo, etc.

Proposição quinta. Problema primeiro. *Encontrar a proporção em espécie, em grandeza e em peso, de um corpo mergível (como ferro) para um corpo não-mergível (como cera).*

Antes da conclusão anterior, em todos os exemplares que sucedeu vermos, estava acrescentado um problema que decidimos colocar no fim deste pequeno tratado. Além disso, nessa conclusão, havia alguns erros que corrigimos sem dificuldade, sem alterar , no entanto, o sentido [encontrado] nos diferentes exemplares, apesar de se ter de acrescentar uma coisa, como referiremos um pouco mais abaixo[7].

Aqui, «corpo mergível» designa o corpo que, pela sua virtude e sem ajuda externa, desce pela água ou outro líquido. Por «não-mergível», por sua vez, deve entender-se aquilo que não desce por esse meio pela sua virtude, mas [só quando] junto a outra coisa. Por exemplo, o ferro desce pela água pela sua força, mas a madeira não; ora, se ligares madeira ao ferro, poderá estar incluída tão grande virtude do ferro [no aglomerado], que um e outro mergulham na água. Também poderás ligar um pouco de ferro a uma grande quantidade de madeira de forma que um e outro flutuem na água, como se pode ver nas âncoras dos navios, às quais se liga madeiras numa certa medida. Daqui fica claro, em primeiro lugar, que um corpo mergível desce mais velozmente se for deitado sozinho, do que se se lhe juntar algo não-mergível. Quando o corpo mergível é deitado solitariamente, apenas o líquido pelo qual desce resiste ao movimento. Pelo contrário, quando se se lhe junta um não-mergível, também o repele a natureza do corpo não-mergível ao mesmo tempo que a resistência do líquido. E [o não-mergível] também não acrescenta qualquer força ao corpo mergível a que se junta, mas é arrastado por ele contra a sua natureza. Por esta razão, é necessário que, permanecendo a mesma potência[8], mas aumentada

6 Ou seja, «a razão A:B em espécie é dada».

7 Melo refere-se à proposição quarta dos manuscritos medievais, que deslocou para o final do seu tratado e a que acrescentou argumentos que lhe servem de lemas (veja-se, Clagett 1978: 1076).

8 Melo refere-se à força que impele para baixo.

obsistentia vtrunque corpus tardius feratur quam se solo corpus mergibile ferebatur.

Secundo sequitur quod adiuncto corpore immergibili corpori mergibili totius pondus in eo liquore per quem immergibile descendere nequit: minus est pondere mergibilis in eodem liquore. Sit enim .a. corporis mergibilis pondus in aere .bcd. in aqua vero tantum .bc. immergibile vero sit .h. cuius pondus in aere esto .e. totius igitur .ah. pondus in aere erit .bcde.

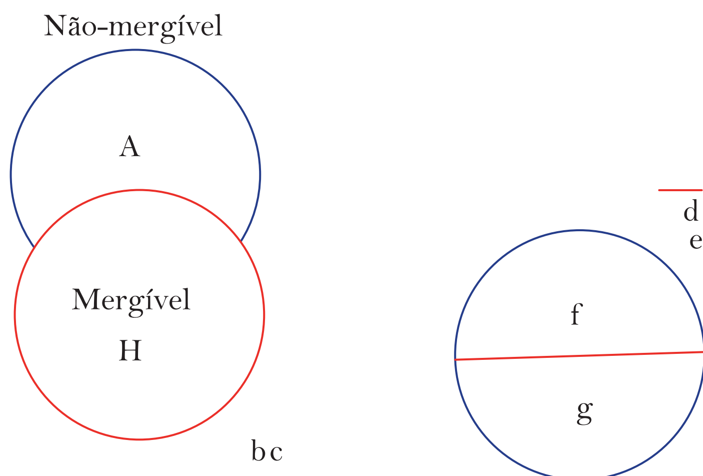
Dico pondus .ah. in aqua pondere .bc. minus esse.

Quoniam enim .d. est | differentia ponderis .a. in aere et in aqua: igitur .d. [S116v] est pondus aquae aequalis ipsi .a. in magnitudine per primam huius que sit .f. Et quoniam .e. est pondus .h. immergibilis quod quidem leuius est specie liquore in quo non mergitur, igitur erit .e. pondus minus pondere aquae aequalis ipsi .h. | in [O105r] magnitudine que sit .g. eiusque pondus sit .eb. tunc quoniam .f. aqua aequalis est .a. in magnitudine: et .g. ipsi .h. erit .fg. aqua aequalis .ah. in magnitudine. Quare pondus .fg. erit differentia ponderis .ah. in aere ad pondus eiusdem in aqua: per primam huius. Illud autem est .edb. igitur reliquum pondus .ah. in aqua est tantum .c. quod quidem minus est pondere .bc. quod erat pondus solius .a. in aqua: quod fuit probandum.

Vnde advertendum quod in proposito corpus immergibile vocamus illud quod leuius est eo liquore respectu cuius immergibile dicitur. Nam vbi fuerit aeque graue in specie nulla erit difficultas in hac propositione probanda (vt paulo infra sumus dicturi).

a resistência, ambos os corpos [em conjunto] se afundem mais lentamente do que se afundaria sozinho o corpo mergível.

[**Figs. 216 e 217**] | Em segundo lugar, segue-se que, se se ligar um corpo não-mergível a um corpo mergível, o peso do todo naquele líquido por onde o não-mergível não consegue descer é menor do que o peso do mergível no mesmo líquido. Seja B+C+D o peso no ar do corpo mergível A, e [o seu peso] na água apenas B+C. Seja H o não-mergível, e seja E o seu peso no ar. Então o peso no ar do todo A+H será B+C+D+E.



Figs. 216 e 217

Afirmo que o peso na água de A+H é menor do que o peso B+C.

Como D é a diferença do peso A no ar e na água, então D é o peso da água igual a A em grandeza, pela primeira [proposição] deste [tratado]; seja F. Visto que E é o peso [no ar] do não-mergível H que é mais leve em espécie do que o líquido em que não se afunda, então o peso E será menor do que o peso de água igual a H em grandeza; seja G [este volume de água] e o seu peso seja E+B. Então, visto que a água F é igual a A em grandeza, e G [é igual] a H, a água F+G será igual a A+H em grandeza. Por esta razão o peso F+G será a diferença entre o peso de A+H no ar e o seu peso na água, pela primeira deste. Mas este [peso F+G] é E+D+B; portanto, o restante peso de A+H na água é apenas C, que é menor do que o peso B+C, que era o peso na água de A sozinho. O que se quis provar.

Daqui deve advertir-se que nesta proposição chamamos «corpo não-mergível» àquele que é mais leve no líquido em relação ao qual se diz não-mergível, pois se for igualmente grave em espécie, não haverá nenhuma dificuldade em provar esta proposição (como faremos um pouco mais adiante).

Ex iis demum patet demonstrationem huius conclusionis (que passim in exemplaribus que nobis contigerunt ponebatur) invalidam esse. In ea enim supponitur aliquod pondus esse immergibilis in eo liquore in quo immergi nequit: tum etiam pondus totius aggregati ex mergibili et immergibili maius esse in eo liquore quam pondus solius mergibilis: cuius oppositum demonstratum est statim. Haec legenti patent. Vbi vero immergibile fuerit aeque graue in specie cum liquore in quo appenditur: facile ex praemissi corollarii demonstratione ostendes idem pondus esse solius mergibilis et totius aggregati in eodem liquore. Iam ut ex demonstratione etiam vulgata claret, supponi|tur in proposito datum pondus corporis mergibilis et immergibilis in aere et in aqua. Quare videtur adiicienda textui conclusionis haec [S117r] conditio. Siquidem fuerint vtriusque pondus in aere et in aqua datum. Similiter mergibilis pondus etiam in aere et in aqua datum.

Nunc probatur conclusio. Sit .a. corpus mergibile, cuius pondus in aere sit .cde: in aqua vero tantum sit pondus .cd: et utrunque esto datum. Sit autem .b. corpus immergibile: cuius pondus in aere sit .f. datum: erit igitur totius .ab. pondus .cdef. datum. | Sit etiam pondus .ab. simul in aqua: quod quidem ex secundo corollario statim demonstrato erit minus pondere .cd. Esto igitur pondus .d. atque id datum. [O105v] erit igitur .cef. pondus: differentia ponderis: .ab. in aere: ad pondus eiusdem in aqua. atque ob id .cef. per primam huius erit pondus aquae ipsi .ab. aequalis in magnitudine. Sit illa .gh: diuisa in .g. aquam aequalem .a. et .h. aequalem .b. Et cum .cd. sit pondus .a. in aqua: erit .e. pondus .g. aquae: et totum .cef. est pondus .gh. aquae. igitur .ef. est pondus .h. aquae aequalis ipsi .b. in magnitudine.

Dico .a. ad .b. magnitudine rationem datam esse.

Tunc quoniam per hypotesim .cef. datum est: datur quidem .d. et totum .cdef. Igitur cum .f. sit datum: erit .ce. datum. et datum est .e. quoniam .cde. et .cd. data sunt per hypothesim. Igitur datum erit .cf. et datum .e. igitur data erit ratio .e. ad .cf. Sed .e. ad .cf. eadem est ratio que .g. ad .h. per postulatum post tertium a nobis additum. Sunt quidem .g. et .h. eiusdem generis magnitudines, earumque pondera .cf. et .e. igitur ratio .g. ad .h. data erit. sed eadem est .a. ad .b. que .g. ad .h. per septimam | quinti elementorum bis repetitam. aequales etenim sunt .gh. ipsis .ab. igitur ratio .a. ad .b. in magnitudine data est, quod fuit primum probandum. [S117v]

Destas coisas fica claro, finalmente, que a demonstração desta conclusão (que estava por todos os exemplares que nos chegaram) é inválida. Nela se supõe, com efeito, que um qualquer peso é não-mergível [mesmo] no líquido em que não pode imergir. Além disso, [nela supõe-se] que o peso do todo agregado de um mergível e de um não-mergível é maior num líquido do que o peso do mergível sozinho, quando se acabou de demonstrar o contrário. Isto fica claro para quem lê. Quanto ao caso em que um não-mergível for tão grave em espécie como o líquido em que se pesa, facilmente provarás a partir da demonstração do corolário apresentado anteriormente que o peso do mergível sozinho e o do todo agregado são iguais no mesmo líquido. Como é claro pela demostração habitual, supõe-se nesta proposição que o peso de um corpo mergível e não-mergível no ar e na água é dado. Por esta razão, parece que esta condição deve ser acrescentada ao texto da conclusão: "desde que sejam dados o peso de um e outro no ar e na água, e também, da mesma forma, o peso do mergível no ar e na água".

[Figs. 218 e 219] | Prova-se agora a conclusão. Seja A um corpo mergível. Seja C+D+E o seu peso no ar, e apenas C+D o seu peso na água, e seja dado cada um destes. Seja B um corpo não-mergível; seja dado o seu peso no ar, F. Então, o peso C+D+E+F do todo A+B será dado. Da mesma forma, seja [dado][9] o peso de A+B na água, o qual, pelo segundo corolário demonstrado imediatamente acima, será menor do que o peso C+D; seja D esse peso, também ele dado. Então, o peso C+E+F será a diferença do peso A+B no ar para o seu peso na água. Por isso, C+E+F será, pela primeira [proposição] deste [tratado], o peso da água igual a A+B em grandeza. Seja [esta] G+H, dividida em G, água igual a A, e H, [água] igual a B. Como C+D é o peso de A na água, E será o peso da água G, e o todo C+E+F é o peso da água G+H. Então C+F é o peso da água H igual a B a grandeza.

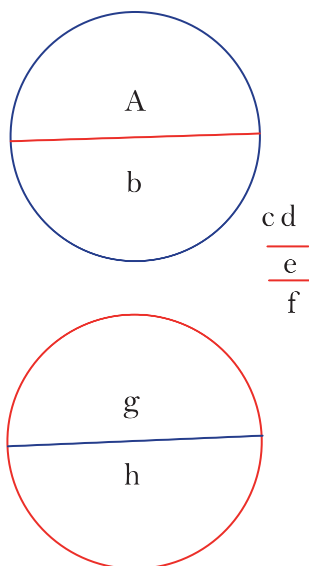
Afirmo que A:B é uma razão dada em grandeza.

Ora, como C+E+F é dado, por hipótese, e D é dado, também o todo C+D+E+F [será dado]. Logo, visto que F é dado, C+E será dado. Mas E também é dado porque C+D+E e C+D são dados, por hipótese. Então C+F será dado e E também será dado; portanto, será dada a razão E:(C+F). Mas E:(C+F)=G:H, pelo postulado acrescentado por nós a seguir ao terceiro, pois G e H são grandezas do mesmo género, e os seus pesos são C+F e E. Então, a razão G:H será dada. Mas A:B=G:H, pela sétima [proposição] do quinto [livro] dos *Elementos*, duas vezes tomada, pois A e B são iguais [respetivamente] a G e H. Logo, A:B é dada em grandeza. O que se quis provar primeiro.

9 A inserção é sugerida por M. Clagett.

Dico secundo rationem .a. ad .b. in specie dari.

Fiat enim sicut .a. ad .b. ita .cde. pondus ad .k. pondus .l. corporis eiusdem generis cum .a. igitur cum .a. et .l. sint eiusdem generis magnitudines erit eadem ratio: per tertio postulato additum .cde. ad .k. que .a. ad .l. Sed eadem est .cde. ad .k. que .a. ad .b. per hypotesim. Igitur per vndecimam quinti eadem erit ratio .a. ad .b. que .a. ad .l. erunt igitur .b. et .l. aequalia per nonam quinti. Rursus quoniam .cde. ad .k. est sicut .a. ad .b. est autem ratio .a. ad .b. data: per priorem partem demonstrationis. igitur erit ratio .cde. ad .k. data: et .cde. datum per hypotesim. Igitur per secundam datorum Euclidis erit .k. datum: et .f. datum est per | hypotesim. igitur [O106r] per primam datorum eiusdem ratio .k. ad .f. data est: que est ratio ponderum .l. et .b. aequalium corporum eorundem generum cum .a. et .b. corporibus. Dantur igitur .a. et .b. in specie: quod erat secundum probandum.



Figs. 218 e 219

[Fig. 220] | Afirmo em segundo lugar que a razão A:B é dada em espécie.

Faça-se A:B=Peso(C+D+E):PesoK, [sendo K o peso] do corpo L, do mesmo género de A. Então, como A e L são grandezas do mesmo género, pelo acrescentado ao terceiro postulado, (C+D+E):K=A:L. Mas (C+D+E):K=A:B, por hipótese. Então, pela décima primeira [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*], A:B=A:L. Logo, B e L serão iguais, pela nona do quinto. Novamente, como (C+D+E):K=A:B, e a razão A:B é dada, pela primeira parte da demonstração, então a razão (C+D+E):K é dada. Mas C+D+E é dado, por hipótese. Logo, pela segunda dos *Dados* de Euclides, K será dado. Mas F é dado, por hipótese. Logo, pela primeira dos *Dados* do mesmo [Euclides], a razão K:F é dada; e esta é a razão dos pesos de L e B, corpos iguais [e] dos mesmos géneros [respetivamente] de A e B. Então, A e B são dados em espécie. O que se queria demonstrar em segundo lugar.

Ex vltima parte huius demonstrationis sequitur quod si fuerit duarum magnitudinum ratio in magnitudine data. pondus autem vtriusque earum etiam datum erit vnius ad alterum ratio grauitatis in specie data.

Lemma primum. *Si fuerint duo corpora eiusdem generis inaequalia: et alia duo alterius generis eisdem vicissim aequalia: erit inter aequalia diuersorum generum ratio eadem ponderum eodem ordine sumpta.*
Sint quidem .a. et .c. duo corpora eiusdem generis inaequalia .b. et .d. alterius generis duo alia inaequalia | eisdem .a. et .c. vicissim aequalia: ita quod .a. sit aequum .b: c. vero ipsi .d. [S118r]

Dico eandem rationem esse ponderis .a. ad pondus .b. sicut ponderis .c. ad pondus .d.

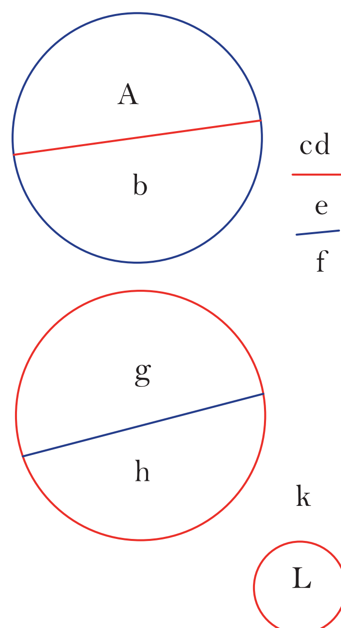


Fig. 220

Da última parte desta demonstração, segue-se que, se a razão de duas grandezas for dada em grandeza, e o peso de cada uma delas também for dado, a razão da gravidade de um para o outro será dada em espécie.

Lema primeiro. *Se dois corpos do mesmo género forem desiguais e outros dois de género diferente forem iguais a eles respetivamente, a razão dos pesos entre os iguais dos géneros diferentes será a mesma, tomados na mesma ordem.*

[**Fig. 221**] | Sejam A e C dois corpos desiguais do mesmo género; sejam B e D outros dois de género diferente, desiguais, e iguais aos corpos A e C respetivamente, de tal forma que A é igual a B e C [igual] a D.

Afirmo que PesoA:PesoB=PesoC:PesoD.

Esto quidem ipsius .a. pondus .g.f.b.h.c.k.d. tunc quoniam .a. et .c. sunt eiusdem generis magnitudines: igitur eadem est ratio magnitudinum ad ponderum per [post[9]] tertium postulatum a nobis additum: hoc est .a. ad .c. sicut .g. et .h. Ob id etiam eadem erit ratio .b. ad .d. sicut .f. ad .k. Est autem eadem ratio .a. ad .c. sicut .b. ad .d. per septimam quinti: eadem igitur erit ratio .g. ad .h. que .f. ad .k. per vndecimam quinti bis repetitam. Vicissim igitur eadem erit ratio .g. ad .f. que .h. ad .k. per decimam sextam eiusdem: hoc est ponderum .ab. et .cd. Quod fuit probandum.

Lemma secundum. *Si ab inaequalibus aequalia demantur, remanentia eodem excessu inaequalia erunt.*
Sit enim .ac. maius .de. excessusque .ac. super .de. esto .bc. auferatur ab .ac. .af. aequalis .dg.

9 **post**, om. *SO*, add. Clagett

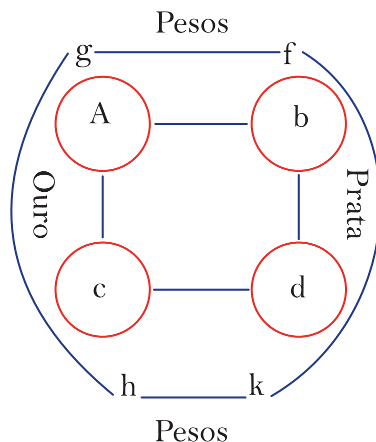


Fig. 221

Seja G o peso de A; F, [o peso] de B; H, [o peso] de C e K, [o peso] de D. Então, visto que A e C são grandezas do mesmo género, a razão das grandezas é igual à dos pesos, pelo postulado acrescentado por nós depois do terceiro, ou seja, A:C=G:H. Por isso, também B:D=F:K. Mas A:C=B:D, pela sétima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*]; portanto, G:H=F:K, pela décima primeira do quinto duas vezes tomada. Então, *alternando*, G:F=H:K, pela décima sexta do mesmo; ou seja, a razão dos pesos de A e B é igual à dos pesos de C e D. O que se quis provar.

Lema segundo. *Se de desiguais se subtraírem iguais, os remanescentes serão desiguais pela mesma diferença.*

[Fig. 222] | Seja AC maior do que DE e seja BC o excesso de AC sobre DE. De AC, tire-se AF igual a DG[10].

A f b c

d g e

Fig. 222

Afirmo que FC excede GE por BC.

10 M. Clagett acrescenta: «which *dg* is subtracted from *de*».

Dico .fc. excedere .ge. per .bc.

| Quoniam enim .ac. excessus supra .de. est .bc. igitur .ab. aequalis est ipsi .de. [O106v] Est autem .af. aequalis ipsi .dg. igitur reliqua .fb. aequalis erit ge: ac. igitur componitur ex .af.fb.bc. quorum .af. aequalis est .dg.fc. maior .ge. cuius pars .fb. aequalis est .ge. et reliqua .bc. excessus eiusdem .fc. supra .ge.

Propositio sexta. Theorema quintum. *Si fuerint tria corpora aequalia quorum duo sint simplicia diuersorum generum et inaequalium ponderum: tertium vero corpus ex vtriusque simplicium genere mixtum erit partis mix|ti que in ipso est de genere grauioris ad partem que in ipso est: de genere leuioris proportio tanquam proportio differentiae ponderis mixti ad pondus leuioris ad differentiam ponderis grauioris ad pondus mixti corporis.* [S118v]

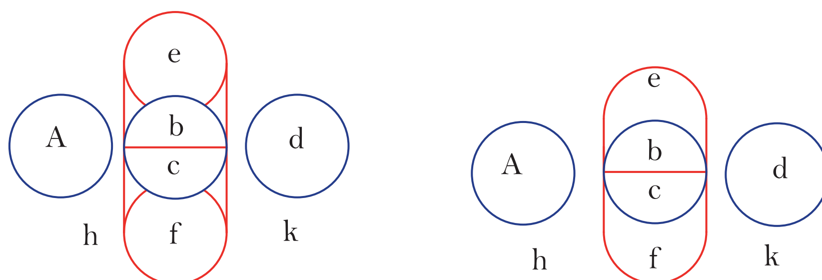
Est quidem .bc. corpus mixtum ex duobus simplicibus: puta ex auro et argento: cuius pars .b. sit de genere grauioris: .c. vero de genere leuioris. Sit autem .a. corpus eiusdem generis cum .b. et aequum ipsi .bc: d. vero corpus eiusdem generis cum .c. et aequum eidem .bc. et cum .a. sit de genere grauioris et .c. pars de genere leuioris, .a. vero et .bc. aequalia: maius erit pondus .a. quam pondus .bc. Sit igitur differentia ponderis .a. super pondus .bc.h. ob id etiam pondus .bc. maius erit pondere .d. Sit excessus .bc. ponderis supra .d. pondus .k.

Dico eandem esse rationem .b. ad .c. que .k. ad .h.

Intelligatur enim .be. corpus aequum ipsi .a. et eiusdem generis. Etiam .cf. corpus eiusdem generis cum .d. et illi aequum. erit igitur idem pondus .a. et .eb. Idem etiam pondus .cf. et .d. quare erit differentia .eb. ponderis supra .bc.h. differentia autem ponderis .bc. supra .cf.k. Tunc quoniam .eb. aequale est ipsi .bc. magnitudine. Dempta comuni .b. erit .e. magnitudine aequale corpus ipsi .c. Ob id etiam .f. aequum erit ipsi .b. | Rursus quoniam pondus [O107r]

Visto que BC é o excesso de AC sobre DE, então, AB é igual a DE. Mas AF é igual a DG. Então, a restante FB será igual a GE. Portanto, AC é constituída por AF, FB e BC, das quais AF é igual a DG e FC é maior do que GE, sendo a parte FB igual a GE e a restante BC o excesso de FC sobre GE.

Proposição sexta. Teorema quinto. *Se forem três corpos iguais dos quais dois são simples mas de géneros diferentes e pesos desiguais, e o terceiro corpo [é] um composto do género de ambos os [corpos] simples, a proporção da parte do composto que é do género do [simples] mais grave para a parte que é do género do [simples] mais leve será como a proporção da diferença entre o peso do composto e o peso do [simples] mais leve para a diferença entre o peso do [simples] mais grave para o peso do corpo composto.*
[Figs. 223 e 224] Seja B+C um corpo composto de dois simples, por exemplo, ouro e prata, e a sua parte B seja do género do [simples] mais grave e C do género do [simples] mais leve. Seja o corpo A do mesmo género de B e igual a B+C, e seja o corpo D do mesmo género de C e igual a B+C. Como A é do género do mais grave e a parte C é do género do mais leve, e como A=B+C, o peso de A será maior do que o peso de B+C. Então, seja H a diferença do peso A sobre o peso B+C. Pela mesma razão, o peso de B+C também será maior do que o peso de D. Seja K o excesso do peso de B+C sobre o peso de D.



Figs. 223 e 224

Afirmo que B:C=K:H.

Considere-se o corpo B+E igual a A e do mesmo género; e também o corpo C+F do mesmo género que D e igual a ele. O peso de A e de E+B será igual. O peso de C+F e de D também será o mesmo. Por esta razão, H será a diferença do peso de E+B sobre [o peso de] B+C e K a diferença do peso de B+C sobre o de C+F. Então, visto que E+B é igual a B+C em grandeza, tirado B em comum, o corpo E será igual a C em grandeza. Por isso, F também será igual a B. Novamente, visto que o peso de E+B é maior do que o peso de B+C, tirado o peso da grandeza B, que é comum;

.eb. maius est pondere .bc. dempto communi pondere .b. magnitudinis erit per secundum lemma huius excessus ponderis .e. magnitudinis supra pondus .c. magnitudinis .h. differentia. Atque ob id pondus .c. cum .h. aequalia erunt ponderi ipsius .e. Eadem ratione erit .k. excessus ponderis .b. | magnitudinis supra pondus .f. atque ob id pondus .f. magnitudinis cum .k. ponderi .b. magnitudinis aequale. Cum vero sint .eb. eiusdem generis: et .cf. eisdem aequalia vicissim: alterius generis: erit per primum lemma huius eadem ratio ponderis .e. ad pondus .c. quae magnitudine aequalia sunt (vt probatum est) que ponderis .b. ad pondus .f. magnitudinis (magnitudine enim et[10] ea probata sunt aequalia). Quare per septimam quinti cum autem sit pondus .c. et .h. aequum ponderi .e. pondus autem .f. et .k. ponderi .b. Igitur eadem erit ratio .hc. ponderum ad .c. pondus que .fk. ad .f. pondus. Diuisim igitur per decimam septimam quinti elementorum Euclidis: eadem erit ratio .k. ponderis ad .f. pondus: quae .h. ad .c. pondus. vicissim ergo per decimam sextam eiusdem eadem erit ratio .k. ad .h. que .f. ponderis ad .c. pondus. Cum autem .fc. sint eiusdem generis magnitudines: erit eadem ratio ponderum et magnitudinum per postulatum a nobis post tertium additum .f. ad .c. Est igitur eadem ratio .f. magnitudinis ad .c. magnitudinem per vndecimam quinti: que .k. ad .h. Est autem .f. aequalis .b. atque ob id per septimam eiusdem .b. ad .c. eadem ratio que .f. ad idem .c. ergo per eandem vndecimam erit .k. ad .h. eadem ratio que .b. magnitudinis ad .c. magnitudinem. Sunt autem .b. et .c. partes de parte simplicium in mixto .k. excessus ponderis mixti supra pondus leuioris simplicium .h. vero differentia ponderis simplicium grauioris ad pondus mixti ex vtrisque. quod intendebamus. [S119r]

Nec dissimulauerim huic propositioni alteram fuisse praemissam in numeris: sed quoniam ea in arithmeticis Ior|dani ostensa est, nec ad propositum scopum conducit illam tanquam adulterinam et adiectitiam expunximus. [S119v]

| **Problema.** *Dato mixto magnitudine aut pondere in aere et in aqua simplicia eidem aequalia magnitudine dare.* [O107v]

Sit quidem .ab. mixtum prius datum magnitudine.

Suscipiam eiusdem generis cum .a. simplici magnitudinem aliquam .c. erit igitur per primam datorum ratio .c. ad .ab. data. ita fiat ipsius .c. ad .d. magnitudinem eiusdem generis. Erit igitur per nonam quinti elementorum Euclidis .d. aequalis ipsi .ab. Est siquidem eadem ratio .c. ad .ab. et ad .d. Eodem modo etiam dabis simplex aequum ipsi .ab. eiusdem generis cum altero ex simplicibus.

Iam rursus sit .ab. pondus in aere et in aqua datum.

10 **enim et** *S*, et enim *O*

[então,], o excesso do peso da grandeza E sobre o peso da grandeza C será a diferença H, pelo segundo lema deste [tratado]. Por isso, os pesos de C e H [somados] serão iguais ao peso de E. Pela mesma razão, K será o excesso do peso da grandeza B sobre o peso de F. Por isso, o peso da grandeza F em conjunto com K será igual ao peso da grandeza B. Como E e B são do mesmo género e C e F são iguais àqueles, respetivamente, mas de género diferente, [então,] pelo primeiro lema deste, PesoE:Peso C= PesoB:PesoF, sendo E e C iguais em grandeza (como se provou), e tendo-se provado também que estes [B e F] são iguais em volume. Por esta razão, pela sétima [proposição] do quinto [livro dos *Elementos*], como o peso de C+H é igual ao peso de E, e o peso de F+K é igual ao peso de B, então (PesoH+PesoC):PesoC=(Peso F+PesoK):PesoF. *Dividendo*, pela décima sétima do quinto dos *Elementos* de Euclides, PesoK:PesoF=PesoH:PesoC. Então, *alternando*, pela décima sexta do mesmo, PesoK:PesoH=PesoF:PesoC. Como F e C são grandezas do mesmo género, a razão dos pesos e das grandezas F e C será a mesma, pelo postulado acrescentado por nós depois do terceiro[11]. Portanto, a razão GrandezaF:GrandezaC=K:H, pela décima primeira do quinto. Mas F é igual a B. Por isso, pela sétima do mesmo B:C=F:C. Logo, pela mesma décima primeira, a razão K:H=GrandezaB:GrandezaC. Mas B e C são partes da parte dos simples no composto[12], K é a diferença entre o peso do composto e o peso do mais leve dos simples; e H é a diferença entre o peso do mais grave dos simples e o peso do composto. O que pretendíamos.

Não quero deixar de referir que uma segunda prova, com números, foi acrescentada a esta proposição. No entanto, como é provada na *Aritmética* de Jordano, e não contribui para o objetivo do tratado, deixamo-la de lado por ser espúria e constituir um acrescento [ao original].

Problema. *Se um [corpo] composto for dado em grandeza, ou em peso no ar e na água, determinar os [corpos] simples iguais a ele em grandeza.*

[Fig.225] | Em primeiro lugar, seja A+B o [corpo] composto dado em grandeza.

Tomarei C, uma grandeza dada qualquer do mesmo género do simples A. Pela primeira dos *Dados*, razão C:(A+B) será dada; faça-se igual a C:D, sendo D uma grandeza do mesmo género [de A]. Pela nona [proposição] do quinto dos *Elementos* de Euclides, D=(A+B), pois C:(A+B)=C:D. Do mesmo modo, também determinarás o [corpo] simples igual a A+B, do mesmo género do outro dos simples.

Agora, seja dado o peso de A+B no ar e na água.

11 Ou seja, VolumeF:VolumeC=PesoF:PesoC.

12 B e C correspondem, respetivamente, ao volume do simples mais pesado e ao do simples mais leve do composto.

Atque eiusdem generis cum .a. accipio .c. magnitudinem: cuius pondus in aere et in aqua sit datum: quodcunque illud sit: hoc enim per diuisionem tandem constabit. Et cum pondera .ab. et .c. in aere et in aqua sint data: erunt eorum differentiae datae: erit igitur per secundam huius ratio .c. ad .ab. data. est enim eadem que et inter differentias ponderum. Sit igitur .c. pondus .h. fiatque sicut .c. ad .ab. ita .h. ad .d. pondus .g. magnitudinis eiusdem generis cum .c. erit igitur .h. ad .d. eadem ratio que .c. ad .g.[11] per postulatum a nobis additum. Igitur eadem que .c. ad .ab. per vndecimam quinti. quare per nonam eiusdem erit .g. aequalis .ab. et sic probabis de alio simplici quod intendebamus.

Hinc patet quod si fuerit mixtum pondere datum: erit simplex | ipsi aequum magnitudine datum pondere. Vt enim patuit ex demonstratione, erit .h. ponderis dati ad pondus .d. .g. simplicis aequum ipsi .ab. ratio data: sed .h. pondus datum: vt ex hypotesi positum est. Igitur .d.[12] per secundam[13] datorum Euclidis datum est. **[S120r]**

Propositio septima. Problema secundum. *In corpore ex duobus mixto: quantum sit de vnoquoque declarare.*

In proposito intelligimus corpus mixtum ex duobus datum esse: pondere et magnitudine: aut pondere tantum. Siquidem dabitur totum magnitudine | mixtum: et pondere: dabuntur simplicia in eodem existentia magnitudine: si tantum pondere detur: dabitur solum ratio eorundem secundum magnitudinem. **[O108r]**

Sit igitur .ab. mixtum ex duobus: cuius pondus datum .a. de genere grauioris .b. de genere leuioris. atque per lemma praemissum bis repetitum .c. de genere grauioris aequum[14] .ab: d. vero de genere leuioris aequum eidem dabuntur igitur .c. et .d. pondera per corrogatum eiusdem lemmatis: ergo dabuntur differentiae ponderum .cd. et .ab. Sit differentia inter .c. et .ab.: h. inter .ab. et .d. .k. erunt igitur .k. et .h. data. Ratio ergo .k. ad .h. data erit per primam datorum

---

11 **.g.,** .d. *SO*, corr. Clagett
12 **.d.** *S*, .p. .d. [=pondus .d.?] *O*
13 **secundam,** septimam *SO*, corr. Clagett
14 **aequum,** aequi *SO*, corr. Clagett

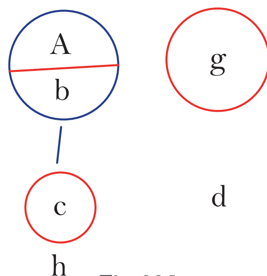


Fig. 225

Tomo uma grandeza C do mesmo género de A, e cujo peso no ar e na água é dado, seja qual for, pois isto ficará estabelecido por divisão. Como os pesos no ar e na água de A+B e C são dados, as diferenças entre eles serão dadas; portanto, pela segunda [proposição] deste [tratado], a razão C:(A+B) será dada, pois é a mesma [razão] que entre as diferenças dos pesos. Seja H o peso de C. Faça-se C:(A+B)=H:D, sendo D o peso do volume G, do mesmo género de C. Então, pelo postulado acrescentado por nós, será H:D=C:G; e portanto, [C:G]=C:(A+B), pela décima primeira do quinto. Por esta razão, pela nona do mesmo G=(A+B). De forma análoga provarás para o outro simples. O que pretendíamos.

Daqui fica claro que se o composto for dado em peso, o simples igual a ele em grandeza será dado em peso; com efeito, como ficou claro por demonstração, a razão do peso dado H para o peso D do simples G igual a A+B será dada, mas o peso H é dado, como se pôs por hipótese; logo, pela sétima dos *Dados* de Euclides, D será dado.

Proposição sétima. Problema segundo. *Num corpo composto de dois, indicar quanto existe de cada um.*

Nesta proposição entendemos que um corpo composto de dois é dado em peso e em grandeza, ou então apenas em peso, pois se o composto todo for dado em grandeza e em peso, os simples que nele existem serão dados em grandeza; se apenas for dado em peso, será dada apenas a razão deles em grandeza.

[Fig. 226] | Seja A+B um composto de dois, cujo peso seja dado; seja A de género mais grave, e B de género mais leve. Pelo lema apresentado duas vezes tomado, seja C do género do mais grave e igual a A+B, e D do género do mais leve e igual ao mesmo [A+B]. Então, serão dados os pesos de C e de D, pelo corrogado do mesmo lema. Logo, serão dadas as diferenças dos pesos de C+D e de A+B. Seja H a diferença entre [os pesos de] C e A+B, e K [a diferença] entre [os pesos de] A+B e D. Então, K e H serão dados. Logo, a razão K:H será dada, pela primeira dos *Dados* de Euclides.

Euclidis. Ea autem per precedentem conclusionem huius est .a. ad .b. data ergo est ratio .a. ad .b. simplicium in mixto .ab. existentium.

Quodsi .ab. magnitudine detur per sextam datorum: dabitur ratio .ab. ad .a. et .ab. ad .b. ergo per secundam datorum bis repetitam dabitur tam .a. quam .b. quod si .ab. non detur magnitudine: saltem dabitur ratio totius mixti: ad utranque partem simplicium.

| Quod intendebamus in hoc toto libello vt videre est apud Vitruuium [in] libro [ix De Arch.]. Et ob id illam in calce statuimus. [S120v]

Haec habui, Princeps serenissime, que tibi velut studiorum nostrorum praegustamenta offerrem: non quod sperem tamen tibi otium inter tot amplissimi Regni tui occupationes dari vt illum perlegere possis: sed vtsi quando in haec incideris: aut cuiquam examinanda dederis: intelligas me non omnes operas quas in philosophiae studiis impendi: tuis auctus munificentissimis stipendiis perdidisse: Quae hillari animo, qua soles humanitate suscipias: oro: atque boni consule.

Mas esta é a razão A:B, pela conclusão precedente desta. Logo, é dada a razão A:B, entre os simples que existem no composto A+B.

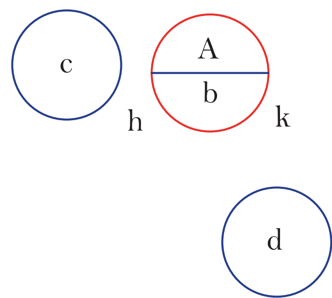


Fig. 226

No caso de se dar A+B em grandeza, as razões (A+B):A e (A+B):B serão dadas, pela sexta dos *Dados*; logo, pela segunda dos *Dados* duas vezes tomada, tanto A como B serão dados. No caso de A+B não ser dado em grandeza; pelo menos será dada a razão do composto todo para cada parte dos simples.

O que pretendíamos [conseguir] neste pequeno tratado, e é possível ler em Vitrúvio, no livro *Sobre a Arquitetura*, razão por que a pusemos no fim.

Considerei que estas coisas, Príncipe sereníssimo, te as devia oferecer como degustação dos nossos estudos, não porque espere que te seja dado ócio suficiente entre tantas ocupações do teu amplíssimo Reino para as puderes ler, mas para que se porventura nelas cair a tua atenção ou as deres a alguém para examinar, compreendas que eu não desperdicei todas as obras que despendi nos estudos de filosofia, gratificado pelos teus generosos estipêndios. Peço-te que as tomes com o espírito leve e com a humanidade que costumas mostrar e que as aproves.

Obras Matemáticas

Francisco de Melo

Vol. 1: Edição crítica e tradução

BERNARDO MOTA | HENRIQUE LEITÃO

CEC Centro de Estudos Clássicos
BNP BIBLIOTECA NACIONAL DE PORTUGAL
FONTES

Francisco de Melo (ca 1490-1536) foi o mais importante matemático português da geração anterior a Pedro Nunes. Depois de estudos na Universidade de Paris, onde o seu talento científico logo se destacou, regressou a Portugal, vindo a ocupar lugares de grande relevo na vida científica, cultural e eclesiástica do país. A sua importante obra matemática, que confirma a relação de intelectuais portugueses com o humanismo matemático europeu, estava referenciada desde o início do século XIX, e era em parte conhecida de historiadores de ciência portugueses e estrangeiros, mas só agora foi traduzida para português e estudada na sua totalidade. Este livro foi produzido no âmbito do projeto de investigação financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia: «Francisco de Melo e a Tradição Euclidiana em Portugal/Francisco de Melo and the Euclidean Tradition in Portugal» (EXPL/IVC-HFC/1290/2012; PI: Bernardo Mota).



FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA